UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

Facultad de Tecnología de la Construcción

Monografía

ANALISIS DINAMICO DE CIMENTACIONES SUJETAS A VIBRACIONES FORZADAS.

Para optar al título de ingeniero civil

Elaborado por

Gilberto Lacayo Bermudez.

Tutor

Dr. Ing. Oscar Gutiérrez Somarriba.

Managua, Diciembre 2018.

Contenido

1. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DINÁMICO DE CIMENTACIONES PARA MÁQUINAS..... 6

1.1. Introducción. 6

1.2 Estado del arte para el diseño de fundaciones de máquinas vibratorias. 7

1.3 Efectos interactivos máquina-cimiento –suelo. 16

2. ELASTODINÁMICA DEL SEMI-ESPACIO ELÁSTICO. 27

2.1 Introducción. 27

2.2 Evolución historiográfica de la teoría de la elasticidad. 34

2.3 Historiografía de la teoría matemática de la elastodinámica. 37

2.4 Ecuaciones básicas de elastodinámica. 41

2.5 Ecuaciones de Lamé Cauchy y Navier para propagación de ondas de cuerpo en sólidos elásticos. 46

2.6 Verificación de las ondas irrotacionales equivolumétricas. 55

2.7 Verificación de las ondas de distorsión. 57

2.8 Ondas elásticas planas propagándose en un medio homogéneo e isótropo. 58

2.9 Propagación de ondas planas P-SV y SH. 60

2.10 Solución ondulatoria para un estrato homogéneo isótropo y finito de suelo modelado como un sistema de cortante. 66

2.11 Ondas superficiales. 75

2.12 Ondas Rayleigh. 77

2.13 Ondas Love. 89

3. MECÁNICA ONDULATORIA EN MEDIOS HOMOGÉNEOS ESTRATIFICADOS HORIZONTALMENTE. 94

3.1. Introducción. 94

3.2. Reflexión y refracción de ondas planas en un semi-espacio de estratos horizontales homogéneos y finitos de suelos. 101

3.3. Solución en términos de frecuencias para dos estratos de suelos. 110

3.4. Reflexión y refracción de ondas SH para dos estratos de suelos. 112

3.5. Comportamiento dinámico de un semi-espacio homogéneo estratificado horizontalmente cimentado sobre lecho rocoso rígido 120

4. CIMENTACIONES APOYADAS EN EL SEMI-ESPACIO ELÁSTICO HOMOGÉNEO. 125

4.1. Introducción. 125

4.2. Planteamiento original del problema. 129

4.3. Aportes de Quinlan, Sung y Bycroft. 136

4.4. Analogía de Hsieh. 142

4.5. Teoría de Lysmer. 146

4.6. Aportes posteriores a Lysmer. 169

5. FUNCIONES DE IMPEDANCIA. 195

5.1. Introducción. 195

5.2. Formulación algebraica para las funciones de impedancia. 206

5.3. Determinación de las funciones de impedancia empleando modelos de elemento finito (FEM). 211

5.4. Evaluación de las funciones de impedancia usando el método de elementos de frontera. 216

5.5. Elementos de frontera para amortiguación gradual. 222

5.6. Métodos del elemento de borde (BEM) y de elementos finitos de bordes escalados (SBFEM). 226

5.7. Cálculo de impedancias mediante análisis (SFSI) “Soil-Foundation-Structure-Interaction.” 231

6. RESPUESTA DE SISTEMAS SDOF A FUERZAS ARMÓNICAS. 236

6.1. Introducción. 236
6.2. Forzado aplicando directamente la fuente de excitación a la masa. 236
6.3. Forzado inercial debido al movimiento del terreno. 243
6.4. Forzado debido a una masa excéntrica giratoria. 247
6.5. Efecto resonante. 250
6.6. Amplificación dinámica del suelo. 260
6.7. Aislamiento de vibraciones. 267
7. DISEÑO DE CIMENTACIONES PARA MÁQUINAS VIBRATORIAS. 272
7.1. Introducción al diseño de cimentaciones para máquinas industriales. 272
7.2. Tipos de Equipos Dinámicos. 277
7.3. Equipos rotativos. 277
7.4. Equipos reciprocantes. 284
7.5. Equipos de maquinaria impulsora. 289
7.6. Sistemas de fundaciones para máquinas sujetas a cargas dinámicas. 291
7.7. Aproximación de Barkan. 295
7.8. Aproximación de Tschebotarioff. 296
7.9. Análisis de Lysmer y Richart. 299
7.10. Análisis general de sistemas máquinas-fundación-suelo usando modelos análogos. 304
7.11. Requerimientos generales para cimentaciones de máquinas. 305
7.12. Fundaciones del tipo bloque rígido. 309
7.13. Métodos clásicos racionales para análisis de cimentaciones de máquinas. 318
7.14. Vibración vertical en el bloque de cimentación. 319
7.15. Vibración horizontal en el bloque de cimentación. 321
7.16. Vibración por cabeceo en el bloque de cimentación. 323
7.17. Vibración por torsión en el bloque de cimentación. 327

7.18. Cimentaciones porticadas. 329

8. EJEMPLO DE APLICACIÓN DE UNA CIMENTACIÓN TIPO BLOQUE PARA DESFIBRADORA DE CAÑA. 331

8.1. Introducción. 332

8.2. Análisis dinámico de la cimentación 334

8.3. Análisis sísmico espectral. 361

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS. 376

1. INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS DINÁMICO DE CIMENTACIONES PARA MÁQUINAS.

1.1. Introducción.

El objetivo fundamental de este trabajo, es revisar la evolución histórica del estado del arte de los conceptos e interpretaciones físicas que han permitido formular métodos analíticos y numéricos disponibles para el análisis de las respuestas dinámicas de cimentaciones sometidas al régimen de vibraciones forzadas, inducidas por maquinarias empleadas en procesos industriales.

A pesar del incipiente desarrollo industrial de Nicaragua, la demanda de cimentaciones para equipos industriales vibratorios es creciente, ejemplo de ello son los molinos y las desfibradoras de los tándem de molienda de los ingenios azucareros, de los molinos de trigo y de las cementeras, las turbinas de generación eléctrica, sean éstas de combustible fósil, biomasa, o eólicas, estaciones de bombeos, grúas viajeras, prensas, centrifugas, trituradoras rodillos de laminación, y máquinas de impacto, antenas de radar, que entre otras máquinas industriales, demandan obras de cimentación sujetas a régimen de cargas dinámicas.

La necesidad de desarrollar diseños eficaces y económicos para las cimentaciones sometidas a cargas dinámicas se ha vuelto más importante en los años recientes. Esto ha sido causado principalmente por la expansión industrial, y por la tendencia hacia la fabricación de máquinas más grandes. Los efectos perjudiciales que las vibraciones generan en las instalaciones industriales, demandan el establecimiento de requisitos de seguridad ocupacional y estabilidad de las estructuras y demás instalaciones cercanas a las maquinas vibrantes.

Los problemas implícitos en el diseño de cimentaciones sujetas a cargas dinámicas comprenden entre otros aspecto, las características dinámicas de las máquina, sean estas rotatorias, reciprocantes, de impacto, o de cualquier naturaleza. También deberán considerarse el comportamiento dinámico del sistema de cimentación en el que se apoya la fuente de la energía dinámica, y la respuesta dinámica del suelo debido a las excitaciones transmitidas por la cimentación, así como el proceso mediante el cual esta energía se transmite a través del suelo a las estructuras adyacentes.

El diseño de cimentaciones sometidas a cargas dinámicas es un procedimiento de prueba y error. Las dimensiones iniciales se seleccionan considerando factores tales como las dimensiones del equipo o estructura a soportar, el espacio disponible para la cimentación y el estado de esfuerzo estático normal. El diseño ensayado debe ser analizado para determinar su carga dinámica, el que deberá ajustarse y volver a analizar si es necesario.

Este trabajo se refiere específicamente a métodos prácticos para realizar el análisis dinámico requerido y el dimensionamiento del sistema de cimentación seleccionado empleando los métodos de análisis modelados mediante masas concentradas, resortes y amortiguadores, que es aproximadamente equivalente al sistema cimentación-suelo. En tales sistemas discretos, la masa representa toda la inercia presente en el sistema real, mientras que los muelles y los amortiguadores, representan respectivamente la flexibilidad y amortiguación del sistema. El paso clave, por supuesto, es la evaluación de los parámetros del sistema de parámetros concentrados equivalente. Una vez que esto se ha realizado, las soluciones matemáticas disponibles del sistema discretizado pueden utilizarse para estimar la respuesta del sistema real.

1.2 Estado del arte para el diseño de fundaciones de máquinas vibratorias.

El esquema del documento sigue el orden cronológico del desarrollo histórico de la evolución del tema, a partir de la dinámica de las zapatas circulares apoyadas en la superficie de un semi-espacio elástico de suelo homogéneo e isótropo, hasta el comportamiento de fundaciones circulares y no circulares desplantadas en un depósito de suelo perteneciente a un semi-espacio elástico. Para ello hemos recurrido entre otros, a los trabajos de K.G. Bhatia (2008) y Röesset (2009), [1] donde se establece el estado del arte y panorama actual del estudio del diseño de fundaciones para máquinas vibratorias.

Por la década de 1920 ya se conocían los problemas prácticos importantes de Ingeniería de cimentaciones, para apoyar la maquinaria que podría inducir vibraciones, generados por el cada vez más creciente uso de equipos con cargas vibratorias, debido a la expansión del desarrollo industrial. El diseño de las fundaciones para cargas dinámicas, dio lugar al campo de la dinámica del suelo. «Geiger (1927) adelantó investigaciones para determinar la frecuencia natural de las

fundaciones, mientras que se dio un gran adelanto de la ciencia tanto en la teoría como en la práctica por medio del trabajo de Rausch, quien investigó los cimientos para máquinas (1926) y turbinas (1924). Por su parte, Timoshenko (1928) y Den Hartog (1934) trataron con gran cantidad de problemas prácticos». [2]

Sin embargo, este enfoque en sus orígenes data de los años treinta, cuando el Fondo Alemán de Investigación Sobre Mecánica del Suelo, (Deuctche Forschschumgsgesellschaft für Bodenmechanik), se proponía realizar experimentos para determinar las características dinámicas del suelo. Eric Reissner (1874–1967) derivó la primera solución analítica para los desplazamientos verticales en la superficie de un medio espacio elástico, homogéneo e isotrópico lineal sometido a una tensión normal armónica uniformemente distribuida sobre un área circular. Bajo este supuesto los desplazamientos sobre el área circular serían variables. Reissner seleccionó el valor del desplazamiento vertical en el centro del área cargada como representativo del movimiento de una fundación rígida sin masa. La aplicación de estos resultados para estudiar las vibraciones de un cuerpo rígido que descansa sobre el suelo, representa por lo tanto una aproximación ya que la distribución de la tensión bajo una base rígida no sería uniforme pero era desconocida. El soporte teórico de tales experimentos, fue publicado por Reissner en 1936, los que constituyen la primera solución de carácter analítico para el desplazamiento vertical en la superficie de un espacio semi-infinito homogéneo, isotrópico y elástico, caracterizado por sus parámetros elastodinámicos. La teoría del semi- espacio elástico, propuesta por Reissner, es una generalización del modelo empleado por Boussinesq en mecánica de suelos, para determinar el estado de esfuerzo-deformación en la masa del suelo, debido a cargas estáticas aplicadas a cualquier profundidad de la superficie libre.

Reissner desarrolló una solución analítica para el desplazamiento vertical periódico en el centro del área circular cargada en la superficie del semi-espacio elástico, mediante integración de la solución de H. Lamb (1904) sobre un área circular, en la que las fuerzas y los desplazamientos son positivos hacia abajo. Consideró como representativo el desplazamiento obtenido en el centro del área cargada, considerando que los esfuerzos verticales periódicos estarían distribuidos uniformemente bajo el área circular.

En realidad, el desplazamiento de la fundación se especificaría mientras que las tensiones serían cero sobre la superficie libre restante del medio espacio (problema de valor de frontera mixto). La solución para el caso vertical fue inmediatamente seguida por una solución para las vibraciones de torsión. El trabajo a lo largo de estas líneas fue continuado en los años siguientes por Wilson (1942), Reissner y Sagoci (1944), y por Shekhter, que utilizó el promedio de los desplazamientos en el centro y en el borde del área cargada para obtener curvas de amplificación dinámica en función de una frecuencia adimensional y una relación de masa.

Estas curvas fueron ampliamente utilizadas. Los años cincuenta registraron un aumento significativo tanto en el número de investigadores involucrados en esta área como en el número de publicaciones relacionadas, con contribuciones importantes de Arnold, Bycroft, Quinlan, Sung y Warburton, entre otros. Quinlan y Sung consideraron otras distribuciones de esfuerzos bajo la base circular para evaluar el efecto de esta suposición simplificadora sobre los resultados. Bycroft explicó el amortiguamiento interno del suelo y estudió otros tipos de movimientos. Warburton estudió la respuesta dinámica de una base rígida sobre una capa de suelo lineal elástica, isotrópica y homogénea de grosor finito apoyada sobre una roca mucho más rígida por oposición a un medio espacio, caso de importancia práctica que presenta algunas diferencias marcadas en la solución. No sólo la rigidez estática de la cimentación será mayor (dependiendo de la relación entre su radio y el espesor de la capa), sino que una capa de suelo tendrá sus propias frecuencias naturales, dando lugar a mayores fluctuaciones de la rigidez con la frecuencia (la rigidez se convertiría en cero en la frecuencia de resonancia sin amortiguación interna) y una falta de radiación por debajo de una frecuencia umbral.

Estudios adicionales fueron conducidos en los años 60 por Borodatchev, Collins, Elorduy, Gladwell, Kobori, Lysmer, Minai, Novak, Richart, Robertson, Sigalov, Stallybrass y Whitman entre otros. La edición en inglés del libro de Barkan, Dynamics of Bases and Foundations de 1962, tenía una importancia práctica particular, ya que hasta entonces los principales libros sobre fundaciones de máquinas habían sido en alemán (las varias ediciones de Machinen Fundamente y Grünbau Dynamik de Lorenz) o en ruso como la obra de Barkan publicado por primera vez en 1948. La solución del verdadero problema de valores límite mixtos, donde las tensiones se especifican a lo largo de la superficie del suelo, fuera del área de la fundación, (superficie libre de estrés) mientras que los desplazamientos se imponen en la base de un cuerpo rígido y sin masa, fue abordado por Borodatchev en 1964 para el caso vertical.

Un tratamiento integral del problema y una solución gráfica alternativa para este caso fueron presentados por Awojobi y Grootenhuis en 1965, y Lysmer proporcionó una solución numérica el mismo año. Sigalov extendió el trabajo de Boradatchev a vibraciones oscilantes; Robertson utilizó una formulación basada en una expansión en serie y Gladwell la extendió en 1968. Una solución rigurosa para la rigidez dinámica de una fundación circular rígida y sin masa sobre la superficie de un medio espacio elástico lineal, homogéneo e isotrópico fue presentada en forma gráfica y tabular sobre una amplia gama de frecuencias de Veletsos y Wei para las vibraciones horizontales y de balanceo acopladas en 1971 y una solución independiente fue publicada por Luco y Westmann casi al mismo tiempo. Resultados adicionales para las excitaciones verticales y torsionales y para los medios viscoelásticos o histeréticos fueron obtenidos por Veletsos y Verbic. Todas estas soluciones representan puntos de referencia importantes y han contribuido en gran medida a nuestra comprensión del comportamiento de las fundaciones con losas bajo cargas dinámicas para vibraciones de pequeña amplitud. Sin embargo, hay pocos depósitos de suelos que pueden considerarse como semi-espacios homogéneos e isotrópicos, dado que el módulo de elasticidad del suelo varía generalmente con la profundidad, y habrá algunas rocas muy rígidas a poca profundidad.

Desde la década de 1950 hasta 1970, destacan los aportes de T.Y. Sung (1953), P.M. Quinlan (1953), Pauw (1953), Arnold y Warburton (1955) y Bycroft (1956), Jacobsen (1958), Norris (1959), Harris y Crede (1961), T.K.Hsieh (1962), Barkan (1962), A. Major (1962), Borodatchev (1964), J.Lysmer (1965), J.Lysmer y F.E.Richart (1966), Sigalov (1966), Whitman (1967; 1969; 1969), F.E.Richart y R.V.Whitman (1967), Elourdy (1969,) F.E. Richart, Jr., J.R. Hall, Jr., and R.D. Woods (1970), M.S. Subrahmanyam (1971), A. S. Veletsos y Yau T. Wei (1971), R.V.Whitman y F.E.Richart (1976).

El estado del arte sobre el tema, hasta el año 1969, puede consultarse en la obra de Richart, Ha1l, y Woods. (1970). [3]

Con la disponibilidad de ordenadores digitales y el desarrollo de nuevas formulaciones discretas (diferencias finitas, elementos finitos, elementos de contorno), las soluciones para fundaciones en la superficie o incrustadas en un suelo estratificado horizontalmente, fueron inmediatamente divulgadas en los trabajos de Waas (1972), (1974), Kausel (1974), Luco (1983) y Domínguez (1978), quienes desarrollaron estas teorías. Novak y Beredugo (1972), Kausel (1974) y Elsabee (1977) estudiaron el caso de cimientos circulares parcialmente incrustados en una capa de suelo

asumiendo una unión perfecta entre las paredes laterales y el suelo circundante, y sugirieron fórmulas aproximadas para este caso. La rigidez dinámica de las pilas y grupos de pilotes individuales (asumiendo de nuevo el comportamiento elástico lineal del suelo y la unión perfecta entre la pila y el suelo) fueron investigadas por Novak (1974), Novak y Nogami (1977), Blaney (1976), Kaynia y Kausel (1982) y Gómez (1984). A fines de los años setenta, se podía calcular la rigidez dinámica de cimientos con diferentes geometrías en depósitos de suelos estratificados horizontalmente con cualquier grado de precisión deseado, siempre y cuando se pudiera asumir un comportamiento elástico lineal para el suelo, y un contacto perfecto entre el cimiento y el suelo circundante, para vibraciones de pequeñas amplitudes como se podría esperar para las fundaciones bien diseñadas de máquinas correctamente diseñadas). Sin embargo, las cimentaciones en base a zapatas distribuidas han recibido mucha menos atención, y algunos estudios realizados han descuidado la interacción entre ellas a través del suelo, haciendo que los resultados sean cuestionables, a pesar de que la interacción entre dos fundaciones vecinas había sido estudiada por Warburton, Richardson y González (1977), a finales de los años sesenta y setenta.

Al mismo tiempo que se desarrollaron las formulaciones analíticas, Reissner exploró la posibilidad de reproducir sus resultados con un modelo de parámetros discretos consistente en una masa, un resorte y un amortiguador, pero concluyó que sus valores tendrían que ser funciones de la frecuencia y él no podía encontrar expresiones simples para ellos. Conclusiones similares fueron alcanzadas por otros que intentaban hacer compatibles datos experimentales con modelos simples. Shekhter. OY (1948), [4] por otra parte, encontró que los resultados para las funciones de amplificación en términos de una relación de masa y una frecuencia adimensional podrían aproximarse razonablemente mediante un sistema masa-resorte-amortiguador. Merritt y Housner sustituyeron la fundación por un resorte rotatorio en su estudio de 1954 de la interacción sísmica suelo-estructura: Lycan y Newmark en 1961 reemplazaron la fundación por una masa libre. En 1965, Fleming, Screwvala y Kodner utilizaron muelles horizontales y oscilantes para simular efectos de interacción en oscilación y balanceo. Lysmer y Richart en 1966, Whitman y Richart en 1967, Hall en 1968 y Whitman en 1969, utilizaron de nuevo modelos de parámetros agrupados con manantiales, masas y puntos de ruptura. A principios de los años setenta, Meek y Veletsos usaron un cono truncado para explicar con éxito algunas de las características básicas de la

rigidez dinámica de una fundación y mostraron que un simple sistema masa-resorte-amortiguador no era suficiente para reproducir la solución exacta en una amplia gama de frecuencias.

Para los valores pequeños de la frecuencia adimensional, y una masa constante, el resorte y el amortiguador parecen reproducir razonablemente la variación de frecuencia de los términos de rigidez y esto ha dado lugar al concepto de una masa añadida de suelo vibrando en fase con la fundación. De hecho, tal modelo fue propuesto en varios informes técnicos e incluso en libros ampliamente usados, pero los estudios de Veletsos mostraron que no es correcto y que los modelos de parámetros concentrados deben tener términos dependientes de la frecuencia o ser un poco más complejos. Veletsos y Wei y Veletsos y Verbic encontraron expresiones aproximadas pero exactas para los términos de rigidez de una cimentación circular rígida en la superficie de un semi-espacio elástico, homogéneo e isotrópico, en función de la frecuencia adimensional y éstas siguen siendo las mejores fórmulas simplificadas disponibles hasta la fecha. Con tiempo suficiente para reproducir la solución exacta en un rango extendido de frecuencias.

La rigidez dinámica de una base rígida o muy rígida puede representarse mediante una matriz 6 por 6 cuyos términos son funciones complejas de la frecuencia. La parte real de estos términos representa la rigidez estática y los efectos inerciales en el suelo (por lo tanto, la dependencia de la frecuencia). Los términos imaginarios representan la pérdida de energía (amortiguación) debida, por una parte, a la radiación de las ondas alejadas de la cimentación (para todas las frecuencias en el caso de un semi-espacio o para frecuencias superiores a una frecuencia umbral cuando se trata de un estrato finito de suelo) y, por otro lado, al amortiguamiento interno del material en el suelo (asociado con el comportamiento no lineal del suelo y por lo tanto función del nivel de vibraciones). La radiación o amortiguación geométrica aumenta en general con la frecuencia siendo así aproximadamente del tipo viscoso. El amortiguamiento interno del suelo sería independiente de la frecuencia, del tipo histerético. Para una base superficial con dos planos de simetría, se puede considerar que la matriz de rigidez dinámica es aproximadamente diagonal y la base puede ser representada por tres conjuntos independientes de resortes y puntos de rotación, dependientes de la frecuencia.

Para una base incrustada, el acoplamiento entre las traslaciones horizontales y el balanceo no puede ser descuidado, pero uno podría nuevamente en muchos casos considerar los conjuntos independientes de resortes y amortiguadores situados a cierta profundidad y no en la base. Para las fundaciones flexibles o pilotes, este modelo simplificado ya no es aplicable y habría que

seleccionar un número de puntos a lo largo del área de contacto entre la fundación y el suelo y derivar una matriz de rigidez dinámica con 3 grados de libertad en cada punto. Es común expresar los términos de la matriz de rigidez dinámica en la forma:

$$K_{dynamic} = K_{real} + iK_{imaginary} = K_{real} + i\mu C_{eq} = K_{estatic}\left(k_1 + i\frac{\mu R_{eq}}{V_s}c_1\right) \quad (1.1)$$

Todas las variables son función de la frecuencia circular μ en radianes / s, $K_{estatic}$ es la rigidez estática correspondiente, C_{eq} es la constante de un equivalente amortiguador viscoso, R_{eq} es el radio equivalente de la fundación si no es circular, V_s es la velocidad de las ondas de corte del suelo, y k_1 son los coeficientes de rigidez dinámica. La presencia de un término imaginario implica que la fuerza dinámica aplicada sobre el cimiento y el desplazamiento resultante no están en fase. Llamando ¤ al ángulo de fase entre ellos $\tan ¤ = K_{imag} / K_{real}$

Los valores constantes (independientes de la frecuencia) de los dos coeficientes dinámicos implicarían que el término puede ser reproducido por un resorte tradicional y un amortiguador. Una variación parabólica de k_1 implica un resorte y una masa que vibra en fase con la fundación. La figura muestra el coeficiente k_1 real y su variación con la frecuencia para la rigidez horizontal de una losa circular descansando sobre la superficie de una capa de suelo de profundidad finita con 5% de amortiguación interna. Los resultados presentados son para un estrato de espesor fijo y cimientos con radios diferentes.

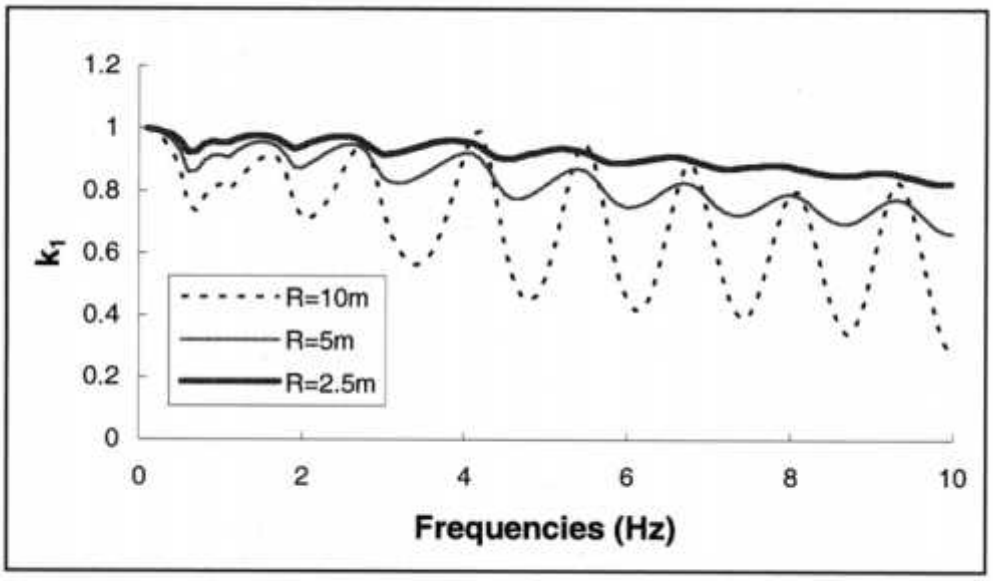


Fig (1.1): k_1 coefficient for horizontal stiffness of mat foundations (Röesset 2009)

Las oscilaciones están asociadas con las frecuencias naturales del estrato del suelo. A medida que el radio de la fundación disminuye y la relación entre el espesor del estrato y el radio aumenta, la amplitud de las oscilaciones disminuye y finalmente los resultados se aproximan a la solución para un semi-espacio. Los resultados para un semi-espacio todavía mostrarían una pequeña variación con la frecuencia, pero sería mucho más suave. El coeficiente de vibración vertical y rotación (torsión u oscilación) tendría por otro lado una mayor dependencia de la frecuencia, incluso para un semi-espacio, particularmente para valores de la relación de Poisson mayores de 0,4.

Al comparar datos experimentales con predicciones teóricas basadas en fórmulas publicadas, se debe tener en cuenta que estas últimas están destinadas a fundaciones rígidas sin masa y para suelos homogéneos elásticos lineales. Incluir la masa de la cimentación ensayada, no representa ningún problema, pero requiere la consideración de la respuesta de un sistema de uno o de dos grados de libertad (dependiendo del tipo de excitación) y por lo tanto la comparación requiere algunos cálculos adicionales. A través de los años, muchos de los investigadores mencionados trataron de correlacionar los datos experimentales disponibles con las predicciones de las formulaciones teóricas existentes en ese momento. Se ofrecieron varias razones legítimas para las discrepancias encontradas, una de las más comunes es la existencia de efectos no lineales.

Se podría esperar que para una cimentación bien diseñada, las deformaciones dinámicas inducidas en el suelo por las vibraciones de la máquina fueran muy pequeñas y que, por lo tanto, la elasticidad lineal se aplicaría generalmente excepto en los puntos donde hay concentraciones de tensiones, como en los bordes de una losa de cimentación. Esto no será siempre el caso para las pruebas de campo en las que se utilizan diferentes frecuencias y amplitudes de excitación, o para las bases desequilibradas que han sido diseñadas incorrectamente. Los efectos no lineales siguen siendo el principal aspecto que requiere de más investigación en relación con la rigidez dinámica de las cimentaciones de las máquinas. Debe observarse sin embargo que con efectos no lineales importantes la respuesta de una fundación a una carga armónica de frecuencia única ya no estará en esa frecuencia, sino que mostrará la participación de otras frecuencias sub-armónicos y súper-armónicas y, por tanto, la amplitud del movimiento frente a la frecuencia de excitación ya no es significativa. Los resultados deben obtenerse en este caso para cada situación específica. El análisis dinámico de una fundación de máquina tiene que considerar por un lado la respuesta en estado estacionario a millones de ciclos de una excitación armónica con la frecuencia de la máquina (velocidad de rotación en ciclos por segundo) y por otro la respuesta transitoria al arranque y condiciones de parada, particularmente si la frecuencia natural del sistema es menor que la frecuencia de la máquina. En el primer caso es habitual estimar la frecuencia natural del sistema e intentar situarlo fuera de un rango centrado en la frecuencia de la máquina para evitar resonancias o altas amplificaciones. Esto evita tener que calcular las amplitudes de las vibraciones resultantes, pero este cálculo, aunque involucra cantidades complejas, es extremadamente simple, requiriendo sólo en la mayoría de los casos la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. En cualquier caso, es importante que este tipo de análisis tenga valores precisos de la rigidez de la cimentación, particularmente en la frecuencia natural del sistema y en la frecuencia de la máquina. El análisis transitorio requiere ir desde el dominio del tiempo hasta el dominio de la frecuencia y volver utilizando técnicas de transformación de Fourier, pero es más tolerante con las pequeñas inexactitudes en la variación de frecuencia de la rigidez.

Los aportes logrados en el ámbito teórico-experimental sobre el tema de cimentaciones sujetas a cargas dinámicas, han permitido una mayor confianza en la validez del enfoque basado en la teoría del semi-espacio elástico. Las pruebas de campo realizadas a gran escala para medir las llamadas constantes elásticas requeridas por la teoría para determinar los valores numéricos de

los parámetros del sistema discretizado equivalente, confirman las teorías basadas en la hipótesis de que el suelo es un espacio semi-infinito homogéneo, isotrópico y elástico. Esta teoría, discutida por Richart y Whitman (1967) ha determinado los factores que influyen en el comportamiento dinámico y ha proporcionado el único método satisfactorio para evaluar algunos de estos factores.

Lysmer y Richart en 1966, fueron los primeros en proponer en método simplificado a partir de un sistema de un grado de libertad, considerando la rigidez y el amortiguamiento como independientes de la frecuencia. El enfoque se orientó a solucionar la respuesta de una cimentación circular desplantada sobre un semiespacio elástico, lo que condujo a varios investigadores al análisis de la respuesta de la cimentación circular, sujetas a solicitaciones más generales: momentos flectores y torsores, fuerzas horizontales oscilantes. Schekter (1948), Richart (1953), Bycroft (1954), Hisieh (1962) y Lysmer (1966), estudian cimentaciones superficiales sobre el semiespacio, sometidas a diferentes tipos de vibraciones; para lo que se asumía una función de distribución de las tensiones en la zona de contacto. El análisis de una zapata circular con otros modos de vibración, condujo a lo que se conoce como el “círculo equivalente” el cual nos permite calcular cimentaciones circulares y no circulares.

A partir de la década de 1980, cobran auge métodos analíticos simples para cimentaciones superficiales empotradas, con geometría circular y arbitraria, desplantadas sobre un semiespacio elástico. G. Gazetas (1984) [6] ha incorporado algunas mejoras al modelo de Lysmer y Richart, para evaluar los coeficientes dinámicos de rigidez y de amortiguamiento del sistema de cimentación. Para lo cual se han propuesto métodos aproximados simples, realizados con auxilio de programas de cómputo, que permiten cuantificar los coeficientes de rigidez y amortiguamiento del suelo, basados en la teoría del semiespacio elástico.

Los estudios [7] teóricos y experimentales realizados por Dobry y Gazetas (1986) para determinar los coeficientes de amortiguamiento y de rigidez del suelo, dependientes de la frecuencia de excitación para los seis modos principales de vibración del sistema.

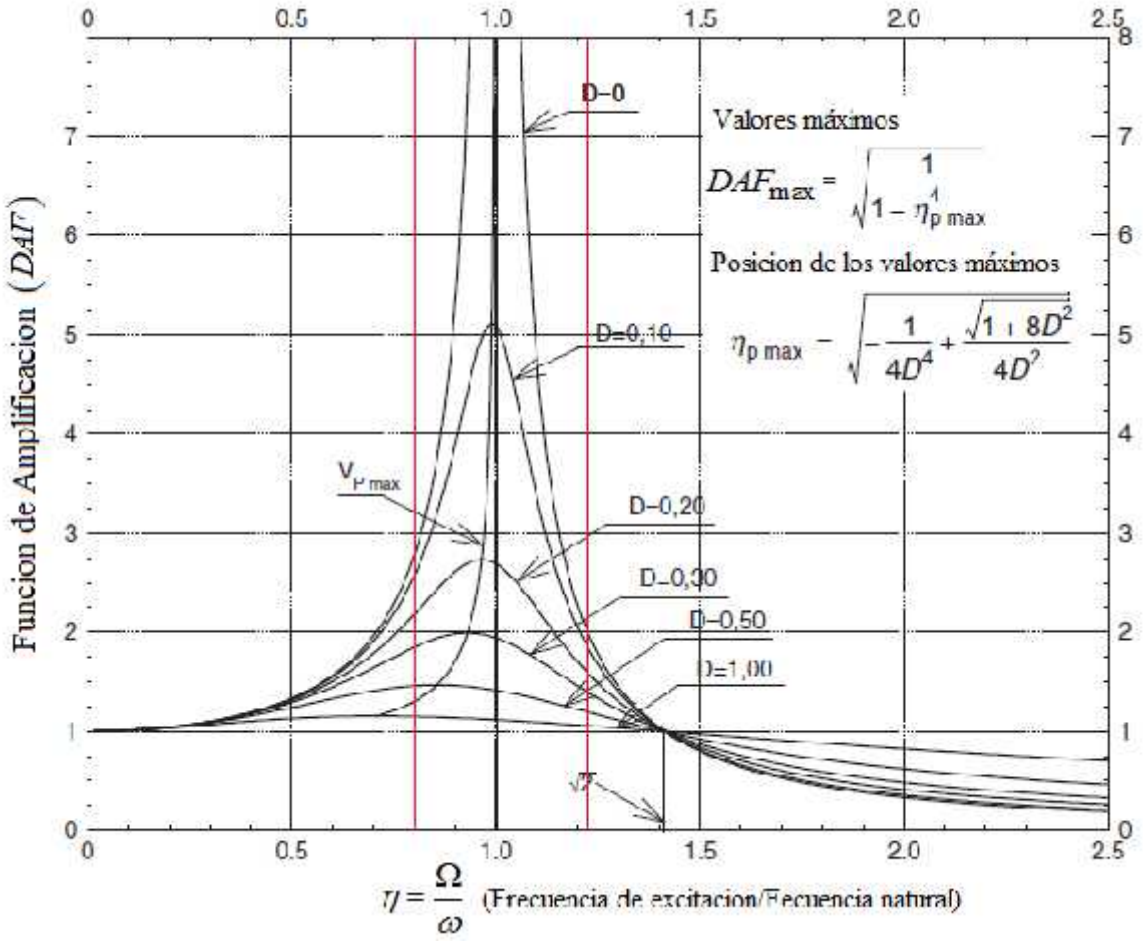
1.3 Efectos interactivos máquina-cimiento –suelo.

El objetivo de este trabajo, es revisar el actual estado del arte en la determinación de las respuestas dinámicas de las fundaciones para equipos que inducen vibraciones forzadas al sistema de cimentación y al suelo circundante.

Se abordan los efectos de los grupos de parámetros adimensionales geométricos y de materiales, en la determinación de las funciones de rigidez dinámica y los coeficientes de amortiguamiento en la respuesta de fundaciones masivas. Se incorporan gráficos normalizados y expresiones matemáticas simples para una variedad de perfiles idealizados del suelo y de la geometría de la fundación, ilustrándose el uso de estos datos para estimar los movimientos bidimensionales y tridimensionales de traslación y rotación, o una combinación de ambos, verificados en fundaciones reales.

El principal objetivo propuesto en el diseño dinámico de una cimentación, es cumplir con los estados límite de servicio y de falla para las deformaciones y vibraciones del conjunto máquina-cimentación-suelo, de modo que se garantice reserva funcional para resistir las solicitaciones a las que estará sujeta en su vida útil.

Se presta particular atención a los efectos resonantes, los que ocurren cuando la frecuencia de la fuerza de excitación en una vibración forzada de un cuerpo o un sistema, es igual a una de las frecuencias naturales del cuerpo o del sistema, generándose grandes amplitudes del movimiento. El valor particular de la frecuencia de la fuerza de excitación que produce condiciones resonantes se denomina frecuencia de resonancia para ese modo específico de vibración. Dado que la resonancia produce grandes amplitudes, tiene implicaciones peligrosas para cualquier estructura, máquina o sistema, causando severas fallas. Por lo tanto uno de los esfuerzos importantes de un ingeniero que se ocupa del diseño dinámico de fundaciones de máquinas, es evitar condiciones resonantes.



En este sentido deberán considerarse el control de las amplitudes de vibración debidas a las acciones dinámicas propias del funcionamiento de la maquinaria, evitando que la relación de la frecuencia excitadora con la frecuencia natural del sistema máquina-cimiento-suelo, no esté comprendida en el intervalo del ancho de banda contraindicado, previendo no ocurran las condiciones de resonancia indeseadas en el diseño y construcción de cualquier sistema mecánico. Debido a que generalmente las frecuencias de excitación están predeterminadas por los requerimientos de carácter funcional del equipo, deberán controlarse las frecuencias naturales del sistema máquina-cimiento-suelo, para examinar la posible ocurrencia de amplitudes de resonancia.

Generalmente los equipos vibratorios generan amplitudes de desplazamientos dinámicos pequeñas, en comparación con las cargas estáticas, y las deformaciones del suelo son casi elásticas, despreciándose generalmente la no linealidad y las deformaciones permanentes. Sin embargo las acciones dinámicas suelen ser cíclicas periódicas o no periódicas, constante o transitoria, periódica en forma de un pulso, o de impacto. Estas cargas dinámicas actúan durante largos periodos de tiempo, pudiendo por tal razón ser generadoras de fallas por esfuerzo cortante y asentamientos diferenciales en la masa de suelo, lo que podría resultar arriesgado para la operación de los equipos, requiriéndose por tal situación de un comportamiento elástico del suelo. Dado que las fuerzas dinámicas imparten energía a los granos del suelo, se producen variaciones en la fricción interna y la adhesión. Las cargas de impacto y las vibraciones pueden inducir licuefacción de arena saturada fina, generando inestabilidad.

En la mayoría de las soluciones presentadas, se asume un comportamiento isótropo viscoelástico lineal, con amortiguamiento histerético y por radiación geométrica para modelar las pérdidas de energía debidas a esas pequeñas amplitudes de deformaciones. También serán consideradas la importancia de la anisotropía y la inhomogeneidad del suelo. El diseño de las fundaciones sometidas a fuerzas dinámicas forma parte de la dinámica del suelo, la que tiene como objetivo principal estudiar el comportamiento del suelo ante cargas de naturaleza dinámicas. La dinámica del suelo, es una disciplina relativamente nueva de la ingeniería geotécnica, teniendo variados campos de aplicación en el contexto del progreso industrial y tecnológico, siendo uno de sus objetos de aplicación, desarrollar criterios para el diseño de las fundaciones bajo condiciones de cargas dinámicas.

Para una primera aproximación en la predicción de las respuestas modales para vibraciones verticales, y para modos de vibración acoplados en el diseño de fundaciones de máquinas, sujetas tanto en vibraciones libres como forzadas, es ampliamente empleado el modelo de parámetros concentrados masa-resorte-amortiguador, en el que se asume que la cimentación se apoya en un suelo superficial idealizado como un resorte lineal carente de peso, con amortiguamiento viscoso. Aunque es bien sabido que el efecto de amortiguación del suelo se debe a la radiación y a la pérdida interna de energía, se considera viscoso por comodidad operacional matemática.

Dado que el resorte se considera ingrávido para la conveniencia matemática, pero considerando el suelo tiene peso, los resultados de este análisis no coinciden exactamente con los valores experimentales realizados para fundaciones de las máquinas sujetas a vibraciones. Algunos investigadores han propuesto modelos no lineales para simular la relación constitutiva no lineal del suelo, pero no se ha dado una solución eficaz para evaluar la rigidez no lineal del resorte.

A. Pauw [8] en 1953 consideró el suelo como una pirámide truncada que se extiende a la profundidad infinita; e intentó evaluar el efecto de la constante de resorte sobre el tamaño y la forma del área de control y el efecto de la variación del módulo del suelo con la profundidad.

Asumió que el módulo del suelo aumentaba linealmente con la profundidad para suelos sin cohesión, mientras que se toma como una constante con la profundidad para suelos cohesivos. Un modelo de discreto masa-resorte- amortiguador modificado, que implica el uso de la masa de suelo participando en la vibración, para la evaluación de la constante de resorte K_z y la relación de amortiguación, D, ha sido propuesto por Subrahmanyam (1971).

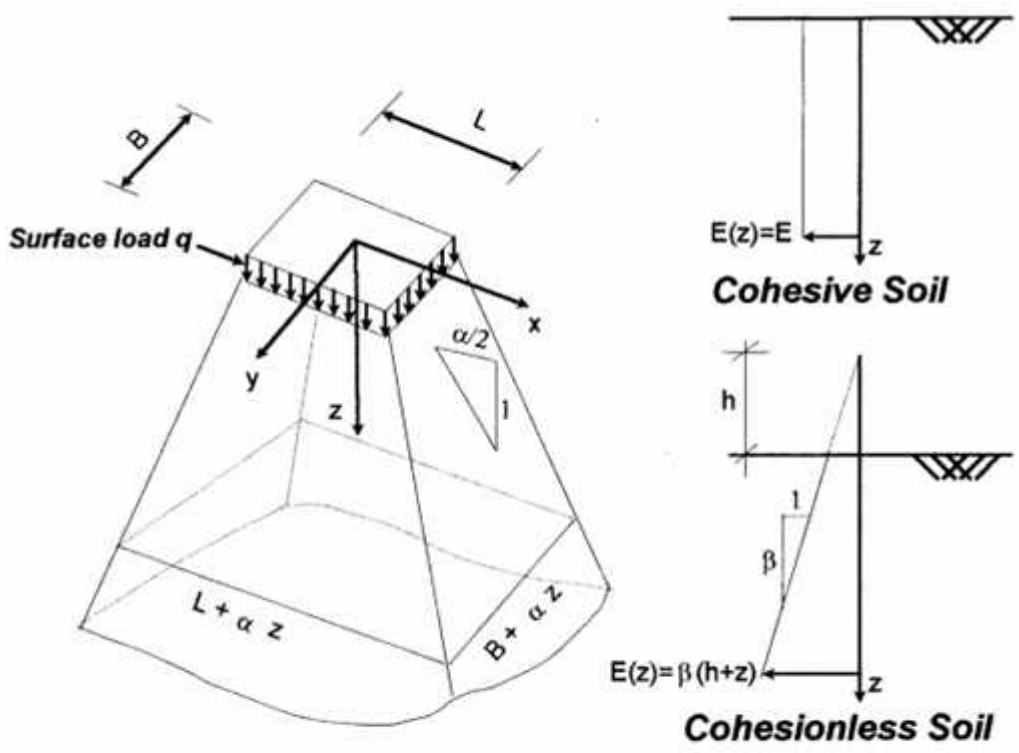


Fig (1.2): Pauw's assumptions

Las pruebas dinámicas de laboratorio realizadas en 1971 por Sankaran y Subrahmanyam, [9] mediante dos aproximaciones del problema: una basada en la teoría de la elasticidad y la otra en las pruebas de vibración torsionales y longitudinales, evidenciaron de que la evaluación independiente del módulo de cortante y la relación de Poisson puede no dar el parámetro del suelo deseado que es generalmente necesario para prever la respuesta de las fundaciones sujetas a carga dinámica. El módulo de cortante de las arcillas sujetas a condiciones dinámicas obtenidas debería ser utilizado con precaución en la predicción de la respuesta de las fundaciones bajo carga dinámica.

Las fundaciones de las máquinas tienen seis grados de libertad, tres en traslación y tres en rotación, pero por conveniencia analítica se asume que tienen un solo grado de libertad SDF. Para la construcción de un modelo con parámetros concentrados, se agrupan la masas de la máquina y de la fundación M_f con cierta la masa del suelo M_S debajo de la cimentación que participa en la

vibración. La masa combinada $M = M_f + M_S$ discretizada, se localiza en el centro de gravedad de todo el sistema.

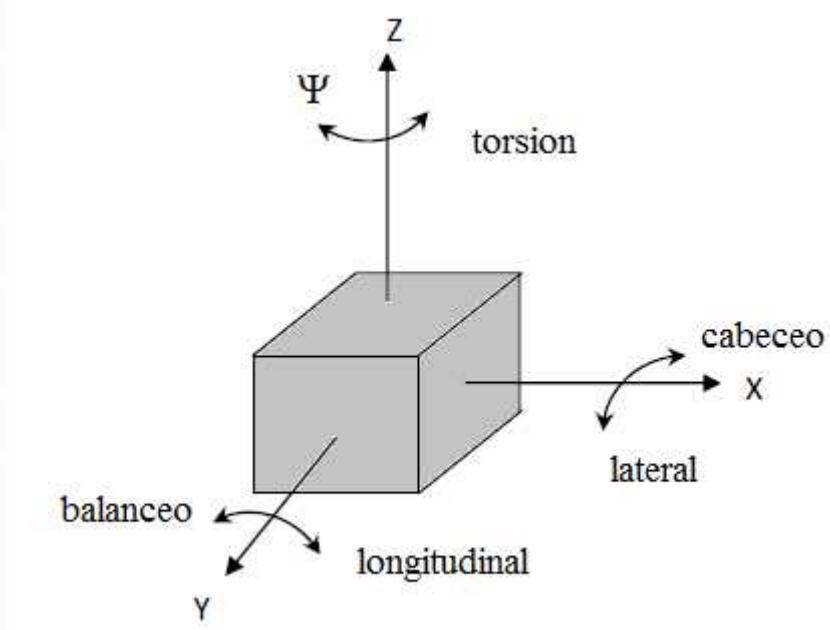


Fig (1.3): Grados de libertad para fundaciones de máquinas.

Se considera que el sistema está sometido a vibraciones puramente verticales y, por lo tanto, debe de ser tratado como un SDF. El análisis puede ser realizado a partir de los enfoques más amplios, como el de la teoría del semi-espacio elástico; o mediante el método de los resortes lineales elásticos despreciándose el peso del suelo; o bien empleando resortes lineales elásticos considerando el peso del suelo. También se dispone de métodos empíricos, los que deberán emplearse con muchas reservas. Para todos los métodos es conveniente construir un modelo con parámetros concentrados masa-resorte-amortiguador.

El método del semi-espacio elástico, es comúnmente el más usado en la práctica. Este método parte de idealizar la cimentación de la maquinaria como un oscilador mecánico vibrando con una base circular apoyada en la superficie de un suelo asumido como un cuerpo semi-infinito, isótropo, homogéneo y elástico, el cual es referido como el semi-espacio elástico.

Sin embargo, cabe señalar que no existe un método racional para determinar la magnitud de la masa de suelo que participa en la vibración. Un criterio adoptado, es elegir un valor comprendido entre cero y la magnitud de la masa de la máquina y de la fundación en la mayoría de los casos.

Los enfoques empíricos basados en el tipo de máquinas, la velocidad o la potencia de operaciones, ha sido superado por las más recientes investigaciones, resultando obsoletos en el presente.

Las dimensiones de las cimentaciones se fijan según los requerimientos operacionales de las máquinas, y generalmente son preestablecidos por el fabricante. Si hay elección para el diseñador de la fundación, deben elegirse las mínimas dimensiones que satisfagan los criterios de diseño. Una vez decididas las dimensiones de la fundación y conocidas las condiciones del sitio, la frecuencia natural del sistema de la fundación-suelo y las amplitudes del movimiento bajo condiciones de funcionamiento, deberá seguirse el proceso de prueba y error.

Los datos específicos necesarios para el diseño varían para diferentes tipos de máquinas. Sin embargo, deberán considerarse ciertos los siguientes requisitos generales:

Diagramas de cargas mostrando la magnitud de las cargas estáticas y dinámicas ejercidas por la máquina.

Potencia y velocidad de operación de la máquina.

Diagramas de línea mostrando las aberturas, ranuras para los pernos de anclajes a la cimentación. Detalles de piezas accesorias empotradas en la cimentación.

Naturaleza del suelo y sus propiedades estáticas y dinámicas, así como los parámetros del suelo para el diseño.

Método del semi-espacio elástico. Método de los resortes lineal elásticos sin considerar el peso del suelo. Método de los resortes lineal elásticos considerando el peso del suelo. Métodos empíricos.

La teoría para el diseño de cimentaciones superficiales y profundas en régimen de vibraciones forzadas, ha logrado notables avances a partir de la década de 1960, cuyo estado del arte fue revisado por Whitman y en los posteriores aportes realizados por Richart 1967 y McNeil en 1969. [10, 11].

Actualmente se dispone de numerosas obras en las que se explora la naturaleza de fenómenos asociados con el comportamiento de las cimentaciones sujetas a vibraciones, los que ha permitido conocimientos claves para identificar y determinar los parámetros que influyen en la respuesta dinámica de los diferentes sistemas de cimentaciones para máquinas vibrantes. Se han desarrollado formulaciones matemáticas simples, gráficos adimensionales y programas computacionales para determinar racionalmente la respuesta dinámica correspondiente a cada caso específico de fundaciones con diversas formas y rigideces, apoyadas en formaciones estratigráficas de suelos superficiales o profundos.

Además de la selección y aplicación de los procedimientos analíticos apropiados para predecir las respuestas en el diseño de fundaciones sujetas a vibraciones forzadas, se requiere del establecimiento de criterios de comportamiento, la determinación de las cargas dinámicas, y la identificación del perfil del suelo mediante ensayos realizados en el sitio y en el laboratorio, para determinar los parámetros representativos de las propiedades dinámicas del suelo. La revisión exhaustiva de las mediciones realizadas para determinar las propiedades dinámicas del suelo, ha sido realizada por R. D. Woods [12] en 1978 mientras que Richart y Ozaydin et al, en 1980, [13] han resumido los conocimientos actuales sobre los factores que influencian los parámetros dinámicos del suelo.

El desarrollo logrado en la determinación de las propiedades de los materiales constitutivos del suelo, complementan los avances alcanzados en el análisis de vibración en fundaciones, y justifican el uso de sofisticadas expresiones numéricas establecidas para su diseño. No obstante las ventajas de contar con métodos analíticos avanzados, su confiabilidad depende en última instancia, de la capacidad de predecir el comportamiento físico exhibido durante las operaciones reales de las máquinas.

Debido a que la magnitud de las cargas dinámicas operativas de las máquinas es relativamente pequeña en comparación con su peso estático y el de la propia cimentación, es válido asumir un suelo homogéneo, elástico y lineal, suposición que no debe considerarse restrictiva para aplicarse

a una gran variedad de suelos estratificados, considerando la heterogeneidad de los mismos mediante la unión de estratos homogéneos. Las ecuaciones del movimiento se obtienen por simple aplicación de la teoría de la elasticidad bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y desplazamientos.

Sin embargo debe tenerse en consideración que la deformación en el suelo aumentará con cada ciclo de carga, pudiendo llegar a tornarse inaceptable después de un cierto tiempo de operación, y que los depósitos reales de suelos, exhiben propiedades anisotrópicas, de inhomogeneidad y no linealidad, lo que reviste alguna complejidad analítica. El comportamiento de un suelo ante cargas dinámicas suele ser, por lo general muy complejo.

Considerando que la propagación ondulatoria en el suelo debido a cargas dinámicas originadas en máquinas industriales puede afectar el desarrollo de actividades humanas, su estudio constituye un aspecto fundamental de la dinámica del suelo, disciplina que a partir de su origen en Alemania en 1930, ha tenido muchos progresos en las últimas décadas por sus numerosos campos de aplicación, en la ingeniería sísmica, en las vibraciones debidas al tráfico, en las perturbaciones inducidas por maquinarias y las debidas a explosiones.

Este trabajo se orienta hacia la predicción de las vibraciones inducidas en el suelo por vibraciones de maquinarias, lo que requiere de la identificación de los mecanismos emisores de las perturbaciones ondulatorias, de la geometría del sistema de cimentación y del estudio de la propagación ondulatoria en el suelo, para lo cual es necesario conocer sus propiedades dinámicas.

Según estas consideraciones, la amplitud y la frecuencia de vibración de una máquina, junto a la geometría de la fundación y las propiedades dinámicas del prototipo de suelo, son los parámetros más importantes a considerar en el planteamiento analítico para determinar los efectos de respuesta dinámica en las cimentaciones sometidas a régimen vibratorio.

Para el análisis de este tipo de fundaciones, generalmente se adopta un modelo interactivo máquinas-cimiento-suelo, idealizado como un sistema masa-resorte-amortiguador, con uno o dos grados de libertad, o bien mediante la teoría del semi-espacio elástico, siendo el objetivo básico de diseño, limitar su movimiento a amplitudes que no expongan al peligro por asentamientos excesivos la operatividad de la máquina, y daños a obras vecinas, ni causen molestias a personas

que laboren en el entorno, para lo cual deben establecen estados límites permisibles para las amplitudes y frecuencias de vibración transmitidas al suelo.

El diseño de las cimentaciones para máquinas vibrantes es el problema más frecuente en dinámica de suelos, y reviste de alguna complejidad requiriendo de un especial y cuidadoso análisis de ingeniería, debido a que se transmiten al suelo cargas dinámicas de naturaleza cíclica, tanto de traslación como de rotación durante largos periodos de tiempo, lo que demanda de recursos analíticos apropiados que permitan obtener las respuestas dinámicas que garanticen el buen desempeño previsto para las máquinas.

Las máquinas reciprocantes o rotativas que producen vibraciones o fuerzas dinámicas desbalanceadas, bien sean o no de naturaleza sinusoidal periódicas, se apoyan en bloques de cimentación estructural que transmiten al suelo las perturbaciones ondulatorias originadas en la superestructura, a diferencia de las perturbaciones sísmicas que se transmiten desde el suelo a la superestructura mediante la interacción suelo cimentación.

Para todos los casos en que el suelo es el medio transmisor ondulatorio, es imprescindible conocer su comportamiento dinámico, bien sea para el adecuado comportamiento de las cimentaciones de máquinas que inducen perturbaciones ondulatorias, o para establecer la relación entre las condiciones del suelo y los daños asociados con edificaciones durante sismos. La propagación de las ondas depende de las propiedades dinámicas del suelo, de su estratificación y de las condiciones de contorno.

2. ELASTODINÁMICA DEL SEMI-ESPACIO ELÁSTICO.

2.1 Introducción.

Las estructuras de cimentación para maquinarias vibratorias transmiten los efectos perturbadores hacia el suelo, a diferencia de las perturbaciones sísmicas que inducen sus efectos desde el suelo a las cimentaciones y a la superestructura. Para ambas situaciones, las perturbaciones ondulatorias viajan a través del suelo, por lo que reviste importancia conocer los distintos tipos de ondas y sus mecanismos de propagación. La propagación de las ondas depende de las propiedades dinámica**s** del suelo, de su estratificación y de las condiciones de contorno. Las vibraciones, que suponen un campo de ondas incidentes, pueden resultar perjudiciales para las estructuras, al funcionamiento de sus servicios básicos, o a sus ocupantes, por lo que **se** requiere estudiar la interacción suelo-estructura. La dinámica del suelo es de gran utilidad práctica para muchos problemas de ingeniería geotécnica en los que es necesaria la evaluación de las propiedades esfuerzo-deformación y la estimación de las fuerzas inerciales generadas durante la aplicación de cargas dinámicas al suelo. Los suelos en la realidad física, generalmente exhiben condiciones erráticas que incluyen, desde depósitos idealizados como un medio elástico homogéneo, tal es el caso de los horizontes estratigráficos profundos de arcillas, hasta formaciones estratigráficas heterogéneas más comunes y complejas, con características no lineales de esfuerzo deformación, delimitadas por las condiciones de fronteras en las interfases entre los estratos.

Los primeros estudios sobre propagación de ondas se deben a Rayleigh (1885) y a Lamb (1904), [14,15] en los que se describen la existencia los dos tipos de ondas primarias longitudinales de compresión o de dilatación P y ondas de distorsión S que se transmiten libremente en el suelo idealizado como un medio elástico homogéneo, e isótropo infinito.

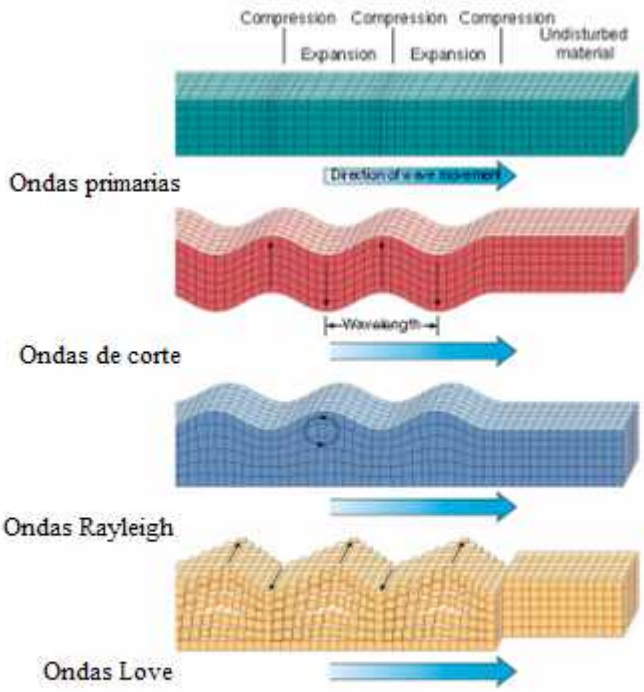
Dentro del medio de suelo, únicamente pueden propagarse dos tipos de ondas P y S, correspondientes a las dos soluciones que se obtienen de las ecuaciones del movimiento. Las ondas primarias P únicamente generan desplazamientos de las partículas sin rotación en la

dirección de propagación; mientras que las ondas secundarias transversales de distorsión S son equivolumétricas, debido a que el desplazamiento se produce sin cambio volumétrico de las partículas, en dirección normal a la propagación. Este tipo de ondas puede descomponerse en sus componentes vertical SV y horizontal SH.

Para un medio considerado como un semi-espacio elástico semi-infinito, la superficie libre es una frontera que permite obtener un tercer tipo de ondas R superficiales denominadas Rayleigh, que son el resultado de la combinación de los dos tipos de ondas P y S. Estas ondas generan movimientos elípticos retrógrados, en un plano determinado por la dirección de propagación y la normal a la superficie libre del sólido y no se propagan dentro del medio. A medida que nos ubicamos más profundamente, la elipse se va aplastando hasta que a una cierta profundidad degenera en un segmento y a partir de allí vuelve paulatinamente a tenerse un movimiento elíptico pero de sentido directo, propiedad conocida como evanescencia. Las amplitudes de estas ondas son máximas justo debajo de la superficie y decrecen rápidamente con la profundidad, en dependencia del módulo de Poisson y de la longitud de onda. La velocidad desciende con la profundidad, de modo que a una profundidad del orden de 1 a 2 veces la longitud de onda, son imperceptibles. Los casos señalados se pueden analizar a partir del estudio de la propagación de ondas, tanto en suelos perteneciente a un semiespacios infinito homogéneo, o estratificados.

Estos tres tipos de ondas viajan con diferentes velocidades y por ende se reciben en tres tiempos diferentes. Las ondas P son las primeras en ser registradas con una velocidad V_p seguida de las ondas S con velocidad V_S y por ultimo arriban las ondas Rayleigh con mayor amplitud y velocidad $V_R = \frac{0.87 + 1.12\neg}{1+\neg} V_s \,;\; 0.87 \prec \frac{V_R}{V_s} \prec 0.96$

Para un semi-espacio elástico excitado por una carga vertical oscilatoria normal a la superficie, el 67% de la energía total corresponde a las ondas Rayleigh, el 26% a las ondas S, y el 7% a las ondas P.



Fuente: Shamsher Prakash "Soil Dynamics and Modeling Including Wave Propagation and Damage to Structures." 1995

Posteriores estudios sobre propagación de ondas superficiales, realizados por el geofísico y matemático británico Augustus Edward Hough Love (1863-1940), [16] – conocido por sus trabajos en la teoría matemática de elasticidad, y en la propagación de ondas – quien predijo matemáticamente en 1911, que también en la superficie libre de los cuerpos sólidos se propaga una onda polarizada horizontalmente en el plano de la superficie y que implica una oscilación de la partícula en el sentido normal a la dirección de propagación con un movimiento elíptico. Las ondas de Love, denominadas así en su honor, son el resultado de la interferencia de numerosas ondas del tipo S propagadas por una capa elástica superficial sin otra capa exterior, situada por encima de otro medio elástico y se transmiten con una velocidad más baja que las P o las S, pero más rápida que las ondas Rayleigh. Por haber sido primeramente observada por Gutenberg, también se la conoce como onda G.

En 1924, el físico británico Robert Stoneley (1894 - 1976).[17] demostró que cuando dos cuerpos elásticos se superponen, por la superficie de contacto de ambos se propaga una onda como la de

Rayleigh, polarizada en un plano determinado por la normal a la superficie de contacto y la dirección de propagación de la perturbación. El movimiento de oscilación de la partícula es retrogrado. Este tipo de ondas Stoneley de interfase, o de superficie, de gran amplitud, es generada por un dispositivo sónico en un pozo, y pueden propagarse a lo largo de una interfase sólido-fluido, así como a lo largo de las paredes de un pozo lleno de fluido, siendo los últimos arribos de una fuente monopolar y constituye la principal componente de baja frecuencia de la señal generada por fuentes sónicas en un pozo. El análisis de las ondas de Stoneley es de mucha utilidad en las localizaciones de fracturas y de la permeabilidad de formaciones, y constituye una fuente importante de ruido en los perfiles sísmicos verticales.

Para el análisis de las formaciones homogéneas, se recurre a la propagación ondulatoria, según la teoría de la elastodinámica del semi-espacio elástico. Mientras que para las formaciones estratigráficas heterogéneas con propiedades diferentes, se dispone del análisis de refracción y reflexión que experimentan las ondas de cuerpo P a su llegada a la superficie de contacto de acuerdo con la ley de Snell, considerando la división de la energía originada en el punto de incidencia, y la descomposición de las ondas P y S al arribar a la superficie de campo libre.

En este trabajo no pretende cubrir el estado del conocimiento en propagación de ondas, sino simplemente presentar los fundamentos que se requieren para el manejo de los conceptos fundamentales que se tratan en la dinámica de suelos. En primer lugar se indicarán los tipos de ondas elásticas existentes en un medio infinito, posteriormente se analizará la propagación de ondas en un medio semi-infinito con características tanto homogéneas como las correspondientes a un medio estratificado.

Un problema básico importante y útil para el análisis de la propagación de las ondas en los suelos, es el problema de un semi- espacio elástico cargado en su superfície por una carga dependiente del tiempo. La carga puede fluctuar sinusoidal mente con el tiempo, o puede aplicarse en un tiempo muy corto, y luego permanecer constante. Para el caso de una carga de pulso concentrada la solución há sido dada primero por Lamb (1904) y luego por otros, como Pekeris (1955) y De Hoop (1960). Todas estas soluciones son matemáticamente bastante complejas, sin embargo. Por lo tanto, se hará un enfoque simplificado, en el que el problema

elástico se aproxima sin tener en cuenta los desplazamientos horizontales y, por lo tanto, se considerarán solamente los desplazamientos verticales. Esta aproximación fue sugerida por primera vez por Westergaard (1936), y se denota como elasticidad confinada. Se há demostrado en el capítulo anterior que este método aproximado da muy buenos resultados para los problemas elastostáticos del mismo tipo. La extensión a los problemas de La elastodinámica fue sugerida por primera vez por Barends (1980). Mediante la elastodinámica los aspectos más importantes de las soluciones, como la magnitud de los desplazamientos verticales, y el efecto de la amortiguación, se puede aproximar razonablemente bién. La solución de estos problemas serán utilizados como elementos básicos para el análisis de vibracion de la fundación.

Posteriormente, se presentará la solución completa de algunos problemas de elastodinámica de un semi-espacio (o medio plano), utilizando métodos desarrollado por Pekeris (1955) y De Hoop (1960). Estos incluyen las soluciones para una carga lineal y una carga puntual sobre la superficie de una semi-espacio elástico.

Como introducción a las soluciones de problemas particulares, se presenta algunos aspectos generales de la propagación de las ondas en médios elásticos homogéneos, con una breve introducción de las ondas de compresión y las ondas de corte, que son importantes en la solución de muchos problemas. Tambem se dá una descripción general de las ondas de Rayleigh, que aparecen en problemas a del semiespacio, y que son los principales responsables del daño causado por los terremotos.

Las respuestas del suelo ante solicitaciones dinámica son en términos generales muy complejas. Normalmente el suelo está compuesto de una estructura formada por una combinación de diferentes materiales, bien sea esta sólida o porosa ocupada parcialmente por agua. Estas características conducen a que el suelo tenga un comportamiento anisótropo y no lineal, exhibiendo un acoplamiento entre la estructura sólida y el agua para condiciones de saturación total o parcial. Ante la presencia de suelos secos no cohesivos, suele despreciarse el comportamiento no lineal y admitirse un comportamiento elástico lineal.

Aquí se presentan los fundamentos matemáticos sobre la propagación de ondulatoria para suelos de naturaleza homogénea e isótropa, en ausencia de fuerzas de volumen, asumiendo las hipótesis de pequeñas deformaciones y comportamiento elástico lineal. Valiéndose del recurso matemático

analítico, se demuestra que la propagación de las ondas puede descomponerse en un movimiento longitudinal y otro transversal al frente de onda.

Para el caso estudiado de un semiespacio homogéneo u horizontalmente estratificado, el movimiento transversal puede ser descompuesto en un movimiento transversal paralelo y normal a la superficie de campo libre, lo que permite desacoplar las ecuaciones simplificando su solucion.

La determinación de las propiedades dinámicas del suelo, requiere de métodos de exploración como el método sísmico de refracción y el análisis sísmico de las ondas superficiales (SASW). Ambos métodos requieren de la medición de la respuesta del suelo en diferentes puntos excitados por un impulso. “Mediante el método sísmico de refracción se puede determinar la velocidad de las ondas P en un suelo estratificado. Éste se basa en medir los tiempos de llegada de las ondas primarias (P) a cada uno de los puntos de medida. Las primeras ondas en registrarse son las ondas P directas para los puntos más cercanos a la fuente, mientras que para los más alejados suelen ser las P refractadas. Esto se debe a que normalmente las capas inferiores suelen poseer unas velocidades de propagación mayores, luego la mayor distancia que deben recorrer las ondas refractadas se compensa con la mayor velocidad de las mismas. De esta forma, se obtiene una curva lineal a trozos que relaciona el tiempo de llegada de las ondas P a cada uno de los puntos de medida. La estratigrafía de la velocidad de las ondas P se calcula al resolver un problema inverso teórico. Por otra parte, mediante el método SASW se puede determinar la velocidad de las ondas S y el amortiguamiento de un suelo estratificado. Éste método se basa en el carácter dispersivo de las ondas superficiales en un semiespacio estratificado”. [18]

Serán establecidas las ecuaciones del movimiento ondulatorio para suelos en los que se supone un comportamiento homogéneo, elástico y lineal. Esta suposición restrictiva, puede aplicarse a una gran variedad de suelos, considerando que la heterogeneidad puede ser tenida en cuenta mediante la unión de diferentes estratos homogéneos. Las ecuaciones del movimiento se obtienen por simple aplicación de la teoría de la elasticidad bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y desplazamiento, planteadas en coordenadas cartesianas, las que a conveniencia pudiesen extrapolarse a coordenadas cilíndricas o esféricas.

En el medio definido, sólo se pueden propagar los dos tipos de ondas que corresponden a las dos únicas soluciones que se obtienen de las ecuaciones de movimiento, llamadas ondas de compresión, primarias de dilatación, y las conocidas como ondas cortantes secundarias o distorsionales. En un medio semi-infinito la superficie de campo libre constituye una frontera que permite obtener una tercera solución a las ecuaciones de movimiento para un tercer tipo de ondas superficiales conocidas como ondas Raleygh, que producen en las partículas movimientos elípticos, y cuyas amplitudes decrecen rápidamente con la profundidad.

En los problemas de propagación de ondas, el suelo generalmente se modela como un material viscoelástico cuyas propiedades elásticas son caracterizadas mediante las constantes de Lamé, las que dependen del módulo de elasticidad y de la relación de Poisson. El estudio de las perturbaciones ondulatorias se basa en la teoría de la elasticidad, fundamentalmente en las ecuaciones de Navier.

Durante su propagación en el medio, la onda sufre pérdida de energía y se atenúa, y su amplitud decrece con la distancia. La atenuación de las ondas se produce por amortiguamiento geométrico, el que depende de la propagación y del tipo de ondas. Para ondas que se propagan en un frente semi-esférico, la amplitud decrece en proporción con la distancia a la fuente $1/r$. Las amplitudes de las ondas superficiales que se propagan con frentes de ondas cilíndricos, decrecen con $1/r^2$. En lo que respecta a la atenuación geométrica de las ondas longitudinales y de corte a lo largo de la superficie libre, no es posible una analogía con casos anteriores, pero se puede demostrar que debido a la fuga de energía en el espacio libre, la atenuación de desplazamiento varia con el cuadrado de la distancia (Richart et al., 1970). En resumen para un semi-espacio elástico lineal una ley de potencia simple del siguiente tipo puede expresar el amortiguamiento por radiación radiación en la amplitud de las ondas:

$$\frac{1}{r^n} \rightarrow n = \begin{cases} 2 & \text{Para ondas longitudinales y transversales en la superficie} \\ 1 & \text{Para ondas de cuerpo en el sólido} \\ 1/2 & \text{Para ondas Rayleigh} \end{cases}$$

Los modelos analíticos más empleados para el amortiguamiento del material, son el amortiguamiento viscoso y el amortiguamiento histerético. El amortiguamiento viscoso consiste en una fuerza disipativa que depende linealmente de la frecuencia mediante el factor $-i\mu$. Mientras que en el amortiguamiento histerético, la disipación de la energía mecánica es independiente de la frecuencia. Para ambos tipos de amortiguamiento, las fuerzas disipativas están desfasadas el valor ® respecto a la velocidad de las partículas excitadas.

La propagación ondulatoria puede ser tratada en el dominio del tiempo, o de la frecuencia. La relación entre ambos dominios se establece mediante la transformada de Fourier. Las técnicas para estudiar la propagación de ondas en medios elásticos, se agrupan en analíticas y numéricas. Las soluciones analíticas son el recurso más rápido y de fácil manejo y se emplean para problemas simples. Para problemas más complejos se dispone de técnicas numéricas como el método de los elementos de contorno, el método de las diferencias finitas, el método de los elementos finitos, y otros métodos semianalíticos como el thin layer, el layer-transfer-matrix y el método pipe-in pipe.

2.2 Evolución historiográfica de la teoría de la elasticidad.

La teoría moderna de la elasticidad se originó en 1821 cuando Navier presentó por vez primera el equilibrio y el movimiento de un sólido elástico.

Para entender la evolución de nuestras concepciones modernas sobre elasticidad, y dada su importancia en el estudio de las perturbaciones transitorias y estacionarias, es necesaria una mirada retrospectiva a las investigaciones de los siglos XVII y XVIII, cuando el conocimiento experimental permitió formular algunos principios básicos que rigen el comportamiento de los cuerpos deformables.

La primera referencia que se tiene sobre elasticidad en la cultura occidental, es el segundo diálogo de la "*Discorsie Dimostrazioni matematiche*" de Galileo Galilei (1638). Aunque en este diálogo Galileo no estableció relaciones matemáticas entre esfuerzo y deformación, el conocido

problema de Galileo, marcó un hito y abrió nuevas perspectivas y motivaciones para muchos investigadores que le sucedieron. La historiografía de la evolución de la teoría de la elasticidad desde Galileo (1639) hasta Saint Venant (1850), puede consultarse en el Tomo I de la obra de Todhunter y Pearson 1886. [19]

Sin duda, el próximo gran hito en la teoría iniciada por Galileo, es el descubrimiento de la ley de Hooke en 1660 y publicada hasta 1676. Esta ley proporcionó la base experimental necesaria para la teoría. En 1678 formuló esta ley de la siguiente manera: "Ut tensio sic vis ", es decir, el poder de cualquier resorte está en la misma proporción que la tensión en el mismo'. Por tensión Hooke entendió, mientras procedía a explicar, lo que ahora llamamos extensión. Hooke probablemente no aplicó esta ley para resolver el problema de Galileo. Esta aplicación fue hecha por Mariotte, quien descubrió la misma ley de forma independiente en 1680. Hooke en Inglaterra y Mariotte en Francia se apropiaron del descubrimiento experimental de lo que ahora se denomina como las relaciones esfuerzo-deformación.

En el intervalo entre el descubrimiento de la ley de Hooke y la formulación de las ecuaciones diferenciales generales de elasticidad realizadas por Navier, la atención de los investigadores en la teoría de la elasticidad se dirigió principalmente a la solución y extensión del problema de Galileo, las teorías relacionadas de la vibración de barras y placas, y la estabilidad de las columnas. Muchos matemáticos y físicos famosos, tales como James Bernoulli, Daniel Bernoulli, Euler, Lagrange, Coulomb, Young, tomaron parte en estas investigaciones. Aunque muchos problemas especiales fueron resueltos durante este período, sus investigaciones no condujeron a generalizaciones amplias. La situación se complicó principalmente por problemas no resueltos relativos a la constitución de los cuerpos. De acuerdo con la concepción newtoniana, los cuerpos materiales están formados por pequeñas

La idea de rari- constantes materiales proviene de los primeros trabajos de Navier [1827] y su modelo de materia, conocido como teoría molecular, primero presentado en Academie des Sciences el 14 de mayo de 1821. Básicamente, el modelo propuesto por Navier tiene como objetivo explicar el comportamiento de los sólidos elásticos como el de un entramado de partículas (moléculas) que interactúan juntas a través de fuerzas centrales proporcionales a su distancia mutua. Esta no es una idea nueva: tiene su última base en los trabajos de Newton [1687].

Newton consideraba que las moléculas tenían tamaños finitos y formas definidas. Sin embargo, sus sucesores simplificaron gradualmente las moléculas en puntos materiales. La concepción de puntos materiales resultó ser muy útil en muchas ramas de la mecánica. Sin embargo, su aplicación a los problemas de elasticidad a menudo condujo a resultados simplificados. En particular, la concepción del punto material entre los cuales actúan las fuerzas centrales, conduce a un menor número de constantes elásticas de las que son realmente necesarias para describir los medios. Navier (1785–1836) fue el primero en investigar las ecuaciones generales de la teoría de elasticidad, contenidas en sus memorias a la Academia de París de 1821. Basó sus análisis en la concepción newtoniana molecular de la constitución de los cuerpos, y asumió que las reacciones elásticas surgen de las variaciones en las fuerzas intermoleculares que son debidas a cambios en la configuración molecular. Él consideró las moléculas como puntos materiales, y asumió que la fuerza entre dos moléculas, cuya la distancia aumenta ligeramente, es proporcional al producto del incremento de la distancia y alguna función de la distancia inicial. Su método consistió en ir formando una expresión para las fuerzas que actúan sobre una molécula desplazada. Las ecuaciones fueron así obtenidas en términos de los desplazamientos de la molécula. Navier asumió que el material era isotrópico, y las ecuaciones de equilibrio y vibración para contener una sola constante. Ahora sabemos que un medio isótropo es caracterizado por dos constantes elásticas. Esto demuestra las simplificaciones que surge de la concepción de los puntos materiales y las fuerzas centrales que actúan entre ellos.

Por lo que se refiere a la mecánica de sólidos, el verdadero iniciador de la teoría molecular se considera que es Boscovich [1743]; otros trabajos sobre este tema, antes del memoire de Navier, son aquellos de Poisson [1811, 1814] en el equilibrio de las placas flexadas, mientras que las contribuciones fundamentales se deben a Cauchy [1828], Poisson [1829] y a Saint-Venant [1844].

La idea básica en el enfoque molecular clásico de Navier y Cauchy, o sea el continuo como un límite de una red discreta de partículas que interactúan juntas a través de fuerzas centrales, tiene una consecuencia directa, requiriéndose 15 módulos para describir el comportamiento de un cuerpo completamente anisotrópico en 3D, y solo un módulo para determinar el de un material isótropo. Estos resultados no fueron confirmados por pruebas experimentales, por lo que las dudas pendían sobre su validez, hasta que el enfoque molecular fue completamente ignorado por la teoría propuesta en 1837 por Green [1839] quien argumentaba que no había fundamentos para

asumir que la estructura microscópica de la materia fuese considerada como un continuo, dado que la propiedad básica que define el comportamiento elástico es energética y que en los procesos no disipativos las fuerzas internas derivan de un potencial cuadrático.

Las consecuencias de tal suposición conducen al modelo multi-constante, en el que 21 módulos independientes son necesarios para describir la respuesta elástica de un cuerpo completamente anisotrópico en 3D, que se reduce a solo 2 para un material isotrópopico. Los resultados de la teoría de Green fueron confirmados por la experiencia la que junto con sus antecedentes teóricos mucho más simples, aseguró el éxito de la teoría de constantes múltiples. No obstante, la diatriba entre las teorías moleculares, rari-constantes y multi-constantes continuas, duró un largo período.

Los desarrollos posteriores del modelo molecular desarrollados por Voigt [1887] y Poincarée [1892] son modelos que han enriqueciendo de diferentes maneras el modelo original de Navier, para obtener teorías multi-constante a partir de un modelo molecular. Más recientemente, ideas inspiradas en el enfoque de Navier-Cauchy han producido modelo de dinámica molecular para explicar el comportamiento de cuerpos complejos. Como un efecto de esta discusión, los dos modelos generalmente se consideran como opuestos y algo irreconciliables, aunque diferentes investigadores han intentado mostrar que este no es el caso.

2.3 Historiografía de la teoría matemática de la elastodinámica.

En el año de 1822, Cauchy había enunciado la mayoría de los recursos analíticos de la teoría pura de la elasticidad, introduciendo la noción de esfuerzo puntual, el que supone está completamente determinado si las fuerzas por unidad de área a través de todos los elementos del plano a través del punto eran conocidas. Cauchy demostró que, bajo suposiciones simples, estas fuerzas podrían expresarse en términos de seis componentes de esfuerzo, de manera semejante a la concepción actual del esfuerzo en mecánica del medio continuo. Cauchy también había expresado el estado de esfuerzo cerca de un punto en términos de seis componentes de esfuerzos y determinó las ecuaciones del movimiento. Asumiendo relaciones lineales esfuerzo-deformación, Cauchy derivó la forma especial de estas ecuaciones para cuerpos sólidos isotrópicos. Los métodos utilizados en

estas investigaciones fueron bastante diferentes de los de las memorias de Navier. En particular, no se utilizó la hipótesis del punto material y fuerzas centrales. Las ecuaciones resultantes difieren de las de Navier en un aspecto importante, es decir, las ecuaciones de Navier contienen una sola constante elástica, mientras que las ecuaciones de Cauchy ya contienen dos de esas constantes. [20]

La primera memoria de Poisson sobre los problemas de elasticidad fue leída ante la Academia de París en 1828. Poisson obtuvo las ecuaciones de equilibrio y movimiento de sólidos elásticos isotrópicos que eran idénticos a los de Navier. La memoria es muy notable por sus numerosas aplicaciones de la teoría general a problemas especiales. Cauchy y Poisson, así como otros investigadores, aplicaron la teoría de elasticidad, sobre la base de puntos materiales y fuerzas centrales, a muchos problemas de vibraciones y de elasticidad estática. Sus aportes proporcionaron los recursos teóricos que más tarde fueron corroborados experimentalmente

Poisson en 1831 usó su teoría para investigar la propagación de las ondas a través de un sólido elástico isotrópico de extensión ilimitada, demostrando que dos tipos de ondas con diferentes velocidades podrían propagarse en dicho medio. Encontró que, a una gran distancia de la fuente de perturbación, el movimiento transmitido por la onda más rápida era longitudinal, y el movimiento más lento era debido a la onda transversal.

Luego Stokes en 1849 demostró que la onda más rápida era de dilatación irrotacional, y la onda más lenta era equivolumétrica de distorsión, caracterizada por la rotación diferencial de los elementos del cuerpo. Stokes también derivó las fórmulas bien conocidas para las velocidades de las dos ondas P, $V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}$ y S $V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$. Stokes también demostró que los dos tipos de ondas eran nítidamente definidas a una distancia suficientemente grande de la región inicialmente perturbada, y que a distancias más cortas se superponen durante parte del tiempo.

Green en 1839 buscó una nueva fundamentación paran la teoría, que fuese diferente a la hipótesis de puntos materiales y fuerzas centrales en las que hasta entonces se basaba. A partir de lo que ahora se llama el principio de la conservación de la energía, propuso un nuevo método para obtener las ecuaciones de elasticidad. Derivó la energía potencial del cuerpo elástico deformado, expresada en términos de componentes de las deformaciones, y luego se aplicaron los métodos

que se utilizan en mecánica analítica. Green afirmó que este enfoque parecía ser más aplicable, especialmente a los problemas que se relacionan con los movimientos de los sistemas compuestos por un inmenso número de partículas que actúan mutuamente una sobre sobre la otra. Dedujo las ecuaciones de elasticidad, que para el caso general contienen 21 constantes. En el caso de isotropía hay dos constantes, y las ecuaciones son las mismas que las primeras contenidas en las memorias de Cauchy. La revolución que generara Green en los elementos de la teoría, es comparable en importancia con la producida por el descubrimiento de Navier de las ecuaciones generales. Kelvin apoyó la existencia de la función de energía de deformación de Green sobre la base de la primera y segunda leyes de la termodinámica.

Los métodos de Navier, de Poisson y de las memorias posteriores de Cauchy, condujeron a ecuaciones del movimiento con menos constantes que las contenidas en las ecuaciones obtenidas en la primera memoria de Cauch, y por los métodos de Green. Las preguntas en disputa eran si la anisotropía elástica se caracterizaba por 21 constantes o por 15, y si la isotropía elástica que se caracterizaría por dos constantes o por una. Las dos teorías se llamaron teoría de "multi-constantes" y la teoría "rari-constante [21] respectivamente. [Todhunter and Pearson, 1886, p. 496] La importancia de la discrepancia fue enfatizada por primera vez por Stokes en 1845, quien hizo la observación de que resistencia a la compresión y resistencia al corte son los dos tipos fundamentales de resistencia elástica, y definitivamente introdujo los dos principales módulos de elasticidad. Parámetros que ahora se denominan como el módulo de compresibilidad y el módulo de rigidez. También se prestó mucha atención a la relación de contracción lateral a extensión longitudinal de una barra bajo carga de tracción, relación llamada coeficiente de Poisson. De su teoría, Poisson dedujo que esta relación debe ser 1/4. Sin embargo, los experimentos con algunos materiales no respaldaron este resultado. La evidencia experimental llevó a Lamé a adoptar también las ecuaciones multi-constantes, y después de la publicación de su libro en 1852 fueron generalmente adoptadas. Ya hemos mencionado el descubrimiento de Poisson de ondas longitudinales y ondas transversales que pueden propagarse a través del interior de un cuerpo sólido elástico.

En 1887, Lord Rayleigh descubrió que una onda específica se puede formar cerca de la superficie libre de un cuerpo homogéneo. Esta onda se propaga a lo largo de la superficie a una velocidad menor que una P; no penetra mucho debajo de la superficie porque su amplitud disminuye

exponencialmente con la profundidad; y está polarizada elípticamente en el plano determinado por la normal a la superficie y la dirección de propagación. En el trabajo de Lord Rayleigh, la superficie se consideraba un plano ilimitado, y las ondas podrían ser de cualquier longitud. La gravedad fue descuidada, y se encontró que la velocidad de la onda era independiente de su longitud. Tales ondas han sido denominadas como ondas de Rayleigh, en homenaje a quien las descubrió teóricamente. Love en 1911) las llamó "Rayleigh-waves", pero el guion fue omitido más tarde. Estas ondas pertenecen a la categoría de las llamadas ondas superficiales, ya que su propagación está prácticamente restringida a una determinada zona cerca de la superficie del medio. Una característica notable de la onda de superficie descubierta por Rayleigh es que la componente vertical en la superficie es más grande que la componente horizontal, en una relación $1.5:1$, si la relación de Poisson se toma como $1:4$. Esta relación parecía ser importante en aplicaciones sismológicas posteriores a la teoría de Rayleigh. En el documento citado Rayleigh comentó: *"No es improbable que las ondas superficiales aquí investigadas juegan un papel importante en los terremotos, y en la colisión de sólidos elásticos. Divergentes en dos dimensiones solamente, deben adquirir a una gran distancia de la fuente un aumento continuo preponderante."*

El científico alemán August Schmidt publicó un artículo en 1888 en el que discutió la propagación de ondas a través del interior de la Tierra. Él enfatizó que en general la velocidad de las ondas debe aumentar con la profundidad en la Tierra, y como como consecuencia de ésto, las trayectorias de deben ser curvas y dobladas hacia abajo. Casi al mismo tiempo, C. G. Knott en Inglaterra en 1899 [22] investigó la energía de las ondas reflejadas y refractadas. Hemos visto que los principales tipos de ondas que ahora se encuentran regularmente en sismogramas, habían sido descubiertas por los matemáticos mucho antes de que se obtuvieran registros sísmicos.

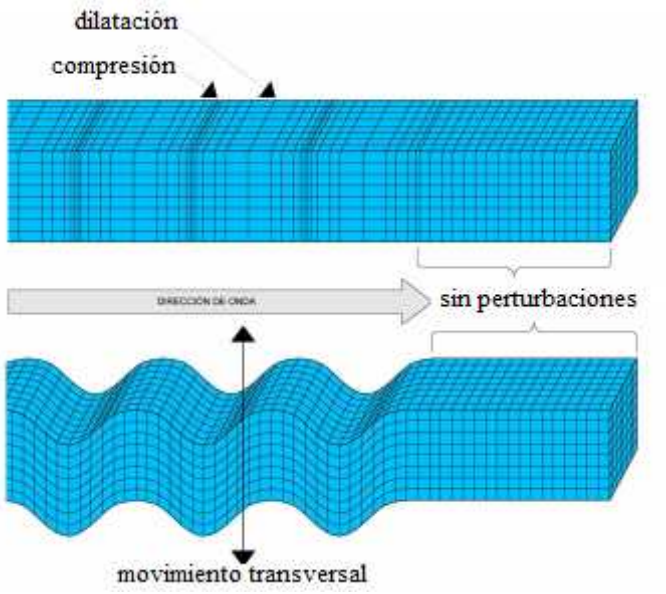
Estos son los principales hitos de la evolución histórica de la teoría elastodinámica, para alcanzar el desarrollo de esta disciplina en el presente.

2.4 Ecuaciones básicas de elastodinámica.

A como previamente se ha establecido, de la teoría de la elasticidad se desprende que existen dos tipos principales de ondas elásticas del cuerpo: Las ondas longitudinales, también llamadas compresionales, dilatacionales o irrotacionales, denominadas en sismología, como ondas P primarias, porque representan las primeras ondas que aparecen en los sismogramas. Estas ondas implican la compresión y la rarefacción del material a medida que atraviesan a través del medio, pero sin que ocurra rotación. Cada partícula del medio, a través del que la onda longitudinal está pasando, vibra alrededor de su posición de equilibrio en la dirección en que viaja la onda se propaga. Las ondas transversales, también llamadas ondas de cizallamiento, rotacionales u equivolumétricas, conocidas en sismología, como ondas S secundarias. Estas ondas implican cizallamiento y rotación del material a medida que lo atraviesan, pero no sin cambio de volumen. El movimiento de la partícula es perpendicular a la dirección de propagación.

La elastodinámica es el estudio de las ondas en un material elástico y tiene como objeto estudiar la alteración del equilibrio elastostático en un sólido por efecto del movimiento. Derivaremos las ecuaciones de movimiento para medios elásticos, prestando especial atención a las leyes de conservación subyacentes, centrándonos especialmente en las ondas elastodinámicas P y S que se propagan de forma uniforme e isotrópica y cuyas velocidades de fase son independientes de la frecuencia.

Para estas condiciones, las soluciones matemáticas se formulan en términos de ecuaciones diferenciales de ondas de segundo orden $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ en cuyo caso la velocidad de fase es la misma para todas las frecuencias.



Para los casos en existan condiciones de frontera impuestas por la geometría, o bien por efecto de la interacción de las ondas con el medio transmisor, se generan soluciones representando un tren de ondas, establecidas mediante ecuaciones no hiperbólicas. En cuyo caso la velocidad de propagación de las ondas dispersivas depende de la longitud de onda o de la frecuencia.

La principal aplicación de elastodinámica se encuentra en problemas de ingeniería estructural donde intervienen vibraciones que generalmente correspondientes al estado estacionario. Otra importante aplicación de elastodinámica es en sismología considerando que la tierra es en su mayoría un cuerpo sólido a través del cual las ondas sísmicas pueden propagarse.

El movimiento ondulatorio puede considerarse como un transporte de energía y cantidad de movimiento desde un punto del espacio a otro, sin transporte de materia. Las ecuaciones que gobiernan la propagación de las perturbaciones transitorias o estacionarias P y S a través de formaciones estratigráficas de suelos, pueden obtenerse a partir del equilibrio dinámico de una partícula prismática infinitesimal de suelo, con densidad ρ considerada representativa de un medio seminfinito isótropo u ortótropo, homogéneo, o estratificado horizontalmente, para el cual es válido expresar el movimiento bajo la suposición de que los desplazamientos y las velocidades son pequeños y que no actúan fuerzas externas, admitiendo además un comportamiento lineal elástico del material.

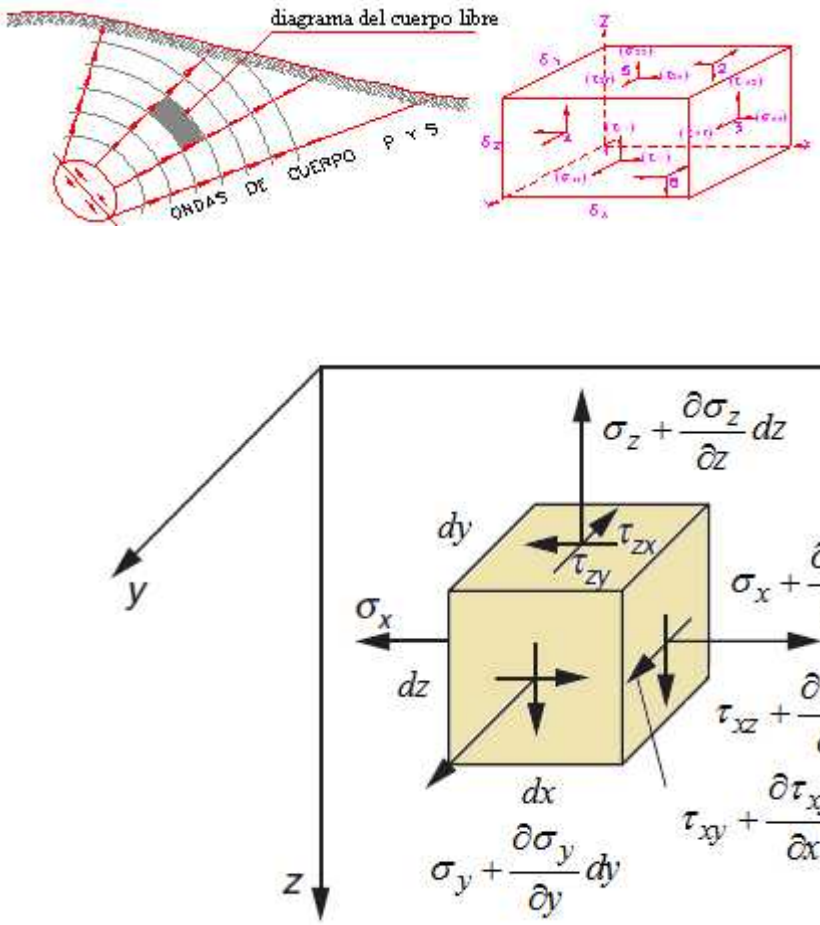


Fig. (2.1): Propagación de ondulatoria en un medio elástico y seminfinito de suelo.

A cada uno de los seis lados del cuerpo libre mostrado en la Fig. (2.1), le corresponde una componente de esfuerzos normales σ, y dos componentes de esfuerzos tangenciales τ debidos a la acción de continuidad ejercida por el medio circundante sobre el elemento aislado, cuyas dimensiones d_x, d_y, d_z son infinitesimales en relación a las dimensiones del semiespacio elástico, lo cual permite considerar que dichos esfuerzos están puntualmente aplicados en el centroide geométrico de cada lado, los que al desplazarse por efecto de la propagación de las ondas de cuerpo, provocan pequeñas variaciones en los esfuerzos elásticos (∂ σ, ∂ τ), las cuales son funciones continuas de cada punto del espacio coordenado (x, y, z).

Bajo estas condiciones, las ecuaciones básicas de la elastodinámica son las ecuaciones de Navier, que se extienden con un término de inercia. Estas ecuaciones serán determinadas a partir de la teoría de la elasticidad.

Basándonos en la teoría de elasticidad definimos la expansión volumétrica $£_{vol} = £$, como la superposición de las deformaciones unitarias ε debidas a los esfuerzos normales σ:

$$\left.\begin{aligned} £_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ £_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ £_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \rightarrow £ = £_x + £_y + £_z = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \qquad (2.1)$$

Y las deformaciones unitarias de cortante debidas a los esfuerzos tangenciales definen las ecuaciones de Cauchy

$$\begin{aligned} ¥_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ ¥_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \qquad (2.2) \\ ¥_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{aligned}$$

Los parámetros elásticos de Lamé se obtienen para cada material mediante las relaciones sencillas entre el módulo de elasticidad E y el módulo de Poisson υ expresadas mediante las Ecuaciones. (2.3) y (2.4).

$$ª = \frac{¬E}{(1+¬)(1-2¬)} \qquad (2.3) \qquad\qquad G = \frac{E}{2(1+¬)} \qquad (2.4)$$

G es llamado el módulo de rigidez en cortante.

Mediante los parámetros elásticos de Lamé, el estado de esfuerzos normales se puede expresar en términos de los componentes de desplazamiento mediante la forma generalizada de la ley de Hooke. Para un material isotrópico, podemos expresar los esfuerzos normales σ del cuerpo libre en función de los parámetros de Lamé (λ, G), de la expansión volumétrica ε y de las deformaciones unitarias $£_x, £_y, £_z$, empleando ecuaciones de elasticidad que relacionan esfuerzos con deformaciones:

$$\begin{aligned} \pm_x &= {}^a£ + 2G\frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \pm_y &= {}^a£ + 2G\frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \pm_z &= {}^a£ + 2G\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Por otro lado sabemos que en ausencia de fuerzas externas, los puntos del cuerpo libre experimentan aceleraciones en todas las direcciones, induciendo fuerzas inerciales que deben equilibrarse con las fuerzas elásticas centroidales mediante la aplicación del principio de D`Alembert, resultando el sistema de tres ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de Navier.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pm_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial^2 xy}{\partial y} + \frac{\partial^2 xz}{\partial z} - \circ\frac{d^2 u_x}{dt^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 yx}{\partial x} + \frac{\partial \pm_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial^2 yz}{\partial z} - \circ\frac{d^2 u_y}{dt^2} &= 0 \\ \frac{\partial \pm_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial^2 zy}{\partial y} + \frac{\partial \pm_{zz}}{\partial z} - \circ\frac{d^2 u_z}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \qquad (2.6)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \pm_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial^2 xy}{\partial y} & \frac{\partial^2 xz}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 yx}{\partial x} & \frac{\partial \pm_{yy}}{\partial y} & \frac{\partial^2 yz}{\partial z} \\ \frac{\partial \pm_{zx}}{\partial x} & \frac{\partial^2 zy}{\partial y} & \frac{\partial \pm_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} = \circ \frac{d^2}{dt^2} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$$

La solución del sistema de ecuaciones (2.6) de Navier en función de los desplazamientos, nos conduce a las ecuaciones dinámicas de Lamé mediante las cuales podemos resolver los problemas relacionados con los pequeños movimientos de cuerpos elásticos en términos de corrimientos, lo cual es más sencillo desde el punto de vista matemático al reducirse el número de incógnitas y de ecuaciones.

2.5 Ecuaciones de Lamé Cauchy y Navier para propagación de ondas de cuerpo en sólidos elásticos.

Por conveniencia operacional el sistema tridimensional de las Ecs (2.2), será resuelto sustituyendo las componentes de esfuerzos normales σ, y tangenciales τ, adoptando los corrimientos como incógnitas, para lo cual nos valdremos de las conocidas relaciones esfuerzo – deformaciones contenidas en la Ley de Hooke generalizada $\left(^2_{ij} = {}^a\Delta ¢_{ij} + 2G£_{ij} \right)$ las cuales se expresan del siguiente modo:

Deformaciones unitarias debidas a esfuerzos normales uniformemente distribuidos en cada lado del elemento:

$$
\begin{aligned}
£_x &= \frac{1}{E}\left[\pm_{xx} - \neg\left(\pm_{yy} + \pm_{zz}\right)\right] \\
£_y &= \frac{1}{E}\left[\pm_{xx} - \neg\left(\pm_{yy} + \pm_{zz}\right)\right] \qquad (2.7) \\
£_z &= \frac{1}{E}\left[\pm_{zz} - \neg\left(\pm_{xx} + \pm_{yy}\right)\right]
\end{aligned}
$$

Las distorsiones debidas a esfuerzos cortantes actuando en cada lado del elemento, de acuerdo con el sistema de ecuaciones (2), pueden expresarse del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
¥_{xy} &= \frac{1}{G}{}^2{}_{xy} = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\
¥_{yz} &= \frac{1}{G}{}^2{}_{yz} = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \qquad (2.8) \\
¥_{xz} &= \frac{1}{G}{}^2{}_{xz} = \frac{1}{G}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

Los esfuerzos tangenciales τ, son entonces los siguientes:

$$
\begin{aligned}
{}^2{}_{xy} &= G¥_{xy} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \\
{}^2{}_{yz} &= G¥_{yz} = G\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \qquad (2.9) \\
{}^2{}_{xz} &= G¥_{xz} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

Los sistemas de ecuaciones (2.5) y (2.9), que establecen las relaciones elásticas para los esfuerzos normales y tangenciales, mediante los parámetros de elásticos de Lamé, pueden condensarse

mediante la siguiente notación matricial, expresión que constituye las denominadas ecuaciones de Lamé para materiales isótropos en la que interviene la deformación volumétrica y las distorsiones por cortante.

Las Ecuaciones de Lamé cumplen un importante papel dado que contienen premisas de carácter mecánico, geométrico y físico que caracterizan las propiedades elásticas y la densidad del cuerpo sobre los cuales se basa la teoría de la elasticidad, y permiten la posibilidad de resolver una serie de problemas muy importantes sobre sólidos elásticos.

$$\begin{Bmatrix} \pm_{xx} \\ \pm_{yy} \\ \pm_{zz} \\ ²_{xy} \\ ²_{xz} \\ ²_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2G & a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a+2G & a & 0 & 0 & 0 \\ a & a & a+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} £_x \\ £_y \\ £_z \\ ¥_{xy} \\ ¥_{xz} \\ ¥_{yz} \end{Bmatrix} \qquad (2.10)$$

Estas ecuaciones expresan las condiciones del movimiento del cuerpo elástico, contienen las características geométricas de las deformaciones y los factores físicos λ, G y ρ que caracterizan las propiedades elásticas y la densidad del cuerpo.

Las ecuaciones (2.5) y (2.9), pueden escribirse en términos de las funciones u_x u_y u_z que describen las características geométricas de las deformaciones, mediante las ecuaciones lineales de Cauchy (2.1) y (2.2):

$$\pm_{xx} = {}^{a}\pounds + 2G\frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad {}^{2}_{xy} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \quad {}^{2}_{xz} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

$$\pm_{yy} = {}^{a}\pounds + 2G\frac{\partial u_y}{\partial y} \quad {}^{2}_{yx} = G\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \quad {}^{2}_{yz} = G\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \qquad (2.11)$$

$$\pm_{zz} = {}^{a}\pounds + 2G\frac{\partial u_z}{\partial z} \quad {}^{2}_{zx} = G\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \quad {}^{2}_{zy} = G\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

La primera de las ecuaciones del sistema (11), se diferenciará respecto a x**,** la segunda respecto a y, y la tercera respecto a z, resultando el siguiente sistema de ecuaciones**:**

$$\frac{\partial \pm_{xx}}{\partial x} = {}^{a}\frac{\partial \pounds}{\partial x} + G\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^{2}_{xy}}{\partial y} = G\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y}\right) \quad \frac{\partial^{2}_{xz}}{\partial z} = G\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) \qquad (2.12)$$

Ahora llevaremos el sistema de ecuaciones (2.12), a la primera ecuación del sistema de ecuaciones (2.66) de Navier, resultando:

$${}^{a}\frac{\partial e}{\partial x} + G\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z}\right) + G\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right) - {}^{\circ}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.13)$$

La ecuación (2.13), contiene las siguientes transformaciones:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial e}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \nabla^2 u_x$$

Las cuales permiten reescribirla del modo siguiente:

$$(\text{ª} + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u_x - \text{°}\,\frac{\partial u_x}{\partial t^2} = 0$$

Procediendo de modo semejante con las dos restantes ecuaciones del sistema (2.6) de Navier, lo que puede realizarse mediante permutaciones cíclicas de los sub índices, obtenemos otras dos ecuaciones con estructura semejante a la ya obtenida, las que en conjunto constituyen las ecuaciones fundamentales de la teoría de la elasticidad, debidas a Navier, para determinar los corrimientos debidos a la propagación de las perturbaciones ondulatorias en el suelo, considerado como un sólido elástico.

$$\begin{aligned}
(\text{ª} + G)\frac{\partial £}{\partial x} + G\nabla^2 u_x &= \text{°}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\
(\text{ª} + G)\frac{\partial £}{\partial y} + G\nabla^2 u_y &= \text{°}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \qquad (2.14) \\
(\text{ª} + G)\frac{\partial £}{\partial z} + G\nabla^2 u_z &= \text{°}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}
\end{aligned}$$

Estas ecuaciones expresan:

1. Las condiciones de equilibrio o movimiento para cada punto del cuerpo.

2. Las características geométricas de las deformaciones $u_x \;\; u_y \;\; u_z \;\; e_{vol}$.

3. Los factores físicos de Lamé, λ, G, ρ que caracterizan las propiedades elásticas del cuerpo y su densidad

Donde $\vec{\mathbf{u}}$ es el vector de desplazamientos del cuerpo libre mostrado en la Fig. (2.1), cuyas componentes referidas al sistema cartesiano (x, y, z) son:

$$\vec{\mathbf{u}}_x = u(x,y,z) \quad \vec{\mathbf{u}}_y = u(x,y,z) \quad \vec{\mathbf{u}}_z = u(x,y,z)$$

∇^2 Es el operador de Laplace para la función (u), recurso matemático fundamental para describir la naturaleza del fenómeno ondulatorio, se trate de la propagación de una onda en una cuerda, la tensión en una membrana, o bien la propagación de ondas sísmicas en medios considerados como homogéneos e isótropos, estratificados horizontalmente y modelados como vigas de cortante, los cuales están regidos por la ecuación diferencial de onda, la que en coordenadas cartesianas es la siguiente:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (2.15)$$

Si al conjunto de ecuaciones (2.14), aplicamos el artificio antes empleado con el sistema de ecuaciones (2.11), esto es derivar la primera de las ecuaciones respecto a x la segunda respecto a y, y la tercera respecto a z, considerando que ρ es constante para cada estrato de suelo y que $u_x(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\circ \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right) = \circ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \qquad (2.16)$$

Dos ecuaciones semejantes a la (2.16), resultaran al sustituir x por y, y por z, después de sumar las diferenciaciones indicadas obtenemos la ecuación siguiente:

$$\left(\text{ª} + 2G\right)\left(\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2}\right) = \circ \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \qquad (2.17)$$

$$\text{O bien: } \left(\frac{\text{ª} + 2G}{\circ}\right)\nabla^2 £ - \frac{\partial^2 £}{\partial t^2} = V_p{}^2 \nabla^2 £ - \frac{\partial^2 £}{\partial t^2} = 0 \qquad (2.18)$$

Donde $V_p{}^2 = \left(\frac{\text{ª} + 2G}{\circ}\right)$ es la velocidad de las ondas de cuerpo longitudinales, movimiento que ocurre únicamente con expansión volumétrica $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ expresado por la conocida como ecuación de ondas de expansión P.

$$\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = \left(\text{ª} + 2G\right)\nabla^2 e \qquad (2.19)$$

$$\left(\frac{\text{ª} + 2G}{\circ}\right)\nabla^2 £ - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 £ - \frac{1}{V_p}\frac{\partial^2 £}{\partial t^2} = 0$$

$V_p{}^2 = \frac{\text{ª} + 2G}{\circ}$ Es la velocidad de propagación de los trenes de ondas primaria P, la que es dependiente del parámetro elástico ª de Lamé, del módulo de rigidez en cortante G, y de la densidad ρ del medio de propagación.

Si ahora derivamos la tercera ecuación del sistema (2.14), respecto a y, y la segunda ecuación respecto a z, y restando una de la otra, obtenemos la siguiente ecuación:

$$G\nabla^2\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)=\circ\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right) \qquad (2\text{-}20)$$

Definimos el vector rotacional $\{\boldsymbol{\Omega}\}=\left\{\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z\right\}$ cuyas componentes son:

$$\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}=2\Omega_x \quad \frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}=2\Omega_y \quad \frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}=2\Omega_z \qquad (2.21)$$

La Ec. (2.17) puede reescribirse en términos de $\{\boldsymbol{\Omega}\}$ sustituyendo $\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}=2\Omega_x$ las otras dos ecuaciones que completan el sistema las obtenemos mediante permutaciones cíclicas de esta ecuación, o sea:

$$\frac{\partial^2\Omega_x}{\partial t^2}=\frac{G}{\circ}\nabla^2\Omega_x \quad \frac{\partial^2\Omega_y}{\partial t^2}=\frac{G}{\circ}\nabla^2\Omega_y \quad \frac{\partial^2\Omega_z}{\partial t^2}=\frac{G}{\circ}\nabla^2\Omega_z \qquad (2.22)$$

O bien en forma general: $$\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}=\frac{G}{\circ}\nabla^2\Omega \qquad (2.23)$$

La ecuación (23) describe el movimiento ondulatorio de distorsión debidos a las ondas secundarias de cortante S.

Las ecuaciones que muestran estructuras semejantes a las de las Ecs (2.19) y (2.23), representan la forma más general de la ecuación de los dos tipos de ondas de cuerpo tridimensionales P y S propagándose en un medio homogéneo, elástico e isótropo.

Los coeficientes:

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (2.24) \qquad V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (2.25)$$

Representan las velocidades de propagación de estos dos tipos de ondas de sumo interés para la ingeniería sísmica y para estudiar las perturbaciones inducidas al suelo por maquinarias vibratorias. Estas son las previamente referidas como ondas de cuerpo de expansión (P) y ondas de distorsión (S) de deslizamiento equivolumétrico, y son dependientes de las propiedades elásticas (λ, G) y de la densidad del medio ρ, e independientes de la forma de las ondas.

Para las ondas compresionales, el movimiento de las partículas tiene la misma dirección en que se propagan, mientras que en las ondas cortantes los movimientos de las partículas son perpendiculares a la dirección de su propagación. La relación entre las velocidades de estas dos clases de ondas está dada por la expresión:

$$\frac{V_p}{V_s} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{(1-2\nu)}} \quad \text{Por tanto} \quad V_p \succ V_s$$

Si se logran integrar las ecuaciones (16) y (20), quedarían determinados en todas partes la dilatación cúbica $\{\mathbf{e}\}$, es decir la divergencia del vector de traslación $\vec{\mathbf{u}} = u(u_x, u_y, u_z)$ y el vector de rotación $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$, lo cual significa que conociendo $\{\vec{\mathbf{e}}\}$ y $\{\boldsymbol{\Omega}\}$ queda determinado el vector $\{\vec{\mathbf{u}}\}$, lo que equivale a determinar los corrimientos del campo para todos los puntos (x, y, z) del espacio elástico.

Las ondas longitudinales P producen oscilaciones en el mismo sentido de la propagación. Esto produce cambios oscilatorios de densidad del medio debido a la compresión y a la dilatación del

material constitutivo del medio transmisor. Las ondas transversales S se propagan produciendo movimientos perpendiculares a la dirección de propagación.

2.6 Verificación de las ondas irrotacionales equivolumétricas.

Por su importancia para el estudio de vibraciones estacionarias generadas por maquinarias, y para la ingeniería sísmica, estudiaremos por separado estos dos casos propagación ondulatoria en medios sólidos homogéneos elásticos

1. Caso en que los corrimientos **u** tienen potencial, lo cual significa que las componentes del vector **u**(x, y, z) admiten derivadas de una función particular $\ddot{} = \ddot{}(x, y, z)$

Puede demostrarse por sustitución, que las ecuaciones diferenciales del sistema (2.14) que plantean el equilibrio en términos de los desplazamientos, es satisfecha por el siguiente sistema de ecuaciones armónicas:

$$u_x = \ddot{}_1 - \sim \frac{\partial}{\partial x}\left(\ddot{}_0 + x\ddot{}_1 + y\ddot{}_2 + z\ddot{}_3\right)$$

$$u_y = \ddot{}_2 - \sim \frac{\partial}{\partial y}\left(\ddot{}_0 + x\ddot{}_1 + y\ddot{}_2 + z\ddot{}_3\right) \qquad (2.26)$$

$$u_z = \ddot{}_3 - \sim \frac{\partial}{\partial z}\left(\ddot{}_0 + x\ddot{}_1 + y\ddot{}_2 + z\ddot{}_3\right)$$

En las cuales: $\sim = \frac{1}{4(1-\neg)}$

Las cuatro funciones $\ddot{}_0 \ \ddot{}_1 \ \ddot{}_2 \ \ddot{}_3$ son armónicas que cumplen con la ecuación diferencial de Laplace, esto es: $\nabla^2\ddot{}_0 = \nabla^2\ddot{}_1 = \nabla^2\ddot{}_2 = \nabla^2\ddot{}_3 = 0$

De acuerdo con la definición de potencial, la función $\mathbf{u}$ admite derivadas de la función φ por lo que se cumplen las relaciones: $u_x = \frac{\partial^{\cdot\cdot}}{\partial x}$ $u_y = \frac{\partial^{\cdot\cdot}}{\partial y}$ $u_z = \frac{\partial^{\cdot\cdot}}{\partial z}$

Según la definición de expansión volumétrica e_{vol} dada en la Ec (2.1), podemos escribir:

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla^{2\cdot\cdot} \qquad (2.27)$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^{2\cdot\cdot}\right) = \nabla^2\left(\frac{\partial^{\cdot\cdot}}{\partial x}\right) = \nabla^2 u \qquad (2.28)$$

Sustituyendo la ecuación (2.28) en la primera del sistema de ecuaciones (2.14) de Lamé, y procediendo de manera análoga con las dos ecuaciones restantes, obtenemos el sistema de ecuaciones generales que rigen la transmisión de ondas expansivas P en medios elásticos.

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = V_p{}^2\nabla^2 u_x \qquad \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = V_p{}^2\nabla^2 u_y \qquad \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = V_p{}^2\nabla^2 u_z \qquad (2.29)$$

O bien en forma general**:** $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = V_p{}^2\nabla^2\mathbf{u}$

Las ecuaciones correspondientes al primer caso extremo son llamadas ondas irrotacionales o de dilatación, lo cual significa que el rotor {Ω} = 0, existiendo únicamente expansión volumétrica, por lo tanto:

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0$$

2.7 Verificación de las ondas de distorsión.

Ahora nos ocuparemos de las ondas de distorsión S, las cuales son también de gran importancia para la ingeniería de cimentaciones vibratorias y para la ingeniería sísmica.

2. Caso en que la expansión volumétrica es nula en todo el espacio, o sea que:

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial z} = 0$$

Esto significa que únicamente existen deformaciones por cortante y rotación, realizándose el fenómeno ondulatorio sin cambio de volumen. Para estas condiciones las ecuaciones del sistema (2.14) se reducen a las ecuaciones de onda del tipo general correspondiente a las ondas de distorsión, esto es:

$$\frac{\partial^2 \Omega_x}{\partial t^2} = V_s{}^2 \nabla^2 \Omega_x \qquad \frac{\partial^2 \Omega_y}{\partial t^2} = V_s{}^2 \nabla^2 \Omega_y \qquad \frac{\partial^2 \Omega_z}{\partial t^2} = V_s{}^2 \nabla^2 \Omega_z \quad (2.30)$$

O bien en forma condensada: $\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Omega}}{\partial t^2} = V_s{}^2 \nabla^2 \boldsymbol{\Omega}$ $\qquad \vec{\boldsymbol{\Omega}} = \Omega\left(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\right)$

Podemos concluir que el problema fundamental del movimiento de ondas homogéneas propagándose en un espacio elástico, queda resuelto cuando se logra integrar las ecuaciones (2.29) y (2.30), determinándose la dilatación cúbica del medio mediante la divergencia del vector de traslación $\vec{\mathbf{u}} = u\left(u_x, u_y, u_z\right)$ y el vector de rotación $\boldsymbol{\Omega} = \Omega\left(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\right)$.

El modelo de semiespacio elástico homogéneo es útil para explicar la existencia de las ondas de cuerpo y las ondas de Rayleigh, y la adición de un estrato superficial más suave permite la descripción de las ondas Love. La propagación de ondas superficiales en medios elásticos es de

considerable importancia en la ingeniería sísmica y la sismología debido a la ocurrencia de estratificación en la corteza terrestre, ya que la tierra está formada por diferentes capas.

2.8 Ondas elásticas planas propagándose en un medio homogéneo e isótropo.

Una onda plana, propagándose en un medio homogéneo e isótropo, es aquella en la que los frentes de onda, con fase constante, se definen como el lugar geométrico de puntos P(x, y, z) en el espacio, a un tiempo fijo, a lo largo de la una línea recta.

Las ecuaciones más sencillas de ondas elásticas debidas a oscilaciones en un medio homogéneo e isótropo, son las correspondientes a la propagación unidimensional de ondas planas 1-D las cuales expresan el caso particular en que la función de desplazamientos depende únicamente de una coordenada espacial y de una temporal, o sea $u = u(x,t)$.

Una onda armónica plana 1-D, se describe mediante la siguiente función:

$$P(x,t) = A_0 e^{i(kx-\mu t)} \qquad (2.31)$$

Donde la constante A_0 es la amplitud y la parte real $(k_X - \mu t)$ del argumento exponencial se define como la fase. La onda plana se propaga en la dirección x como una alfombra ondulada, donde la distancia más corta entre las crestas adyacentes se define como longitud de onda λ. El número de onda k = 2π / λ es inversamente proporcional a la longitud de onda y las unidades de longitud de onda son distancia por ciclo.

La función $e^{i(k_x-\mu t)}$ describe una onda plana que viaja hacia la derecha y $e^{i(k_x+\mu t)}$ describe una onda que viaja hacia la izquierda.

Para ver si la onda se desplaza hacia la derecha, deberá considerarse que seguimos un frente de onda teniendo como referencia $x(t)$, manteniendo constante la fase $\Phi = (k_x - \mu t)$. Debido a que x debe aumentar para mantener la fase constante con el tiempo, de modo que $x/t = \mu/k$ lo cual significa que la onda está moviéndose hacia la derecha con la velocidad de compresión dada por μ/k. Por el contrario, $\Phi = (k_x + \mu t)$ es una constante si t aumenta y x disminuye; por lo tanto, la onda se mueve hacia la izquierda.

De manera semejante, la propagación de ondas planas 2-D, se describe mediante la función:

$$P(x,z,t) = A_0 e^{i(\mathbf{kx}-\mu t)} \qquad (2.32)$$

Donde el vector de número de onda viene dado por $\vec{\mathbf{k}} = (k_x, k_z)$ es paralelo a la dirección de propagación. El vector de observación está dado por $\vec{\mathbf{r}} = (x,z)$ el que describe una trayectoria plana oblicua al eje x, pero su vector de propagación está estrictamente en el plano (x,z) como se muestra en la Fig (2.2).

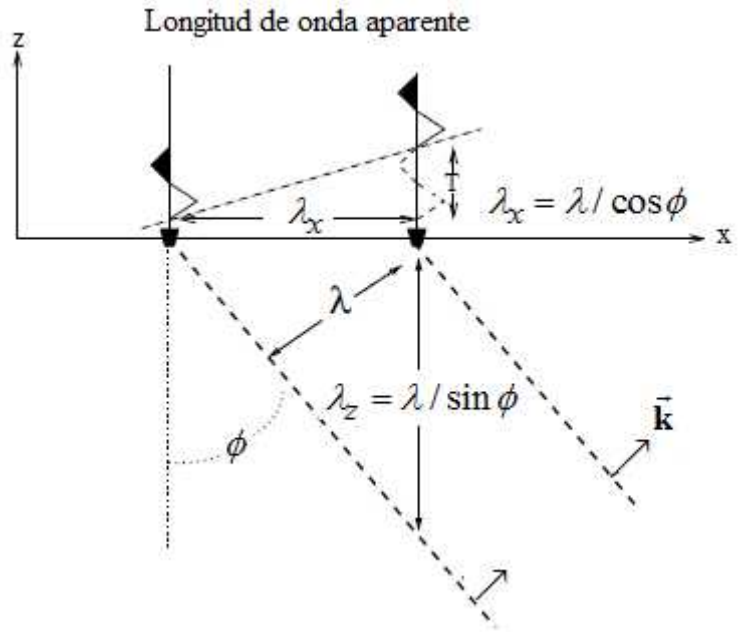


Figura (2.2): Propagación de ondas planas 2-D

2.9 Propagación de ondas planas P-SV y SH.

Podemos examinar una solución de onda plana para la ecuación de onda elástica y deducir que pueden existir tres tipos de ondas en un semi-espacio elástico: P, SV y ondas SH. Las ondas SV y SH son ondas de corte con movimiento de las partículas perpendicular a la dirección de propagación de la onda S, o sea que las ondas cortantes S se pueden descomponer en una componente paralela a la superficie, ondas SH, y en otra contenida en el plano vertical ondas SV. Mientras que las ondas P tienen un movimiento de partículas paralelo a la dirección de propagación de la onda.

Es bien sabido que cuando ocurre una perturbación en el seno de un medio homogéneo, linealmente elástico e isótropo, las ondas viajan radialmente alejándose de la fuente en todas las direcciones por lo que en puntos suficientemente alejados del foco, las ondas pueden considerarse planas, lo cual es justificado en la mayoría de los casos de vibraciones inducidas por fuentes

superficiales y en ingeniería sísmica, dado que generalmente la distancia a estaciones de interés suele ser muy grande comparada con las dimensiones de la fuente.

En esos casos los desplazamientos asociados a las ondas P y S, son longitudinales y transversales a la dirección de propagación respectivamente.

Podemos suponer que las ondas de cuerpo en el interior de un medio homogéneo, e isótropo, estén formados por un grupo de ondas P y S atravesándolo independientemente entre sí.

Las ondas secundarias S pueden sufrir una polarización plana, de manera que si todo el movimiento tiene lugar en planos horizontales que contienen la dirección de la trayectoria, se les llama onda SH, cuando todo el movimiento tiene lugar en planos verticales que contienen la dirección del recorrido, se les llama ondas SV.

Para la resolución de algunos problemas de propagación de ondas de cuerpo que tienen importancia práctica en los problemas de diseño de cimentaciones sometidas a vibraciones y en diseño sismo resistente, resulta ventajoso resolver las ecuaciones de los potenciales expresados por la ecuaciones (2.19) y (2.23), mediante un método inverso al de integración proponiendo los corrimientos y verificando si éstos satisfacen las ecuaciones (2.14) de Navier.

En el caso de oscilaciones longitudinales en un medio elástico indefinido, los puntos situados en el plano Q normal al eje OX, mostrado en la Fig. (3.2), se desplazaran todos igual y simultáneamente manteniéndose a la misma distancia del plano YOZ, el cual se desplazara en la dirección del eje OX, sin deformarse.

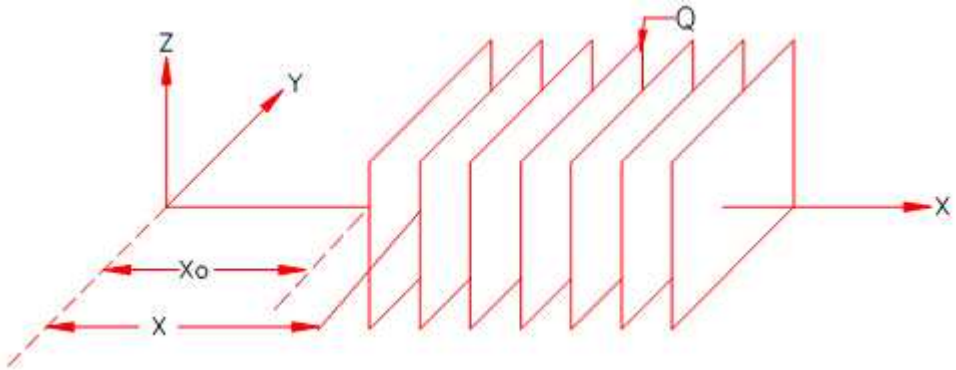


Fig. (2.3): Movimiento de ondas longitudinales

Para el estado de reposo cuando $t_0 = 0$, la ecuación del plano Q es $x = x_0$, durante el movimiento en cualquier instante t, la ecuación del plano Q será $x = x_0 + «(x_0, t)$, lo cual nos indica que dicho plano se encuentra a distancia paralela y dependiente del tiempo. Si elegimos una serie de planos paralelos Q1, Q2.....Qn, todos se desplazaran normalmente al eje OX, aproximándose o alejándose ente sí.

A este movimiento se denomina oscilación longitudinal homogénea a lo largo del eje OX, con una velocidad de propagación V_p definida mediante la Ec (1.20). Para verificar si estas oscilaciones son posibles, llevaremos los corrimientos u_x = u(x, t), $u_y = u_z = 0$ a las Ecs (2.14) de Navier.

Verificaremos que la ecuación general que gobierna la propagación de ondas elásticas planas, en un medio homogéneo, es un caso particular de la ecuación general de ondas, cuando se cumplen las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u(x, t) \\ u_y &= 0 \\ u_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\nabla^2 u = \nabla^2 u_x = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}$$

Por tratarse de un medio elástico indefinido, no necesitamos verificar las condiciones en la superficie y sabemos de previo que: $\frac{\partial £_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \nabla^2 u_x$

$$\frac{\partial £_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \nabla^2 u_y = 0 \qquad \frac{\partial £_z}{\partial z} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \nabla^2 u_z = 0$$

Al llevar los corrimientos al sistema de ecuaciones (2.14), se observa que la segunda y tercera ecuación de dicho sistema se verifica idénticamente, y la primera se transforma en la ecuación (2.19) que describe el movimiento para expansión volumétrica, sin que ocurran distorsiones de cortante.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2G)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2G}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Se dedujo que el movimiento oscilatorio longitudinal propuesto mediante los corrimientos u_x = u(x, t) $u_y = u_z = 0$, es posible si la función u_x(x, t), satisface la ecuación (2.19) para la propagación de ondas P de expansión.

En el caso en que los corrimientos sean transversales al eje OX, o sea que: $u_x = u_y = 0$ $u_z = u(z, t)$ verificaremos que entonces, todos los corrimientos se realizan paralelamente al eje OZ, comprobándose como en el caso anterior, que todos los puntos contenidos en el plano Q mostrado en la Fig. (2.4), se desplazan igual y simultáneamente, manteniéndose a la misma distancia del plano YOZ.

Si consideramos varios planos paralelos y similares Q_1, Q_2.....Q_n, veremos que éstos se desplazan verticalmente. En el caso de movimiento periódico se tratara de una oscilación transversal homogénea a lo largo del eje OZ, propagándose con una velocidad V_S, definida mediante la Ec. (2.21).

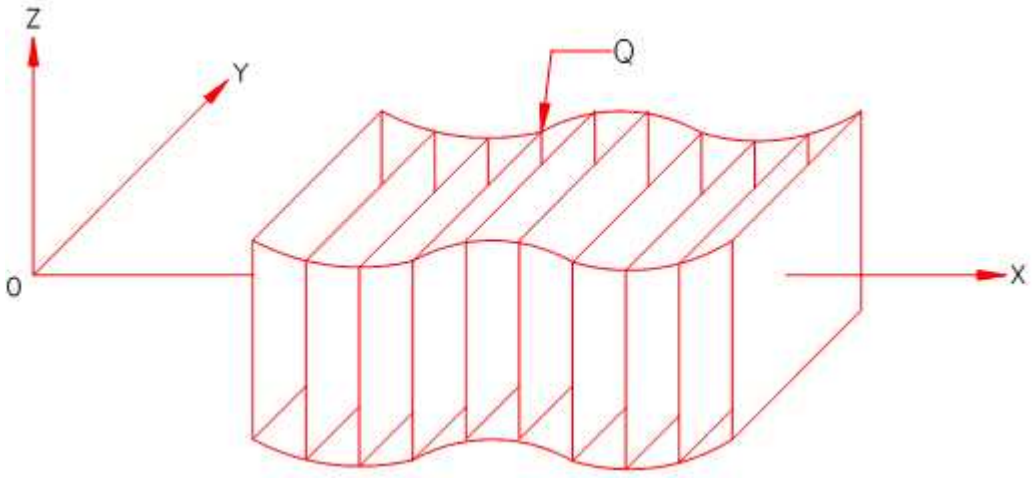


Fig. (2.4): Movimiento de ondas transversales

Verificamos la posibilidad de estas oscilaciones, basándonos en los corrimientos $u_x = u_y = 0$ $u_z = u(x,t)$, y en el hecho de que no ocurrirán expansiones volumétricas, por tanto:

$$e = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial z} = 0$$

$$\nabla^2 u_x = \nabla^2 u_y = 0$$

$$\nabla^2 u_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0$$

Llevando estas condiciones al sistema de Ecs (2.14), observamos que la primera y la segunda de estas se verifican idénticamente y la tercera toma la forma de la ecuación (2.23) que describe la propagación de las ondas de distorsión.

$$G\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \circ \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{G}{\circ}\frac{\partial u_z}{\partial x^2}$$

Por consiguiente, la oscilación correspondiente a los corrimientos $u_x = u_y = 0$, $u_z = u(z,t)$ satisface la Ec (2.23), la cual posee idéntica estructura que la Ec (2.19), difiriendo únicamente por la magnitud del coeficiente constante V correspondiente a las diferentes velocidades de las ondas de cuerpo.

La velocidad de propagación de las oscilaciones transversales V_s es menor que la velocidad de propagación de las oscilaciones longitudinales V_p, y su relación depende únicamente de las constantes elásticas del medio de propagación, tal a como se había previamente determinado.

$$V_s \prec V_p$$

$$\left|\frac{V_S}{V_P}\right| = \sqrt{\frac{G}{\text{a} + 2G}}$$

Las ecuaciones (2.19) y (2.23), tienen muchas aplicaciones en problemas de vibraciones en ingeniería práctica, entre los que se incluyen los sistemas tratados como vigas de cortante, de los cuales las formaciones estratigráficas de suelos constituyen excelentes modelos.

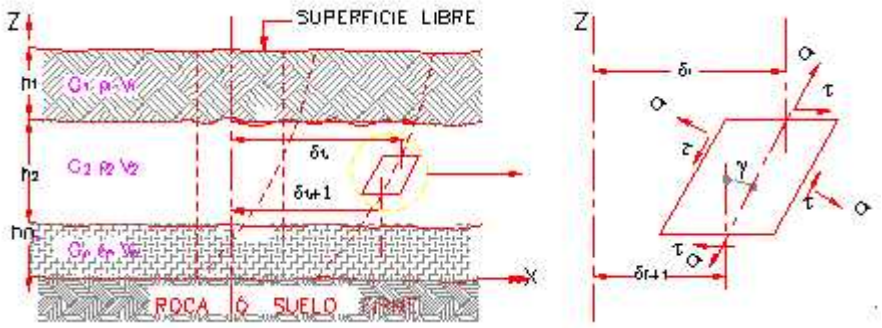


Fig. (2.4): Columna de suelo que vibra como un sistema de cortante.

2.10 Solución ondulatoria para un estrato homogéneo isótropo y finito de suelo modelado como un sistema de cortante.

Las formulaciones y soluciones de muchos problemas de propagación lineal de ondas para medios homogéneos están disponibles en la literatura de la mecánica de sólidos continuos.

De acuerdo con lo previamente establecido, la Ec. (2.23) gobierna la propagación ondulatoria de las ondas SH en un medio seminfinito isótropo u ortótropo homogéneo o estratificado horizontalmente, sujeto a desplazamientos horizontales. Ahora será analizada la propagación ondulatoria en un estrato homogéneo superficial de suelo, en el que las deformaciones predominantes son por cortante, razón por la cual se les llama sistemas de cortantes. En la mayoría de las aplicaciones prácticas, un estrato superficial de suelo puede analizarse razonablemente considerándolo como una viga de cortante. El estrato de suelo homogéneo se modela como un sistema lineal unidimensional estrechamente acoplado, de parámetros distribuidos, en el cual no se han considerado fuerzas de amortiguamiento visco elástico, y donde

la densidad de masa ρ, y la rigidez en cortante G, se distribuyen uniformemente por unidad de longitud o de volumen. Otros sistemas regidos por la Ec. (23) son los medios ortótropos de suelos estratificados horizontalmente, sujetos a desplazamientos horizontales.

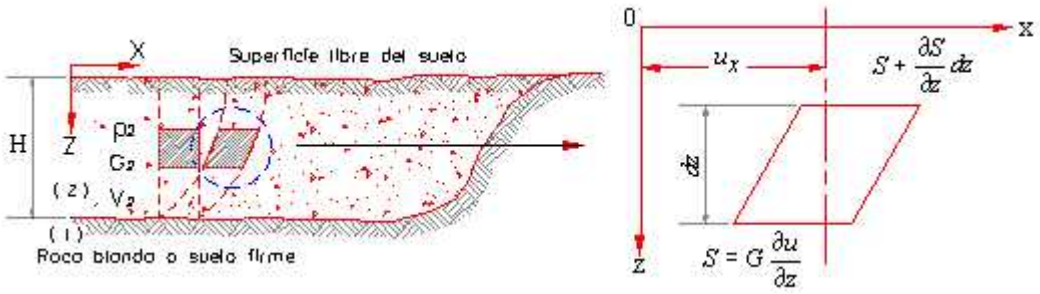


Fig. (2.5): Estrato de suelo que vibra libremente como un sistema de cortante.

La pendiente del espécimen infinitesimal deformado, es proporcional al esfuerzo cortante medio en la sección transversal, de manera que la diferencia S entre la cortante de la parte superior respecto a la parte inferior del elemento, en ausencia de fuerzas externas aplicadas, debe equilibrarse con la fuerza inercial inducida por la aceleración actuante en dicho elemento. El equilibrio del cuerpo libre se establece empleando el principio de D'Alembert:

$$\frac{\partial S}{\partial z}dz - \circ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dz = 0$$

La definición de sistema de cortante nos permite establecer la siguiente relación:

$$S = G\frac{\partial u}{\partial z} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial S}{\partial z} = G\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Dividiendo ambos términos entre ∂z y combinando ambas ecuaciones tenemos:

$$\circ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_S{}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Este resultado condujo a la Ec. (2.23), la cual resolveremos en la forma de un desarrollo en serie en función de los modos naturales de vibración, para lo cual emplearemos el recurso de separación de variables, partiendo de que la función $u(z,t)$ puede expresarse como el producto de las funciones Z_n y $\bar{}_n(t)$ de manera que la función $u(z,t)$ puede escribirse de la siguiente forma:

$$u(z,t) = z_n(z)\bar{}_n(t) \qquad (2.33)$$

El recurso de variables separadas permite la siguiente transformación:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 z_n}{\partial z^2}\bar{}_n(t) \qquad (2.34)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = z_n(z)\frac{\partial^2 \bar{}_n}{\partial t^2}$$

Por comodidad operacional convendremos en llamar $\bar{}'' = \frac{\partial^2 \bar{}_n}{\partial t^2}$ y $z'' = \frac{\partial^2 z_n}{\partial z^2}$ valores que al ser sustituidos en la Ec. (2.23) generan las siguientes ecuaciones, donde μ_n es arbitraria.

$$z_n\bar{}''_n - V^2 z''_n\bar{}_n = 0 \qquad (2.35)$$

$$\frac{\ddot{\eta}_n}{\eta_n} = V^2 \frac{z''_n}{z_n} = -\mu^2{}_n$$

La Ec. (35) permite el siguiente desdoblamiento:

$$\frac{\ddot{\eta}_n}{\eta_n} = -\mu^2{}_n \qquad (2.36) \qquad \frac{z''_n}{z_n} = -\frac{\mu^2{}_n}{V^2} \qquad (2.37)$$

La Ec. (2.36) indica que μ_n no depende de z, y la Ec. (2.37) por su lado establece que μ_n no depende de t, por lo tanto μ_n es una constante.

Las soluciones generales de ambas ecuaciones, son de las siguientes formas:

$$\eta_n = sen\left[\mu_n (t - t_n)\right] = 0 \qquad (2.38)$$

Donde t_n mide un desfasamiento arbitrario del tiempo.

$$z_n = A_n sen\left[\frac{\mu_n}{V}(z - a_n)\right] \qquad (2.39)$$

Ahora sustituimos las soluciones (2.38) y (2.39), en la Ec. (2.33) y obtenemos la siguiente solución:

$$u(z,t) = A_n sen\left[\frac{\mu_n}{V}(z - a_n)\right] sen(t - t_n) = 0 \qquad (2.40)$$

Aquí A_n y a_n son constantes arbitrarias que dependen de las condiciones de frontera.

La forma de la Ec. (2.40) describe el modo natural enésimo de vibración para el sistema de cortante de parámetros distribuidos, ya que ésta satisface la definición de modos naturales de vibración.

La frecuencia circular natural del sistema μ_n se determina con la constante a_n, llamada coeficiente de participación modal, que junto con la constante que define la amplitud de vibración A_n, serán determinadas a partir de las condiciones de frontera para cada caso.

La solución general de la Ec. (2.23) se obtiene combinando linealmente tantas ecuaciones de la forma de la Ec. (2.40) como se quiera.

Las amplitudes A_n y los desfasamientos de tiempo t_n pueden determinarse de modo que satisfagan cualquier configuración inicial de desplazamientos, velocidad y condiciones de frontera, ya que cualquiera de estas configuraciones puede expresarse como una combinación lineal de los modos naturales de vibración del sistema analizado.

Este tipo de solución muestra claramente la naturaleza ondulatoria del fenómeno, pero no se adapta muy bien en la restitución del movimiento del terreno, para lo cual emplearemos posteriormente los espectros de Fourier y su función transformada para la restitución del movimiento.

Para el estrato único homogéneo cimentado sobre un espacio elástico seminfinito más rígido, mostrado en la Fig. (2.5), determinaremos las configuraciones modales y las envolventes de fuerzas cortantes, empleando la solución particular dada por la Ec. (2.39).

Las condiciones de frontera para el estrato analizado son las siguientes:

i. En la superficie libre z = H, y la cortante es nula, por lo tanto:

$$S = 0 \qquad a_n = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z}(H, t) = 0 \qquad (2.41)$$

ii. En la interfase entre el estrato de suelo y el basamento rocoso, el desplazamiento relativo es nulo, por lo tanto:

$$u(0,t) = 0 \qquad (2.42)$$

El estrato es caracterizado por los parámetros físicos de densidad ρ, módulo dinámico de rigidez en cortante G y el amortiguamiento interno de naturaleza viscoelástica, el cual inicialmente será despreciado. Estas características se consideran aproximadamente constantes en un área relativamente extensa, lo cual permite la aceptación del semiespacio elástico homogéneo, despreciándose los efectos confinantes debidos a estratos vecinos con diferentes características mecánicas.

La condición expresada por la Ec. (2.40) genera las siguientes ecuaciones:

$$\frac{du}{dz} = A_n \frac{\mu_n}{V} \cos\left(\frac{\mu_n}{V} z\right) = 0 \qquad (2.43)$$

Y como $A_n \frac{\mu_n}{V} \neq 0 \rightarrow \frac{\mu_n z}{V} = (2n-1)\frac{®}{2}$

Entonces el valor de la frecuencia circular natural de vibración del estrato es la siguiente:

$$\mu_n = \frac{(2n-1)®}{2H}\sqrt{\frac{G}{°}} \qquad (2.44)$$

Los periodos fundamentales correspondientes a los tres primeros modos de vibración son los siguientes:

$$T_n = \frac{2®}{\mu_n} = \frac{4H}{(2n-1)}\sqrt{\frac{°}{G}} \qquad (2.45)$$

$$n=1 \quad T_1 = \frac{4H}{V_s} \qquad n=2 \quad T_2 = \frac{4H}{3V_s} \qquad n=3 \quad T_3 = \frac{4H}{5V_s}$$

En las últimas décadas se ha consolidado la técnica de los micros temblores como una herramienta eficaz para la investigación y reconocimiento de las estructuras superficiales y profundas del suelo. A partir de la publicación de Nakamura (1989) se ha generalizado la técnica (HVSR) de la relación espectral horizontal vertical $\frac{H}{V}$ para determinar los periodos predominantes del suelo. Garantizando que las fuentes de ruido cultural no afecten el movimiento de micros temblores en el basamento, es posible obtener con buena aproximación el periodo fundamental del suelo (T_S) en la superficie de campo libre. Esta controvertida técnica considerada por algunos con vacíos teóricos, se ha popularizado dado que la experiencia apunta hacia su confiabilidad para determinar el periodo dominante de un sitio, fundamento de la técnica de micro zonificación sísmica.

La fuerza cortante S_n se distribuye verticalmente en el espesor del estrato H, y su valor puede obtenerse a partir de la definición dada para un sistema de cortante.

$$S_n = G\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = A_n G \mu_n \cos\left(\frac{\mu_n}{V} z\right) \qquad (2.46)$$

$$S_n = \frac{(2n-1)\pi A_n G}{2H}\cos\left(\frac{\mu_n}{V}z\right) \qquad (2.47)$$

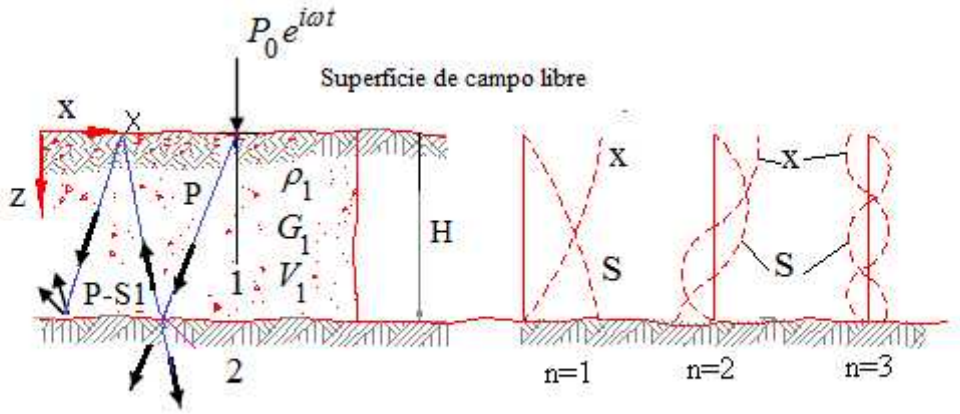


Fig (2.6): Estrato superficial homogéneo excitado por una perturbacion armonica estacionaria.

Ahora emplearemos la Ec. (2.40) para obtener los desplazamientos y los coeficientes de participación modal del estrato único de suelo, excitado por un movimiento arbitrario $P_0 e^{i\mu t}$ incidente desde la superficie libre.

La ecuación que gobierna el movimiento del estrato debido a la excitación del estado estacionario es de la siguiente forma:

$$M\ddot{u} + Gu = -M\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{0}}(\tau) \qquad (2.48)$$

Donde $\ddot{\mathbf{u}}_0(\tau)$ es una función vectorial del tiempo.

Los desplazamientos se obtienen mediante la suma de los términos semejantes correspondientes a cada modo de vibración, integrando la Ec. (2.40) en el dominio del tiempo (0, t), efectuando la siguiente ecuación integral:

$$u_n(t) = -\sum_n \frac{a_n}{\mu_n} sen\left(\frac{\mu_n \cdot z}{V}\right) \int_0^t u_0(\tau)\, sen\left[\mu_n (t-\tau)\right] d\tau \quad (2.49)$$

Los coeficientes de participación modal se obtienen efectuando las operaciones integrales en el dominio del espacio (0, h)

$$a_n = \frac{\int_0^h \circ\, sen\left(\frac{\mu_n}{V} z\right) dz}{\int_0^h \circ\, sen^2\left(\frac{\mu_n}{V} z\right) dz} = \frac{4}{(2n-1)®} \quad (2.50)$$

En la figura (2.6) se muestran las envolventes de los desplazamientos y de las fuerzas cortantes, obtenidas como la suma de las contribuciones modales en función del tiempo, según Newmark y Rosenblueth. [23]

2.11 Ondas superficiales.

Separación de la ecuación elastodinámica en un medio isótropo homogéneo.

Hasta ahora hemos considerado solo las soluciones de la ecuación de ondas de cuerpo, las que existen en el espacio elástico continuo. Sin embargo, en presencia de una superficie libre, como en el caso de la tierra, otras soluciones son posibles. Se llaman ondas de Rayleigh y de Love, a dos tipos de ondas de superficiales. Las ondas de Rayleigh existen en cualquier superficie libre, mientras que las ondas Love, son ondas transversales que se propagan polarizadas horizontalmente a lo largo de la interfase de dos medios con diferentes velocidades. Ambas condiciones se cumplen en la tierra real.

Las ondas de Love se forman a través de interferencia constructiva de reflejos repetidos de ondas SH en la superficie libre. También pueden ser el resultado de interferencia constructiva entre ondas SH, cuyas velocidades aumentan con la profundidad y que se reflejan pos críticamente dentro de un estrato homogéneo, o un conjunto de n estratos superpuestos a un semi espacio homogéneo. Las amplitudes de las ondas Love disminuyen con la profundidad.

Los potenciales elastodinámicos se utilizan con frecuencia en el estudio de las ondas de Rayleigh, ya que estas ondas contienen componentes longitudinales y transversales de movimiento. Sin embargo, las ondas Love generalmente se pueden estudiar directamente en términos de desplazamientos, porque estas ondas son más simples que las ondas de Rayleigh.

Los potenciales son funciones auxiliares que se introducen con frecuencia en Matemáticas y Física para facilitar la solución de problemas complicados. La introducción de potenciales elastodinámicos permite reducir la ecuación de movimiento (2.14) para un medio isótropo homogéneo, a dos ecuaciones de ondas más simples, ya que estas ondas contienen componentes longitudinales y transversales de movimiento.

En estas anotaciones nos limitaremos a los medios que son homogéneos e isotrópicos. Sin embargo, la ecuación del movimiento (2.14) de Navier para sus partes homogéneas e isotrópicas todavía resulta bastante complicada. Los métodos estándar para resolver ecuaciones diferenciales

parciales, como la separación de las variables individuales, no pueden ser aplicados inmediatamente para resolver el sistema de ecuaciones (2.14). Por lo tanto, la solucion se expresa como una suma de soluciones de ecuaciones más simples. Esto puede lograrse introduciendo potenciales adecuados.

En la siguiente sección se aborda el estudio analítico de las ondas superficiales Rayleigh y Love que se propagan en diversos tipos de medios. Siempre buscaremos la solución en forma de onda superficial, las que deberán satisfacer las ecuaciones de movimiento de Navier (2.14) considerando las condiciones de frontera. Estos enfoques son matemáticamente exactos, pero más bien formales. Para una interpretación física sustantiva del problema, las ondas superficiales serán interpretadas como la superposición de las ondas de cuerpo. No obstante deberá considerarse que las superposiciones pueden resultar bastante complicadas, debido a que las ondas de cuerpo no son únicamente homogéneas y también deberán incluirse las ondas de cuerpo no homogéneas. Se hará un análisis preliminar de los problemas que son comunes a todos los casos especiales estudiados, tratando de revelar los mecanismos físicos que conducen a la formación de ondas superficiales.

El medio más simple en el que se pueden propagar las ondas de Rayleigh es un semiespacio isótropo homogéneo. La velocidad de las ondas de Rayleigh en este medio V_R, es ligeramente menor que la velocidad de onda transversal $V_R \approx 0.9V_s$, y es independiente de la frecuencia. Por lo tanto, las ondas Rayleigh en este medio simple no son dispersivas. El modelo más simple en el que se pueden propagar las ondas de Love consiste en un estrato homogéneo isotrópico sobre un semiespacio isótropo homogéneo. Ambos tipos de ondas superficiales, Rayleigh y Love en este modelo son dispersivas, es decir, que sus velocidades dependen de la frecuencia.

Las ondas superficiales elásticas no representan principalmente nuevos tipos de ondas, ya que son generadas por interferencia de ondas de cuerpo. Por lo tanto, en principio, podríamos intentar construir el campo de ondas superficiales mediante la superposición de ondas de cuerpo. Sin embargo, este enfoque no es conveniente si se consideran una gran cantidad de ondas, estratos delgados y grandes distancias desde la fuente. Por lo tanto, es más apropiado buscar una descripción matemática que permita cuantificar las respuestas para las ondas superficiales y para otras ondas de interferencia.

Las ondas superficiales generalmente tienen amplitudes más grandes y períodos más largos que las ondas de cuerpo P y S y exhiben una dispersión y polarización características.

2.12 Ondas Rayleigh.

Las ondas que se propagan en un medio se pueden dividir aproximadamente en dos principales categorías: ondas de cuerpo y ondas superficiales. Las ondas superficiales se generan solo en presencia de un límite libre y pueden ser esencialmente de dos tipos: ondas Love y ondas Rayleigh. Las ondas de superficie en la Tierra tienen dispersión, y su propagación se describe con una velocidad de fase y una velocidad del grupo.

Las ondas Love solo pueden existir en presencia de un estrato superficial blando que descansa sobre un semi-espacio más rígido y se producen por atrapamiento de energía en el más blando por reflexiones múltiples. Las ondas de Rayleigh siempre se generan cuando la superficie libre existe en un cuerpo continuo.

En un medio semi-infinito la superficie libre es una frontera que permite obtener una solución a las ecuaciones de movimiento de ondas superficiales Rayleigh, las cuales producen en las partículas movimientos elípticos y disminuyen rápidamente su amplitud con la profundidad.

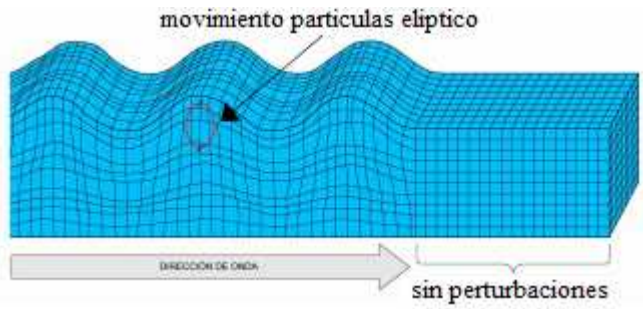


Fig. (2.7). Ondas Rayleigh

John Strutt Lord of Rayleigh quien fue el primero los presentó en 1885 la solución del problema de la vibración en la superficie libre de un semi-espacio elástico “On waves propagated along the plane surface of an elastic solid”, advirtiendo la importancia que ese tipo de onda podría tener en la transmisión de temblores debidos a terremoto.

De hecho, la introducción de ondas superficiales fue precedida por algunas observaciones sísmicas que no podían ser explicadas mediante la teoría de ondas de cuerpo, que era bien conocida en ese momento. En primer lugar, la naturaleza del temblor principal no estaba clara debido a que las primeras llegadas fueron un par de temblores menores correspondientes a las ondas P y S, respectivamente. La mayor cantidad de energía asociada a este temblor tardío, si se compara con el de las ondas de cuerpo, fue una fuerte evidencia de una menor atenuación pasando por el mismo medio y esto podría explicarse únicamente suponiendo que este tipo adicional de onda estaba esencialmente confinado a la superficie (Graff 1975).

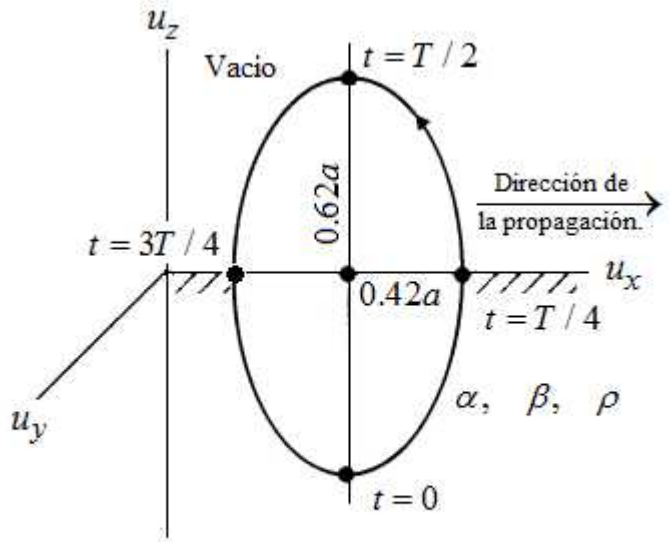


Fig (2.8): Movimiento particular de una onda Rayleigh en un semi-espacio homogéneo.

Otra contribución principal con respecto a las vibraciones forzadas fue sucesivamente dado por Horace Lamb, en su publicación de 1904: "Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid", quien resolvió el problema de una fuerza armónica puntual actuando sobre la superficie del suelo. También propuso la solución para el caso de un pulso general, mediante el uso del concepto de síntesis de Fourier.

La utilidad de las ondas superficiales para los problemas de caracterización, ha quedado pronto clara debido a algunas características importantes y especialmente a la posibilidad de detectarlas desde la superficie de un sólido, con fuertes implicaciones en el desarrollo de técnicas no invasivas (Viktorov 1967).

Aquí nos limitaremos a una descripción general de las ecuaciones específicas de las ondas Rayleigh, con atención especial en la caracterización del suelo superficial.

Para el caso de las ondas Rayleigh consideramos la interacción de las ondas P y S con la superficie libre de un semi-espacio uniforme. Si la condición de frontera libre se impone en las ecuaciones generales de Navier (2.14) para la propagación ondulatoria en un medio homogéneo elástico lineal, la solución para la onda superficie propagación ondulatoria en un medio homogéneo elástico lineal, la solución para la onda superficial Rayleigh, se puede deducir a partir de los componentes P-SV de las ondas de cuerpo. La solucion de los problemas relacionados con la interacción de ondas P-SV, frecuentemente se formulan en términos de los potenciales $\vec{\boldsymbol{\varepsilon}}$ y $\vec{\boldsymbol{\Omega}}_{SV} = \Omega\left(0, \Omega_y, 0\right)$ que deben satisfacer las ecuaciones de onda (2.19) y (2.23)

$$\nabla^2 £ - \frac{1}{{V_p}^2}\frac{\partial^2 £}{\partial t^2} = 0 \quad (2.19)$$

$$\nabla^2 \Omega - \frac{1}{{V_s}^2}\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = 0 \quad (2.23)$$

Es importante tener en cuenta que si la velocidad del medio aumenta con la profundidad, puede existir un segundo tipo de onda que se propaga en el límite de la superficie libre, la que consiste en una interferencia entre las ondas SH, denominada como ondas Love, y que solo puede generarse bajo condiciones de estratificación restrictivas, y por lo tanto no puede existir para el semiespacio homogéneo. En síntesis, las ondas Rayleigh, son debidas a la interferencia entre ondas P y SV; y las ondas Love, son debidas a la interferencia entre ondas SH. Las ondas de superficie muestran una dispersión y polarización características.

La ecuación de la onda Rayleigh se puede obtener suponiendo una onda plana que viaja en la dirección positiva de las X, en el plano XZ. Así, partiendo de que los desplazamientos u_x y u_z se pueden escribir respectivamente como:

$$u_x = \frac{\partial ¤}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial z} \quad u_x = 0 \quad = \frac{\partial ¤}{\partial z} - \frac{\partial \cdot}{\partial x}$$

Donde ¤ y $\cdot$ son funciones potenciales que resultan estar relacionadas respectivamente con la dilatación y la rotación del medio. Sustituyendo u_x y u_z en las ecuaciones primera y tercera del sistema de ecuaciones (2.14) de Navier, resulta:

$$\begin{aligned} ° \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 ¤}{\partial t^2}\right) + ° \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2}\right) &= (ª + 2G)\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 ¤\right) + G\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla^2 \cdot\right) \\ ° \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 ¤}{\partial t^2}\right) - ° \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2}\right) &= (ª + 2G)\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla^2 ¤\right) + G\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla^2 \cdot\right) \end{aligned} \qquad (2.51)$$

De estas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 ¤}{\partial t^2} &= \frac{(ª + 2G)}{°}\nabla^2 ¤ = {V_p}^2 \nabla^2 ¤ \\ \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} &= \left(\frac{G}{°}\right)\nabla^2 \cdot = {V_s}^2 \nabla^2 \cdot \end{aligned} \qquad (2.52)$$

Las ecuaciones de la forma (31), admiten soluciones para propagación dispersiva de la forma:

$$\begin{aligned} ¤ &= F(z)e^{i(\mu t-k)} \\ \cdot &= H(z)e^{i(\mu t-k)} \end{aligned} \qquad (2.53)$$

Donde $F(z)$ y $H(z)$ son funciones que describen la variación de la amplitud de la onda con la profundidad z, y $k = \frac{2®}{L_R}$ es el número de onda y L_R es la longitud de la onda generada.

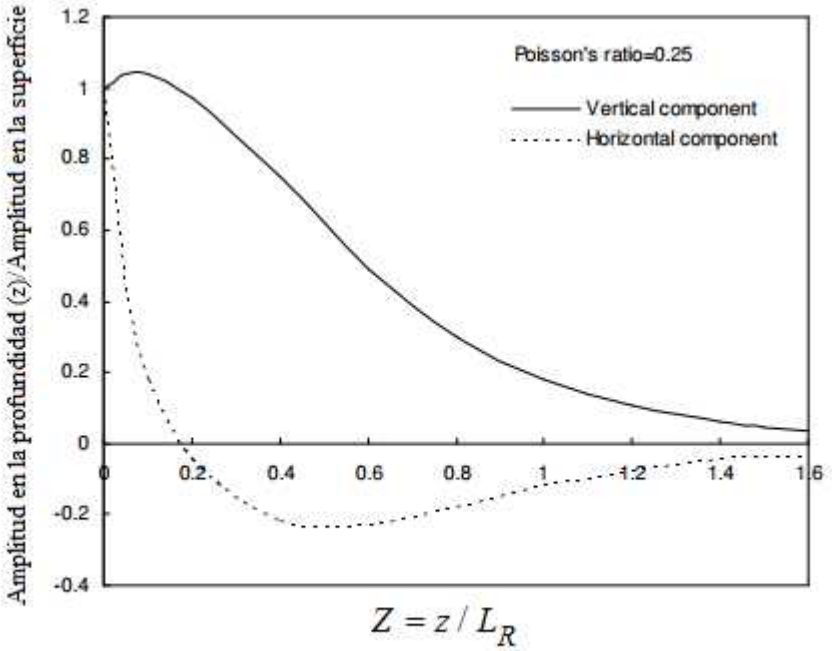


Fig (2.9): Variacion de amplitudes vertical y horizontal de desplazamiento de ondas R.
(Das, 1990; Das y Ramana, 2011)

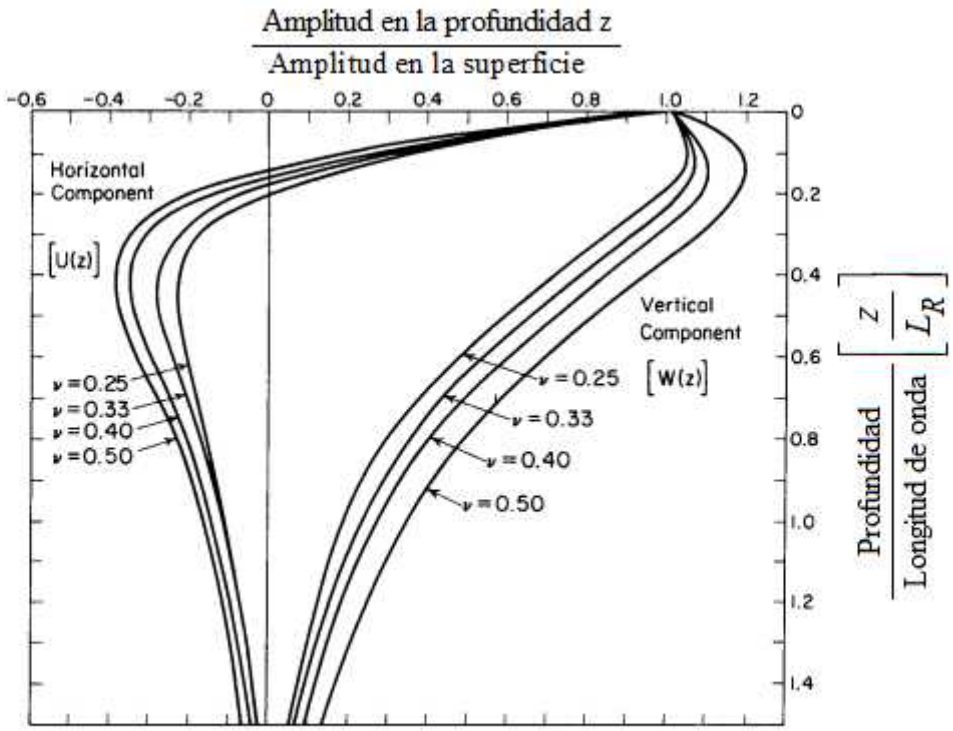


Fig (2.10): Amplitud vertical y horizontal de las ondas Rayleigh en funcion de la velocidad coeficiente de Poisson y longitud de onda. Richart 1970

Al sustituir los valores de φ y ψ dados por las ecuaciones (2.53), en las ecuaciones (2.52), y considerando la condición de que la amplitud de la onda superficial tiende a cero con la profundidad, los valores de $F(z)$ y $H(z)$ resultan iguales a:

$$F(z) = A_1 e^{-\sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu}{V_p}\right)^2}\, z}$$

$$H(z) = A_2 e^{-\sqrt{k^2 - \left(\frac{\mu}{V_s}\right)^2}\, z} \qquad (2.54)$$

Los valores de A1 y A2 se obtienen considerando que los esfuerzos cortantes y normales en la superficie del semiespacio deben ser nulos. Valiéndose de estas condiciones y realizando algunos arreglos matemáticos, se obtiene la ecuación para determinar la velocidad de propagación de las

ondas Rayleigh en la superficie. En particular para el caso de deformación plana, descartando las soluciones que dan amplitud infinita a profundidad infinita, una solución se puede encontrar solo si la ecuación característica obtenida, es satisfecha por la velocidad de propagación de la onda de superficie:

$$K^6 + 8K^4 + \left(24 - 16¥^2\right)K^2 + 16\left(¥^2 - 1\right) = 0 \qquad (2.55)$$

La Ec. (35) es conocida como ecuación de Rayleigh, donde K y γ son las siguientes relaciones entre las velocidades de ondas longitudinales (P), de distorsión (S) y ondas Rayleigh (R):

$$K = \frac{V_R}{V_s} \qquad ¥ = \frac{V_s}{V_p} \qquad (2.56)$$

Esta ecuación es cúbica en K^2 y sus raíces son una función de la relación de Poisson, dado que, $¥^2 = \frac{(1-2¬)}{2(1-¬)}$ Se puede mostrar (Viktorov1967) que para los medios reales $0 \prec ¬ \prec 0.5$ solo existe una solución real y aceptable, en el rango de 0 a 1. La relación entre las velocidades de propagación de las diferentes ondas como una función de la relación de Poisson, se muestran en siguiente gráfico debido a Richart.

$$V_R = \frac{0.87 + 1.12¬}{1 + ¬} V_s \qquad (2.57)$$

Resulta evidente que la diferencia entre la velocidad de la onda de corte y la velocidad de la onda de Rayleigh es muy limitada, siendo esta última ligeramente más pequeña que la primera. En particular, el rango exacto de variación está dado por: $0.87 \prec \frac{V_R}{V_s} \prec 0.96$

Debe tenerse en cuenta que no hay dependencia de la velocidad de las ondas de Rayleigh con la frecuencia, un medio elástico lineal homogéneo se caracteriza por un valor único de velocidad de onda Rayleigh. La velocidad aparente de una onda Rayleigh en un semi-espacio que es un sólido homogéneo de Poisson, es independiente de la frecuencia de la onda, y aproximadamente el 90% de la velocidad de la onda S.

Es importante señalar que la onda de superficie se puede ver como la superposición de dos componentes separados: uno longitudinal y el otro transversal que se propagan a lo largo de la superficie con la misma velocidad, pero tienen diferentes leyes exponenciales de atenuación con la profundidad. Obviamente, los campos de onda son tales que la superposición de los dos da un esfuerzo total nulo en el límite del semi-espacio.

En lo que respecta a los campos de desplazamiento, se pueden calcular introduciendo la solución de la ecuación característica en las anteriores formulaciones.

Los componentes de movimiento horizontales y verticales resultantes están fuera de fase en 90 ° una con la otra, con la componente vertical más grande en amplitud que la horizontal, por lo tanto, el movimiento de partículas resultante es una elipse.

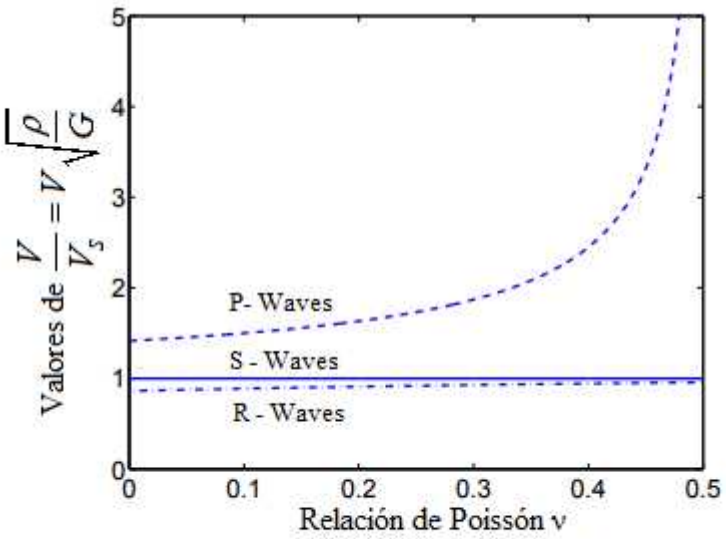


Fig (2.11): Relación entre el módulo de Poissón y la velocidad de propagación de ondas P, S y R en un semi-espacio lineal homogéneo. (Richart 1962)

En la superficie del suelo, la elipse es retrógrada, en sentido anti horario si el movimiento se propaga de izquierda a derecha como se muestra en la figura, pero al profundizarse la elipse se invierte a una profundidad igual a aproximadamente 1/2 de la longitud de onda.

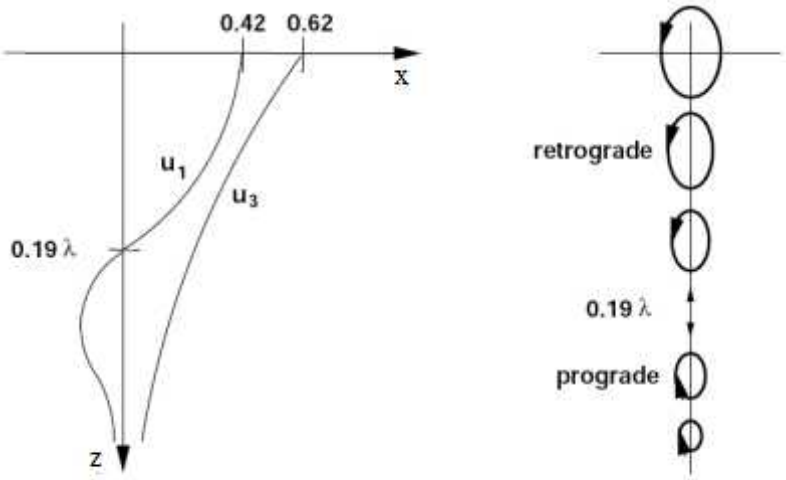


Fig (2.12): Movimiento particular de una onda Rayleigh.

La onda Rayleigh tiene su polarización en el plano vertical radial, con movimiento particular elíptico y retrógrado. El movimiento particular con profundidad tiene la misma forma para todas las frecuencias, pero el valor absoluto depende de la frecuencia ω, o la longitud de la onda. El desplazamiento u_z decae exponencialmente con la profundidad; el desplazamiento u_x decae a cero a una profundidad z = 0.19λ. Para x3 < 0.19λ el movimiento es retrógrado, para z > 0.19λ el movimiento es prógrado.

Otra observación importante es que siendo la disminución de la amplitud exponencial con la profundidad, la amplitud del movimiento de la partícula se vuelve rápidamente insignificante con la profundidad. Es por esta razón por la que se puede evaluar que la propagación de la onda afecta a una zona de superficie confinada, por lo que no está influenciada por las características mecánicas de capas más profundas que alrededor del orden de una longitud de onda.

La solución para una línea o fuente puntual de carga dinámica que actúa sobre la superficie del suelo fue resuelta por Lamb en 1904 en el trabajo previamente citado. En este sentido, es importante observar que, debido a la simetría axial del problema, la perturbación se propaga en forma de un campo de ondas anulares. La reducción de la atenuación geométrica de las ondas superficiales se puede asociar directamente a esta propiedad.

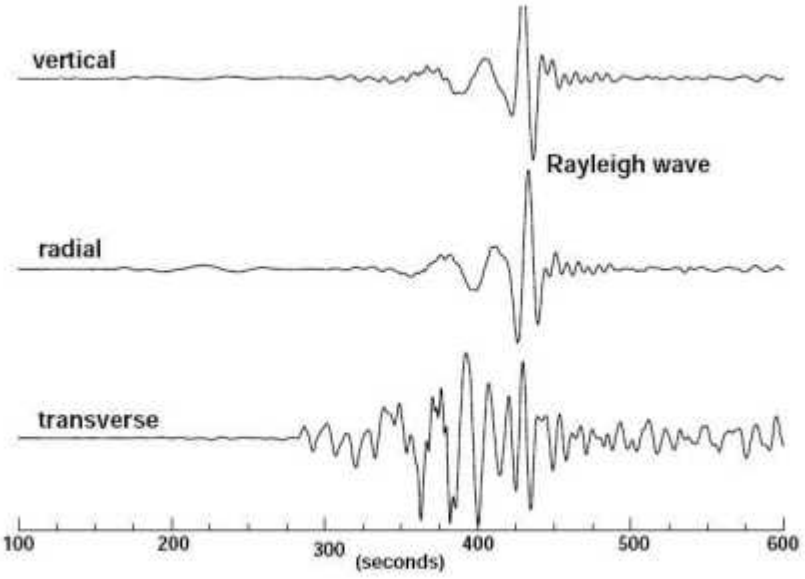


Fig (2.13): Sismograma de tres componentes que muestra las ondas Rayleigh y Love.

El factor de dispersión geométrica, es decir, el factor según el cual las ondas Se atenúan a medida que se alejan de la fuente, se puede estimar con las siguientes consideraciones físicas sobre los frentes de onda. Considerando una fuente puntual enterrada en un medio infinito, la energía liberada se extiende sobre una superficie esférica y, por tanto, su atenuación es proporcional al cuadrado de distancia de la fuente. Dado que la energía es proporcional al cuadrado de los desplazamientos, los últimos se atenúan proporcionalmente a la distancia.

Análogamente cuando las ondas de Rayleigh, son generadas por una fuente puntual que actúa en la superficie del suelo, se propagan con un frente de onda cilíndrico, su atenuación de energía y desplazamiento debe ser proporcional a la raíz cuadrada de la distancia.

En lo que respecta a la atenuación geométrica de las ondas longitudinales y de corte a lo largo de la superficie libre, no es posible una analogía con los casos anteriores, pero se puede demostrar que debido a la pérdida de energía en el espacio libre, la atenuación de desplazamiento varia con el cuadrado de la distancia (Richart et al., 1970). En resumen para un semi-espacio elástico lineal, una ley de potencia simple del siguiente tipo puede expresar la atenuación del amortiguamiento por radiación:

$$\frac{1}{r^n} \rightarrow n = \begin{cases} 2 & \text{Para ondas longitudinales y transversales en la superficie} \\ 1 & \text{Para ondas de cuerpo en el sólido} \\ 1/2 & \text{Para ondas Rayleigh} \end{cases}$$

De acuerdo con los resultados contenidos en el trabajo de Lamb, los desplazamientos a gran distancia r de una fuerza armónica puntual vertical $F_z e^{i\mu t}$ se pueden expresar como:

$$u_z = F_z \frac{b_z}{\sqrt{r}} e^{i(\omega t - kr - \pi/4)}$$
$$u_r = F_r \frac{b_r}{\sqrt{r}} e^{i(\omega t - kr + \pi/4)} \qquad (2.58)$$

Donde u_z y u_r son los desplazamientos verticales y radiales, b_z y b_r son funciones de los parámetros mecánicos del medio y k es el número de onda, definido por la relación $k = \omega / V_R$

Los dos desplazamientos están fuera de fase en 90 ° y por lo tanto, las partículas describen una trayectoria elíptica, como fue predicho para la solución del problema homogéneo relacionado con la vibración libre.

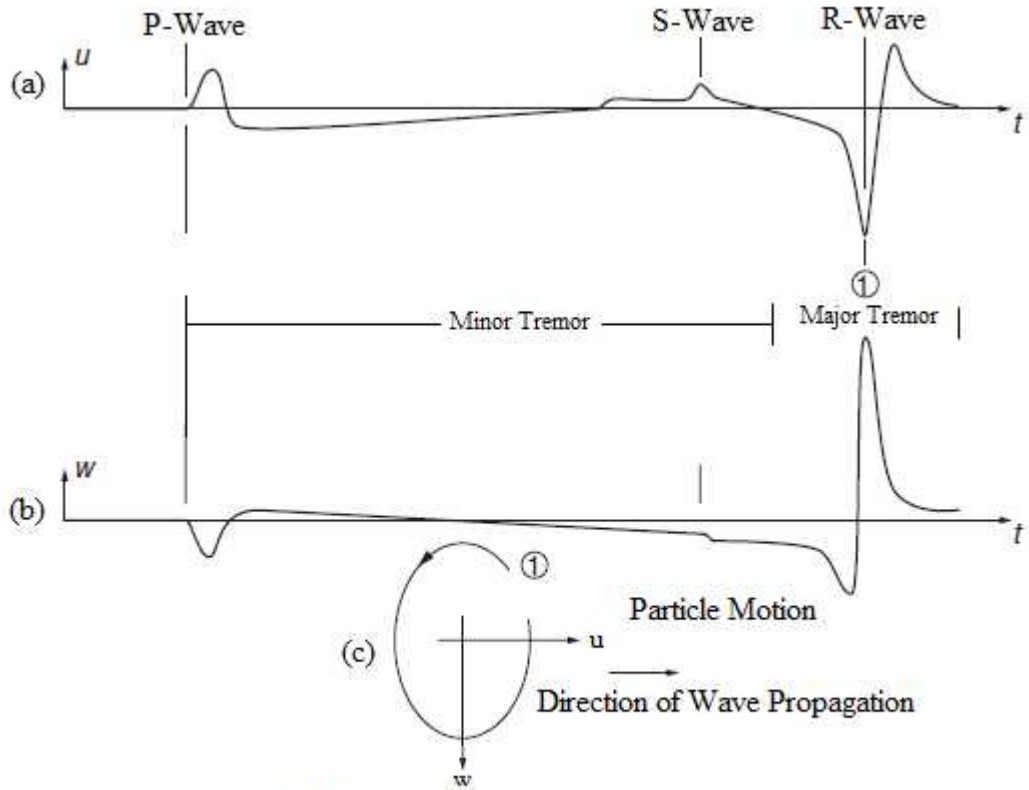


Fig (2.14): Complete wavefield predicted by Lamb (1904) for a surface point source on an halfspace. (a) horizontal radial motion; (b) vertical motion; (c) particle path of Rayleigh waves.

2.13 Ondas Love.

Las ondas transversales que se propagan polarizadas horizontalmente a lo largo de la interfase de dos medios, se conocen como ondas Love. Surgen por la existencia de un estrato sólido sobre yaciendo en la superficie de un semi-espacio, y cuya velocidad de propagación de las ondas transversales, es menor que la correspondiente al semi-espacio. La profundidad de penetración de la onda en el semi-espacio aumenta con la disminución del espesor del estrato. Cuando no existe dicho estrato, la onda Love en el semi-espacio se transforma en una onda transversal plana polarizada horizontalmente.

A diferencia de las ondas superficiales Rayleigh, que tienen un tipo de desplazamiento P-SV acoplado, las ondas Love solo contienen movimiento SH. Se puede demostrar que el movimiento de la onda superficial en la dirección transversal **y**, es imposible en un semi-espacio homogéneo. Sin embargo, las ondas superficiales SH pueden existir en un medio estratificado, en el que las ondas planas pueden viajar horizontalmente de forma que haya un reflejo crítico en el límite entre el estrato y el semi-espacio. Estas ondas requieren una estructura de velocidad que varía con la profundidad, y no pueden existir en un semi-espacio uniforme. Esto es porque la condición de esfuerzo superficial libre es incompatible con la propagación de una onda superficial de tipo SH en este medio. En este caso, las ondas se reflejan por completo en la parte superior e inferior del estrato y quedan atrapadas dentro de éste.

En términos generales las ondas superficiales se caracterizan por tener soluciones que son funciones exponenciales dependientes de la profundidad $f(z)$.

Consideremos el problema de una onda SH armónica plana que incide en el límite de dos espacios unidos en la interfase. Para resolver este problema, debemos investigar la naturaleza de las ondas críticas reflejadas.

La circunstancia más simple en la que podemos cuantitativamente analizar la propagación de las ondas Love es el caso de un estrato plano con densidad $°_1$, y velocidad de corte V_{s1}superpuesto al semi-espacio con $°_2$ y V_{s2}. Aunque la onda se refleja totalmente en la parte inferior del estrato, hay un desfase asociado con la reflexión crítica, por lo que la relación de dispersión de velocidad de fase debe introducir un desfase adicional para tener en cuenta el desplazamiento de fase de la

reflexión crítica. Si ahora consideramos el caso de las ondas del plano SH que se propagan en un estrato de baja velocidad sobre un semi-espacio, las ondas Love solo pueden ocurrir si el estrato superficial tiene una velocidad menor que todo el semi- espacio.

Las ondas Love se observaron realmente en los sismómetros mucho antes de que fueran explicadas por A.E.H. Love. Aunque es posible derivar la solución como una serie de ondas SH críticamente reflejadas, también puede obtenerse la solución mediante funciones exponenciales de la profundidad.

Para resolver problemas de ondas SH, usaremos directamente el componente de desplazamiento u_y directamente, lo que resulta más simple que emplear los potenciales $\mathbf{\Omega}_x$ y $\mathbf{\Omega}_z$ Si $\mathbf{u}_x = \left(0, u_y, 0\right)$ y $\frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$, obtenemos: $div\mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ y la ecuación de movimiento (14) para un medio isotrópico homogéneo simplifica a la ecuación de onda de corte para el componente u_y: $\nabla^2 u_y = \frac{1}{V_s^2}\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$

Las soluciones para una onda armónica Love que viaja en la dirección **y** en un estrato de espesor h que cubre un semi-espacio, en el que para todo el estrato $u_x = u_z = 0$, $u_y = u_y\left(x, y, z\right)$ y para la superficie libre $z = 0 \rightarrow ²_{zy} = 0 \rightarrow \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$ Estas condiciones de frontera se resumen mediante las ecuaciones (2.59):

$$\begin{aligned} ²_{zy}\left(x, -h, t\right) &= 0 \\ u_y\left(x, 0, t\right) &= u'_y\left(x, 0, t\right) \\ ²_{zy}\left(x, 0, t\right) &= ²'_{zy}\left(x, 0, t\right) \end{aligned} \qquad (2.59)$$

Las soluciones están dadas por:

$$u_y = \left\{ A_1 \exp\left[-kz\sqrt{1-\frac{V_L{}^2}{V_{s1}{}^2}} \right] + A_1' \exp\left[kz\sqrt{1-\frac{V_L{}^2}{V_{s1}{}^2}} \right] \right\} \exp\left[ik\left(x - V_L t\right) \right] \qquad (2.60)$$

En el semi-espacio debajo del estrato $z \succ 0$ y se omite el término que establece el crecimiento exponencial, generándose la siguiente solución:

$$u_y = A_2 \exp\left[-kz\sqrt{1-\frac{V_L{}^2}{s1^2}} \right] \exp\left[ik\left(x - V_L t\right) \right] \qquad (2.61)$$

Si en el semi-espacio la velocidad de propagación de las ondas Love es menor que la velocidad de las ondas de cortante, la amplitud del desplazamiento debe decaer exponencialmente con la profundidad debajo de la interfase, que es una condición para una onda de superficie.

Entonces $V_L = \frac{\mu}{k} \prec V_{s2} \rightarrow \sqrt{1-\frac{V_L{}^2}{V_{s2}{}^2}} \succ 0$ es real y positivo.

Al igual que en el análisis de las ondas de Rayleigh, las condiciones de esfuerzos y desplazamientos en la superficie libre deben ser compatibles. También debe garantizarse la continuidad de los desplazamientos y los esfuerzos en la interfase de los dos medios.

Únicamente los componentes tangenciales de esfuerzo y el desplazamiento no son cero para las ondas de tipo SH.

Estas soluciones son muy complejas, pero puede demostrarse que satisfacen las ecuaciones (2.14) de Navier.

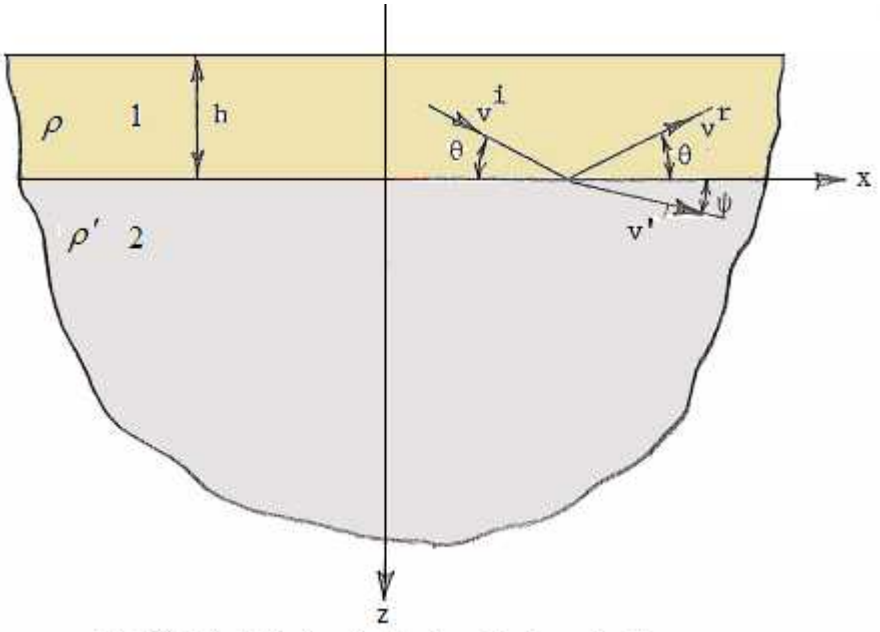


Fig (2.15): Polarizacion horizontal de ondas Love

Las ondas Love viajan más rápido que las ondas de Rayleigh, pero debido a que la velocidad de fase es dependiente de la frecuencia μ entonces las ondas de Love son dispersivas. En consecuencia, un tren de ondas lejano se puede observar desde un evento tele sísmico.

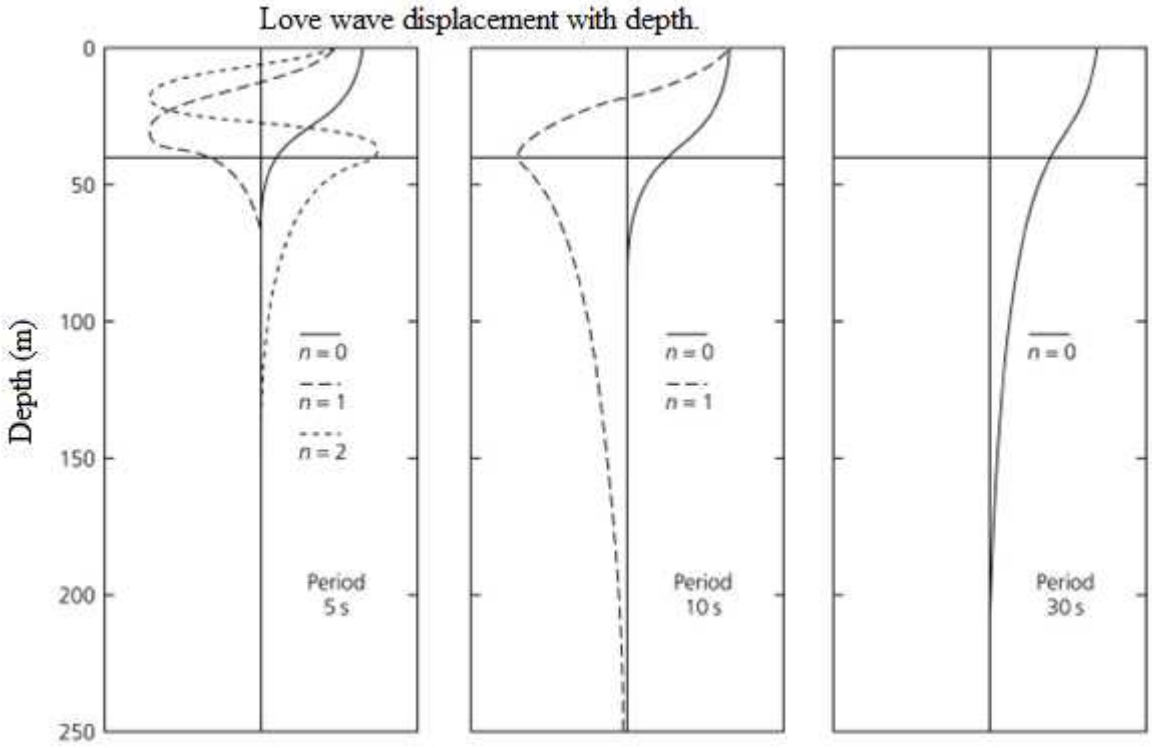


Fig (2.16): Amplitudes de desplazamientos de las ondas Love con la profundidad

3. MECÁNICA ONDULATORIA EN MEDIOS HOMOGÉNEOS ESTRATIFICADOS HORIZONTALMENTE.

3.1. Introducción.

Generalmente, en la mayoría de los casos reales, los depósitos de suelos están constituidos por formaciones estratigráficas con materiales de diferentes propiedades elásticas, por lo que es necesario estudiar la propagación ondulatoria a través de medios homogéneos e isótropos, estratificados horizontalmente. Una primera aproximación a la mecánica ondulatoria en medios estratificados, consiste en aplicar la ley de Snell a las ondas de cuerpo refractadas y reflejadas que llegan a las superficies de contacto de dos estratos con propiedades diferentes. Para la propagación de ondas en un medio sólido elástico, rigen las mismas leyes utilizadas en óptica geométrica, donde se cumple el Principio de Christian Huygens (1629-1695) enunciado en 1678, según el cual, todo punto de un frente de ondas constituye un nuevo centro generador de ondas, las cuales se expanden hacia afuera a la velocidad de la onda en ese punto, siguiendo la trayectoria de tiempo mínimo entre dos puntos según lo establece el Principio de Fermat (1650). A partir de este simple principio, Huygens pudo derivar las leyes de reflexión y refracción, pero el principio es deficiente porque no tiene en cuenta la direccionalidad de la propagación de la onda en el tiempo, es decir, no explica por qué el frente de onda en el tiempo $t+\Delta t$ es la envolvente superior en lugar de la inferior de las ondas secundarias, ni porque una onda esférica en expansión continúa expandiéndose hacia afuera desde su fuente, en lugar de volver a converger hacia adentro y hacia la fuente. Además, el principio originalmente establecido por Huygens no explica la difracción. Posteriormente, Augustin Fresnel (1788-1827) elaboró el Principio de Huygens afirmando que la amplitud de la onda en un punto dado es igual a la superposición de las amplitudes de todas las ondas secundarias en ese punto, en el entendimiento de que las ondas tienen la misma frecuencia que la onda original. El Principio Huygens-Fresnel es adecuado para explicar una amplia gama de fenómenos ópticos. Posteriormente Gustav Kirchoff (1824-1887) mostró cómo este principio puede deducirse de las ecuaciones de Maxwell.

Del Principio de Fermat se deriva la ley de la reflexión, o sea que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, y la ley de la refracción de Snell. El Principio de Fermat rige la geometría de la trayectoria del rayo, estableciendo que la energía, o rayo, siga una ruta de tiempo mínima, es decir, toma esa ruta **d** entre dos puntos, lo que requiere un tiempo de viaje extremo t, o sea el tiempo de viaje más corto o más largo posible, con $\frac{\partial t}{\partial d} = 0$

Tal camino se llama estacionario. En el caso de una ruta de tiempo estacionaria, existen tres posibilidades, dependiendo del valor (signo) de las derivadas más altas de $\frac{\partial t}{\partial d}$:

Para $\frac{\partial t^2}{\partial d^2} \succ 0$ el rayo sigue una trayectoria de tiempo mínimo, para $\frac{\partial t^2}{\partial d^2} \prec 0$ el rayo sigue una trayectoria de tiempo máximo, y para $\frac{\partial t^2}{\partial d^2} = 0$ es decir, en el caso de un punto de inflexión de la curva de tiempo de viaje, el rayo sigue una ruta de tiempo minimáx.

Las ondas de cuerpo P y S, se propagan por los suelos las rocas y la litosfera en general como un conjunto de rayos, admitiendo que las velocidades de propagación P y S aumentan con la profundidad. Una onda incidente en un límite que separa dos medios se refleja de nuevo en el primer medio y parte de la energía se transmite o refracta en el segundo. La geometría de la refracción y la reflexión se rige por Ley de Snell que relaciona los ángulos de incidencia, reflexión y refracción a las velocidades del medio.

La Fig. (2.17) ilustra la geometría del rayo para una onda incidente P en el límite entre dos medios con velocidades V_1 y V_2. Los ángulos de incidencia, reflexión y refracción, $¤_1, ¤_3, ¤_2$ respectivamente, son los ángulos que el rayo forma con la normal a la interfase. Las fundaciones para maquinas vibrantes inducen ondas P y S en el suelo de soporte. Cuando una onda P incide en un límite, en el que las propiedades elásticas cambian, se generan dos ondas reflejadas, una P, y una S y dos ondas refractadas una P y una S.

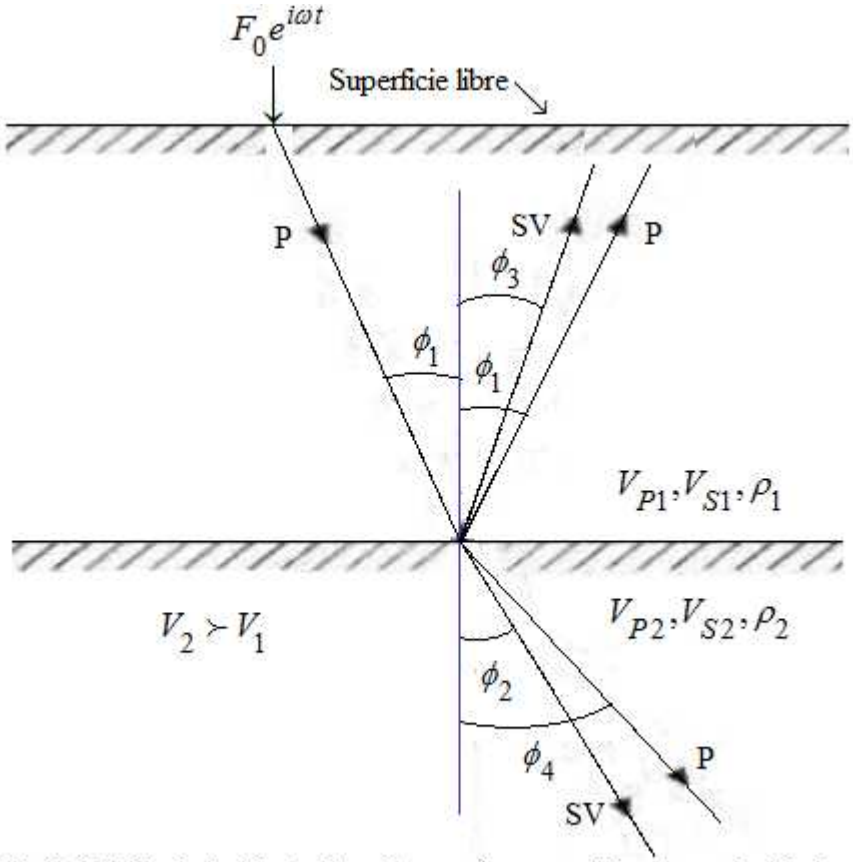


Fig (2.17): Onda incidente P en dos medios con diferentes velocidades

Los ángulos de refracción y reflexión de las ondas S son menores que el de las ondas P. Los ángulos exactos de refracción y reflexión están dados por la Ley de Snell:

$$\frac{sen\alpha_1}{V_{P1}} = \frac{sen\alpha_4}{V_{P2}} = \frac{sen\alpha_3}{V_{S1}} = \frac{sen\alpha_2}{V_{S2}} = p \qquad (2.62)$$

Donde p es conocida como la constante de propagación.

La ley de Snell requiere que el ángulo de reflexión sea igual al ángulo de incidencia. Si $V_1 \succ V_2$ el rayo se inclina hacia la normal, mientras que si $V_2 \succ V_1$ el ángulo de refracción es mayor que el ángulo de incidencia y el rayo se aleja de la normal. Cuando la velocidad de una onda reflejada o refractada es mayor que la velocidad de la onda incidente, puede haber un ángulo de incidencia

crítico $¤_c$ para el cual las ondas incidentes P o S se reflejan horizontalmente. Dicho ángulo únicamente depende de la relación de Poisson.

El ángulo critico se define mediante la ley de Snell como $¤_c = \sin^{-1}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$

Para ondas de dilatación $¤_c = \sin^{-1}\left(\frac{V_P}{V_S}\right)$

Para ondas de cortante $¤_c = \sin^{-1}\left(\frac{V_S}{V_P}\right)$

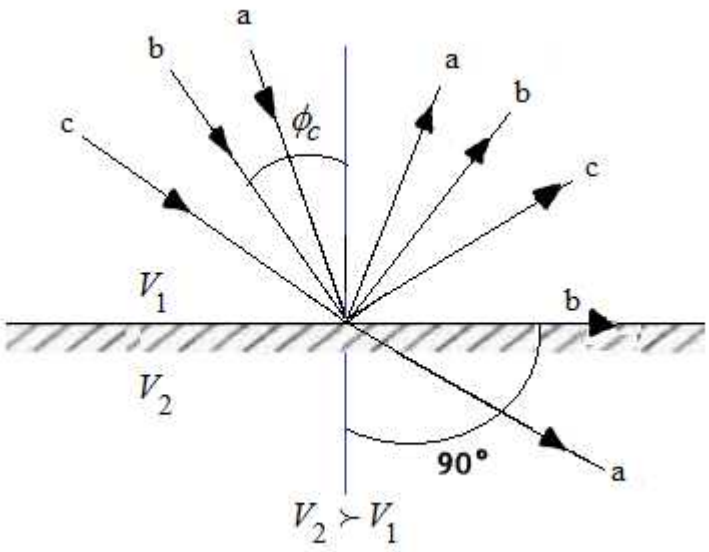


Fig (2.18): Angulo de incidencia critico

De manera simple, partiendo del análisis de refracción y reflexión que experimentan cada una de las ondas de cuerpo, puede conocerse lo que sucede cuando llegan a las superficies de contacto de dos estratos con propiedades diferentes. Para discurrir sobre la división de la energía que se origina en el punto de incidencia, deberá considerarse inicialmente el caso particular de la descomposición de las ondas P y S al llegar a una superficie libre. Para ello conviene tener en

cuenta que las ondas cortantes S se pueden descomponer en una componente paralela a la superficie, ondas SH, y en otra contenida en el plano vertical, ondas SV. Cuando una onda dilatante P incide sobre la superficie libre del semiespacio, parte de la energía se refleja a través de una onda cortante SV y parte a través de una onda P.

Al llegar una onda P sobre la superficie de contacto, se producen cuatro tipos de ondas según se ilustra en la Fig. (2.19); dos ondas SV (una reflejada [P-SV1] y otra refractada [P-SV2]) y dos ondas P (una reflejada [P-P1] y otra refractada [P-P2]).

Para una onda SV incidente habrá cuatro ondas resultantes: una onda SV reflejada (SV-SV1), otra onda SV refractada (SV-SV2), una onda P reflejada (SV-P1) y una onda P refractada (SV-P2)

En cuanto a las ondas incidentes SH, parte de la energía es reflejada (ondas SH-SH1) y parte refractada (SH-SH2), pero nuevamente sólo a través de ondas SH; la razón de no producir ondas P se debe a que las ondas SH no tienen componente normal en el plano de contacto.

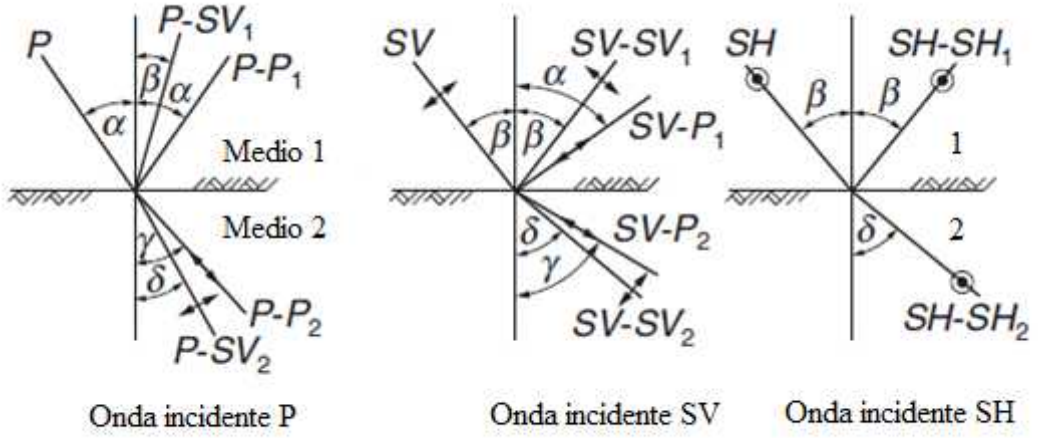


Fig (2.19): Reflexión y refracción de ondas P y ondas S en la interfase de dos medios.

“Cuando la onda incidente es del tipo SH, con movimiento perpendicular al plano de la figura, las ondas reflejadas y refractadas son también SH. Para ciertas combinaciones de módulos de rigidez y densidades en los dos medios, hay un valor único del ángulo de incidencia para el cual no existe onda reflejada. Si los módulos de rigidez y las densidades no satisfacen esa relación específica, siempre se presenta una onda reflejada.

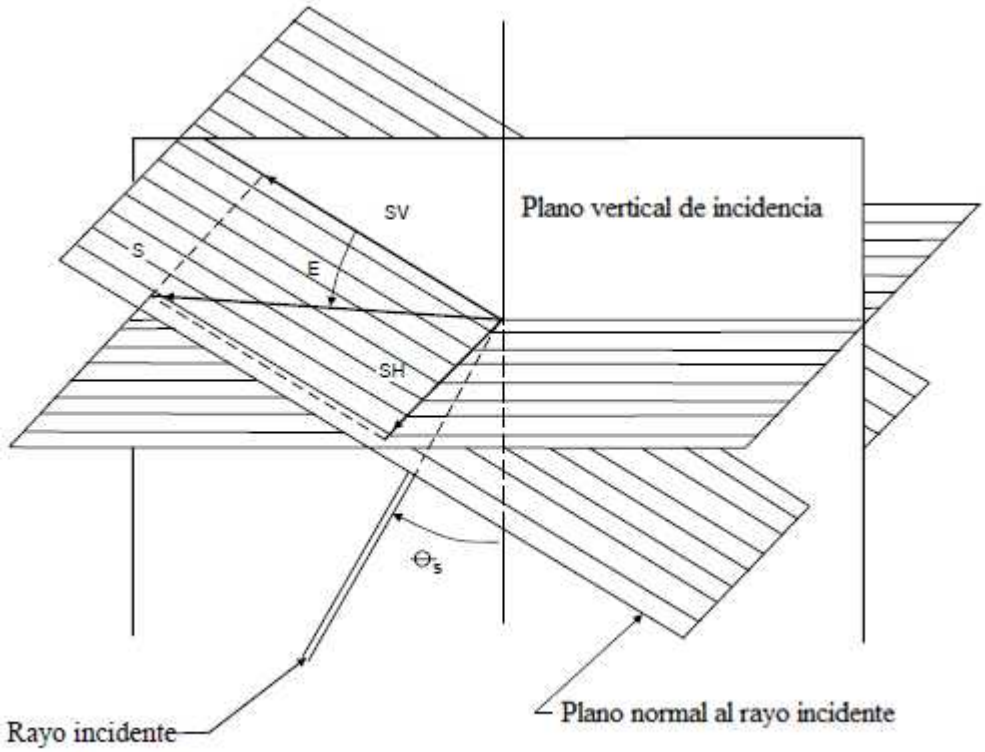


Fig (2.20): Mooney, H.M. (1973)
Handbook of Engineering Geophysics. Bison Instruments, Inc.

Sin embargo, si la velocidad de las ondas de cortante en el segundo medio excede a la velocidad del medio del cual procede la onda, existe una amplitud de variación de ángulos de incidencia para los cuales no se originan ondas refractadas.

En vez de ellas, el arribo de la onda SH hace surgir, en el segundo medio, un movimiento en la interfase cuya amplitud disminuye exponencialmente a partir de la frontera y que se mueve con la velocidad de la onda incidente proyectada sobre la interfase. En este caso hay reflexión total de la onda incidente, generalmente con un cambio de la fase.

Una onda incidente P puede originar ondas P y SV, mas no SH, reflejadas y refractadas. Para las incidencias normales y a ras, no se producen ondas SV, pero en todos os demás casos se reflejan ondas de este tipo. Cuando es válida la relación de Poisson, existen dos valores del ángulo de incidencia para los cuales no hay ondas P reflejada, y para todos los valores intermedios del ángulo de incidencia los valores de la onda P reflejada es muy pequeña. Si la relación de Poisson no es exactamente válida, siempre se presenta una onda reflejada P, pero para una amplia gama de ángulos la energía asociada a ella es menor que la mitad de la onda reflejada SV.

Para una onda incidente SV, las reflexiones y refracciones pueden ser SV o P pero no SH. La ausencia o pequeña magnitud de la onda reflejada P con relación a la SV cuando la perturbación incidente es del tipo P, es válida cuando es del tipo SV. Como en el caso de la onda incidente SH, hay condiciones de reflexión total con el cambio usual de fase y una perturbación exponencialmente decreciente en el segundo medio cerca de la interfase.

Usualmente una onda P o S induce tanto ondas P como S reflejadas y refractadas, salvo para ángulos grandes entre la onda incidente y la normal a la interfase.

Sin embargo, una onda que viaja normalmente a la interfase origina solamente ondas de su misma clase y, en todos los casos, la componente más importante del movimiento refractario es de la misma clase que la onda incidente. Estas consideraciones, unidas a que la velocidad de la onda es función casi siempre creciente con la profundidad y a que los depósitos blandos y potentes están limitados por superficies casi horizontales (la superficie libre y la superior de la roca basal ya que de otra manera se erosionarían), hacen palpable que en su mayoría los efectos de los fenómenos de reflexión múltiple pueden estudiarse adecuadamente bajo la suposición de que se trata de ondas que viajan verticalmente.” [24]

Para formaciones con estratos múltiples, son válidos los principios que rigen para el caso de dos estratos refractarios superpuestos. La geometría de refracción para los estratos más profundos se torna un poco más compleja que la correspondiente al caso de un estrato superficial cimentado sobre una formación más rígida.

Cuando existen varios estratos se tendrán múltiples refracciones y reflexiones, (según puede observarse en gráfico de Richart, Hall y Woods 1970), y el problema de propagación de ondas se torna más complejo. Previamente se estableció que cuando el estrato superior es menos rígido que el que lo subyace, puede generarse el tipo de onda superficial Love; originadas por las reflexiones totales múltiples de la capa superior las que se desplazan horizontalmente y producen movimientos transversales horizontales. Esta es una clase de onda cortante polarizada horizontalmente confinada en la capa superficial, originada por las reflexiones totales múltiples.

Para altas frecuencias de excitación, la velocidad de propagación de las ondas Love se aproxima asintóticamente a la velocidad de propagación de las ondas cortantes en el estrato superior, mientras que para bajas frecuencias dicha aproximación representa la velocidad de las ondas cortantes en el estrato inferior.

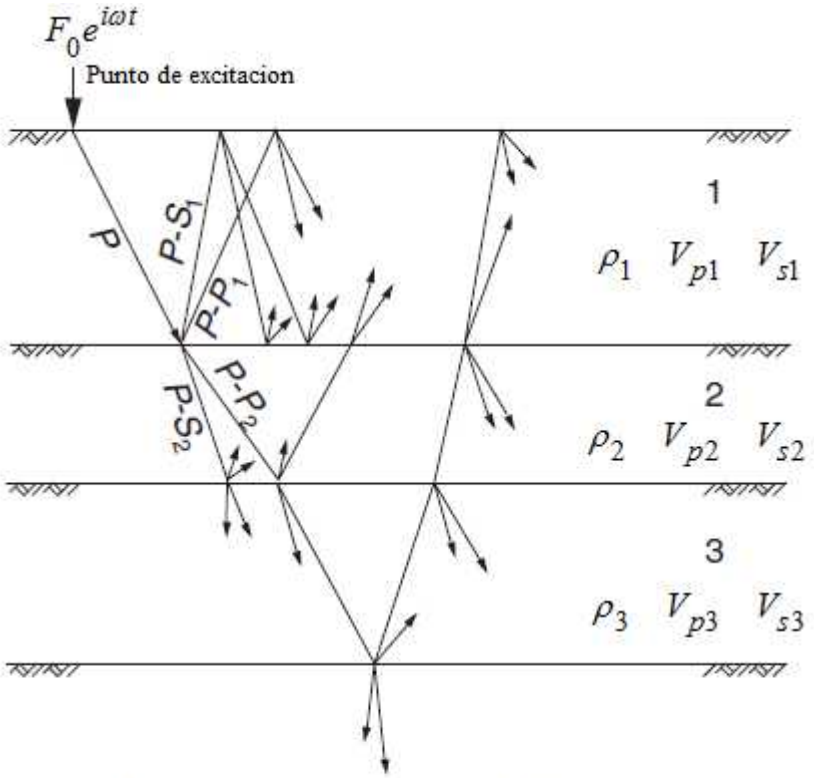


Fig (2.21): Reflexion y refracción múltiple de ondas en un sistema estratificado.
Segun Richart, F.E., Hall,J.R., y Woods, R.D.
Vibrations of Soils and Foundations, 1970.

3.2. Reflexión y refracción de ondas planas en un semi-espacio de estratos horizontales homogéneos y finitos de suelos.

La propagación de ondas en medios no homogéneos que exhiben discontinuidad de las propiedades elásticas del material, como el caso de las formaciones de suelos estratificados horizontalmente, constituyen un caso particular de la propagación de ondas en medios continuos. Para los efectos prácticos, se asume que cada estrato es homogéneo e isótropo, y que las ondas

viajan verticalmente. En una interfase entre dos estratos generalmente hay un cambio en la velocidad de propagación debido a la diferencia en las propiedades físicas de los dos medios. En los casos donde la variación de las propiedades ocurre como discontinuidades discretas en el medio, la derivación de las ecuaciones lineales de onda, (2.19) y (2.23), no es válida en la discontinuidad misma, y el problema, por lo tanto, tiene que formularse como un problema de valor límite. Para medios continuamente variables, la dependencia del espacio es directamente incluido en la ecuación de onda.

Cuando una onda elástica incide en la interfase, la energía transmitida por la onda incidente se divide en ondas refractadas y reflejadas. Las amplitudes relativas de los impulsos transmitidos y reflejados dependen de las velocidades V, de las densidades ρ y del angulo de incidencia ¤$_i$ El caso más simple es el de una onda incidente normal donde todas las ondas serán P o S. La energía total de los rayos refractados y reflejados, debe ser igual a la energía del rayo incidente.

Definiendo la impedancia acústica de propagación de la onda entre dos medios separados por una interfase como ~ $= \frac{°_2 V_2}{°_1 V_1}$ los coeficientes de reflexión y de refracción ¥ entre los dos medios para incidencia normal se expresan como:

$$= \frac{°_2 v_2 - °_1 v_1}{°_2 v_2 + °_1 v_1} = \frac{1-\sim}{1+\sim} \qquad -1 \prec \quad \prec 1 \qquad (2.63)$$

$$¥ = \frac{2\,°_1 v_1}{°_2 v_2 + °_1 v_1} = \frac{2}{1+\sim} \qquad (2.64)$$

Un valor negativo de significa un cambio de fase de 180 grados en el rayo reflejado.

Las ecuaciones de onda (2.19) y (2.23), admiten soluciones de la siguiente forma sencilla:

$$u(x,t) = f_1(x - Vt) + f_2(x + Vt) \qquad (2.65)$$

Donde f_1 y f_2 son funciones arbitrarias que admiten segundas derivadas. El segundo miembro de esta ecuación expresa dos oscilaciones que se propagan en los sentidos positivo y negativo del eje OX, con velocidad V_s, por lo que estos dos términos se conocen como ondas de propagaciones hacia delante y hacia atrás.

Se ha establecido que la vibración de los estratos horizontales de suelo, puede tratarse como un problema de propagación de ondas de cortante en una dirección vertical.

Para el estrato de suelo mostrado en la Fig. (2.22), una onda incidente propagándose hacia arriba en el terreno se convierte en una onda reflejada cuando alcanza la superficie libre, lo cual nos permite definir la relación entre las funciones f1 y f2 a partir de las condiciones de frontera en la superficie libre.

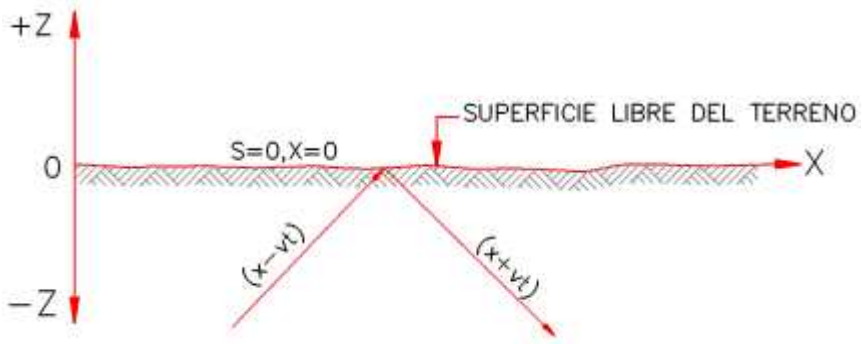


Fig. (2.22): Reflexión de una onda S en la superficie libre del suelo.

En la superficie libre z = 0, y el esfuerzo cortante $G\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, condiciones que al sustituirse en la ecuación (2.65), nos conducen a la igualdad siguiente:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t} \rightarrow \qquad f_1 = f_2$$

Si u_g es la forma de la onda en la superficie: $u_g(0,t) = 2f(t)$

El desplazamiento en el instante t, es el promedio de los desplazamientos de la superficie libre en tiempos anteriores y posteriores.

$$u(z,t) = \frac{1}{2}\left[u_g(z-Vt) + u_g(z+Vt)\right] \qquad (2.66)$$

La propagación de ondas para los dos estratos se expresa como:

$$u_1 = f_1\left(t - \frac{z}{V_1}\right) + g_1\left(t + \frac{z}{V_1}\right) \qquad (2.67)$$

$$u_2 = f_2\left(t - \frac{z}{V_1}\right) \qquad (2.68)$$

En la superficie de la interfase, los esfuerzos y las deformaciones por cortante son idénticos, por lo que las condiciones de compatibilidad son:

$$u_1(0) = u_2(0)$$

(2.69)

$$G_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = G_2 \frac{\partial u_2}{\partial z}$$

Al sustituir las Ecs (2.67) y (2.68) en la Ec (2.69), y considerando la ecuación de onda de

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = \frac{G}{\circ}\frac{\partial u_z}{\partial x^2}$$

distorsión:

Se obtiene:

$$f_2\left(t-\frac{z}{V2}\right)=\frac{2}{1+\sim}\,f_1\left(t-\frac{x}{V_1}\right) \qquad (2.70a)$$

$$g_1\left(t+\frac{z}{V1}\right)=\frac{1-\sim}{1+\sim}\,f_1\left(t+\frac{x}{V_1}\right) \qquad (2.70b)$$

$\sim=\frac{°_2V_2}{°_1V_1}$ Representa la impedancia de propagación de la onda.

$=\frac{1-\sim}{1+\sim}$ Es el coeficiente de reflexión de la onda.

¥ $=\frac{2}{1+\sim}$ Es el coeficiente de transmisión de la onda.

Previamente definidos mediante las ecuaciones (2.63) y (2.64)

Tanto la onda incidente como la transmitida y la reflejada tienen la misma forma.

Para el caso de un estrato único de suelo cimentado sobre un estrato rocoso, a como se muestra en la Fig. (2.23), la forma de la onda en el punto z_2 del estrato superficial, de acuerdo con la Ec (2.66), puede expresarse en términos de la onda superficial u_g esto es:

$$u_2(t,z_2)=0.5\left[u_g\left(t-\frac{z_2}{V_2}\right)+u_g\left(t+\frac{z_2}{V_2}\right)\right] \qquad (2.71)$$

Análogamente la forma de la onda en el punto z_1, contenido en el estrato rocoso es la siguiente:

$$u_1(t,z_1)= f_1\left(t-\frac{z_1}{V_1}\right)+g_1\left(t+\frac{z_1}{V_1}\right) \qquad (2.72)$$

En la interfase entre los estratos, las condiciones de compatibilidad son las expresadas por la Ec (2.73):

$$u_2(t,-h)=u_1(t,0) \quad (2.73)$$

$$G_2\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right)u_2(t,-h)=G_1\frac{\partial}{\partial z_1}u_1(t,0)$$

De acuerdo con las Ecs. (2.71), (2.72) y (2.73) podemos escribir:

$$f_1(t)=\frac{1}{4}\left[(1+\sim)u_g\left(t+\frac{h}{V_2}\right)+(1-\sim)u_g\left(t-\frac{h}{V_2}\right)\right] \qquad (2.74)$$

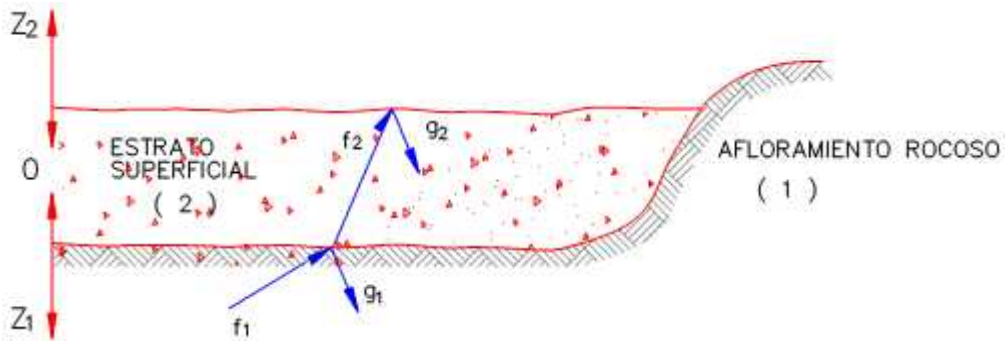


Fig. (2.23): Propagación ondulatoria en un estrato de suelo homogéneo cimentado sobre roca.

Si la forma de la onda superficial es:

$$u_g = A_g e^{i\mu t} \qquad (2.75)$$

Y la de la onda incidente es: $f_1(t) = Ae^{i\mu t}$

Entonces:

$$A = \frac{A_g}{4}\left[(1+\sim)e^{\frac{i\mu h}{V_2}} + (1-\sim)e^{-\frac{i\mu h}{V_2}}\right] = \frac{A_g}{2}\left[\cos\left(\frac{\mu h}{V_2}\right) + i\sim sen\left(\frac{\mu h}{V_2}\right)\right]$$

La relación entre la amplitud en la superficie A_g y la amplitud 2A en la frontera, puede escribirse del siguiente modo:

$$\frac{A_g}{2A} = \left[\cos^2\left(\frac{\mu h}{V_2}\right) + \sim^2 sen^2\left(\frac{\mu h}{V_2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.76)$$

La Ec (2.76) expresa el cambio experimentado en la amplitud de la onda incidente por efecto de la existencia del estrato superficial de suelo de espesor h, subyacente a la roca.

Las curvas de la Fig. (2.24), muestran la relación entre la frecuencia circular natural del estrato ω y la amplificación dinámica del mismo para diferentes valores de la impedancia α.

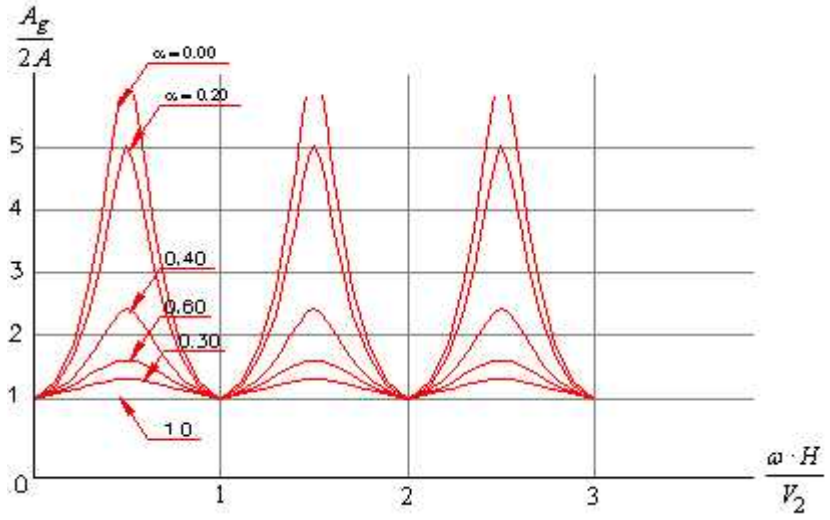


Fig. (2.24): Amplificación dinámica del estrato de suelo superficial de la Fig. (2.23).

La condición resonante ocurre cuando la frecuencia circular de la onda incidente **ω** coincide con una de las frecuencias circulares naturales del estrato:

$$\mu_n = \frac{(2n-1)\circledR V_2}{2h} \qquad (2.77)$$

$$n = (1,2,3.....n)$$

Donde n denota el modo de vibración del estrato de suelo.

Los periodos predominantes de vibración del estrato de suelo son los siguientes:

$$T_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{4h}{V_2}\right) \qquad (2.78)$$

Este procedimiento puede emplearse para calcular los periodos de vibración en el caso de que existan varios estratos de suelos subyaciendo sobre un basamento rocoso.

Hemos mostrado algunas aplicaciones importantes de la ecuación sencilla para la propagación de ondas de cortante S a través de formaciones estratigráficas de suelo, verificándose que las Ecs (2.65) y (2.67) son soluciones generales de la ecuación de onda.

La potencia de un estrato de suelo sobre lecho rocoso rígido tiene un efecto significativo en su comportamiento dinámico, cuando su frecuencia natural coincide con valores de frecuencias críticas inducidas, ya que tal coincidencia genera resonancia. Tales casos incluyen; fundaciones para máquinas, donde las vibraciones del suelo pueden ocasionar daños severos para las estructuras vecinas y personas. El caso de una carga en movimiento, como un tren sobre la capa de suelo que cubre el lecho de roca es otro ejemplo. Se presentan análisis analíticos y numéricos para determinar el efecto del espesor crítico del estrato.

La profundidad crítica asociada con una carga vertical con una frecuencia fija μ que actúa sobre una capa de suelo se deduce de la ecuación (2.45): $h_n{}^{v} = \frac{V_s}{4\mu}(2n-1)$ De manera similar al caso de carga vertical, la expresión para la profundidad crítica asociada con la carga horizontal con una frecuencia fija μ que actúa sobre un estrato de suelo se deduce de la ecuación (2.45) como: $h_n{}^{h} = \frac{V_s}{4\mu}(2n-1)$

3.3. Solución en términos de frecuencias para dos estratos de suelos.

Ahora será analizado el comportamiento dinámico para dos estratos de suelos en términos de frecuencias, como se hizo para el estrato único homogéneo. Si consideramos una onda incidiendo en la interfase del sistema en capas, parte de esa onda incidente se reflejará hacia atrás y la otra parte viajará a la capa inferior. La onda transmitida a través de la capa inferior se reflejará en el lecho de roca y se refractará nuevamente en la interfase de los dos estratos. Hadjian [25] estimó el período fundamental de un perfil de suelo en capas mediante una relación aproximada que implica el espesor y el período fundamental de cada estrato de suelo y otros dos parámetros que representan la proporción entre los espesores de los estratos de suelo. Hadjian obtuvo una fórmula que estima el período fundamental de un perfil de suelo estratificado que puede usarse en programas informáticos. Las frecuencias fundamentales equivalentes tienen las siguientes expresiones:

$$\mu = \frac{\mu_1}{\sqrt{\frac{®^2}{8}\left[0.75+\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2\left(1+2\frac{°_1 H_1}{°_2 H_2}\right)\right]}} \quad \text{Para } \frac{H_1}{H_2} \succ 1 \quad (2.79)$$

$$\mu = \frac{\mu_1}{\sqrt{\left[1+\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^n\left(1+2\frac{°_1 H_1}{°_2 H_2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}}} \text{ Para } \frac{H_1}{H_2} \le 1 \quad (2.80)$$

Dónde: $= 1-0.2\left(\frac{H_1}{H_2}\right)^2$ y $n = 4-1.8\left(\frac{°_1 H_1}{°_2 H_2}\right)$

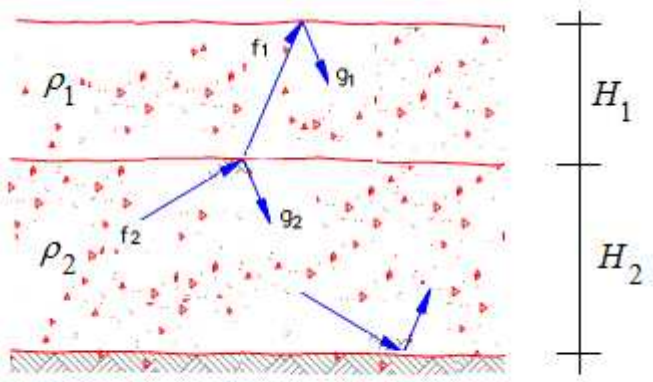


Fig (2.25): Transmision de ondas en dos estratos con diferentes propiedades.

Las frecuencias fundamentales μ_1 y μ_2 están relacionadas con las capas superior e inferior, respectivamente. La solución analítica derivada de la referencia [25] tiene la capacidad de predecir la frecuencia fundamental de un suelo de dos capas con un error marginal. Esto podría generalizarse para un perfil de suelo estratificado, para el cual el período o frecuencia fundamental del perfil podría ser estimado mediante el uso sucesivo de soluciones para dos estratos. Vale referir que el error inducido se debe al hecho de tomar los dos primeros términos en el desarrollo de la serie coseno.

En términos generales, el período fundamental o frecuencia, es la característica dinámica más importante de las formaciones de suelos, ya que la respuesta será para la frecuencia o el periodo fundamental de vibración. Sin embargo, a veces el segundo valor de la frecuencia natural también podría ser de importancia práctica, pero la solución antes mencionada no puede cuantificar esta frecuencia. En las ecuaciones anteriores, se consideró la respuesta no amortiguada que es admisible para los efectos prácticos.

3.4. Reflexión y refracción de ondas SH para dos estratos de suelos.

El desplazamiento u_0 de la onda incidente SH en dirección **y** es:

$$u_0 = C_0 e^{i\mu\left(t-\frac{sin¤}{V_{s1}}x-\frac{cos¤}{V_{s1}}z\right)} \qquad (2.81$$

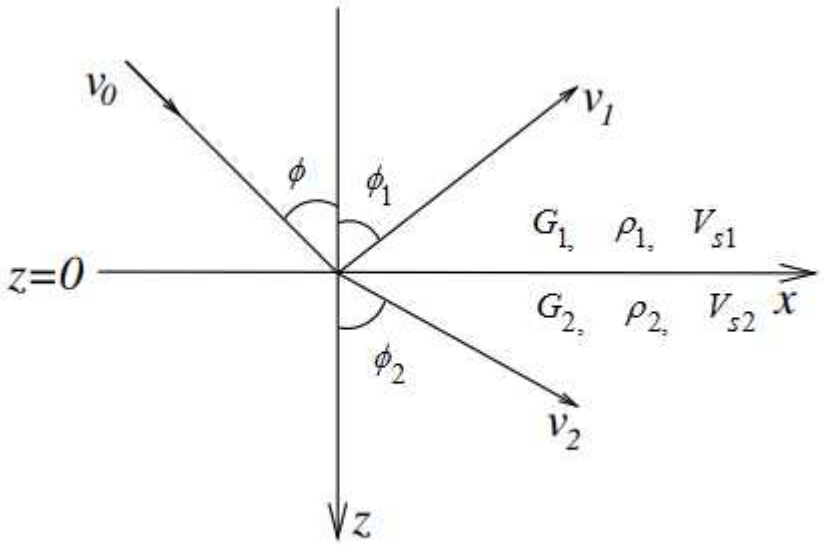


Fig (2.26): Reflexión y refracción de ondas SH.

El enfoque para la onda SH reflejada y refractada como ondas planas con ángulo de reflexión $¤_1$ y ángulo de refracción $¤_2$, respectivamente, y la misma frecuencia que la onda incidente es:

Reflexión $$u_1 = C_1 e^{i\mu\left(t - \frac{\sin\alpha_1}{V_{s1}}x - \frac{\cos\alpha_1}{V_{s1}}z\right)} \qquad (2.82)$$

Refracción $$u_2 = C_2 e^{i\mu\left(t - \frac{\sin\alpha_2}{V_{s2}}x - \frac{\cos\alpha_2}{V_{s2}}z\right)} \qquad (2.83)$$

Las incógnitas son los ángulos α_1 y α_2, el coeficiente de reflexión $= \frac{C_1}{C_0}$ y el coeficiente de refracción $\gamma = \frac{C_2}{C_0}$

Las condiciones de contorno requieren en z = 0 la continuidad del desplazamiento, y la continuidad para las tensiones normales y tangenciales, lo que conduce a las siguientes ecuaciones de compatibilidad:

$$\left.\begin{array}{c} u_0 + u_1 = u_2 \\ G_1 \frac{\partial}{\partial z}\left(u_0 + u_1\right) = G_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \end{array}\right\} \quad \text{Para } z = 0 \qquad (2.84)$$

Los componentes de esfuerzo σ_{zz} y τ_{zx} son cero en todas partes, ya que no se generan ondas P o SV. Reemplazando las ecuaciones (2.81), (2.82) y (2.83), en la primera de las condiciones de frontera en la ecuación (2.84), se obtiene:

$$C_0 e^{i\mu\left(t - \frac{\sin\alpha}{V_{s1}}x\right)} + C_1 e^{i\mu\left(t - \frac{\sin\alpha_1}{V_{s1}}x\right)} = C_2 e^{i\mu\left(t - \frac{\sin\alpha_2}{V_{s2}}x\right)} \qquad (2.85)$$

Planeamos encontrar las soluciones u_1 y u_2 del problema, para las cuales las amplitudes C_1 y C_2 son independientes de la ubicación, ya que solo entonces podemos estar seguros de que u_1 y u_2 son soluciones de la correspondiente ecuación de onda. C_1 y C_2 son independientes de la ubicación si para la ecuación (2.85) se cumple la ley de Snell, que establece que el ángulo de reflexión $¤_1$ es igual al ángulo de incidencia $¤$ ya que solo entonces el término exponencial puede cancelarse.

$$\frac{sin¤}{V_{s1}} = \frac{sin¤_1}{V_{s1}} = \frac{sin¤_2}{V_{s2}}$$

Para el ángulo de refracción $¤_2$ se cumple $\frac{sin¤_2}{sin¤} = \frac{V_{s2}}{V_{s1}}$

Con la ecuación (2.85) esto conduce a $C_2 - C_1 = C_0$ (2.86)

La segunda ecuación de la condición de frontera (2.85), permite la siguiente relación:

$$G_1 i\mu \left(-\frac{\cos¤}{V_{s1}} C_0 + \frac{\cos¤_1}{V_{s1}} C_1 \right) = G_2 i\mu \frac{\cos¤_2}{V_{s2}} C_2$$

Con $¤_1 = ¤$, $\frac{G_{1,2}}{V_{s1,2}} = \frac{°_{1,2}}{V_{s1,2}}$ lo que permite deducir la siguiente relación:

$$°_1 V_{s1} \cos¤ \left(C_1 - C_0 \right) = °_2 V_{s2} \cos¤_2 C_2$$

O bien: $$\frac{\rho_2 V_{s2}\cos\varphi_2}{\rho_1 V_{s1}\cos\varphi} C_2 + C_1 = C_0 \qquad (2.87)$$

De (2.86) y (2.87) se obtienen los coeficientes de reflexión y refracción generalizadas:

$$= \frac{C_1}{C_0} = \frac{\rho_1 V_{s1}\cos\varphi - \rho_2 V_{s2}\cos\varphi_2}{\rho_1 V_{s1}\cos\varphi + \rho_2 V_{s2}\cos\varphi_2} \quad (2.88)$$

$$¥ = \frac{C_2}{C_0} = \frac{2\rho_1 V_{s1}\cos\varphi}{\rho_1 V_{s1}\cos\varphi + \rho_2 V_{s2}\cos\varphi_2} \quad (2.89)$$

Para incidencia vertical $\varphi = 0$ y las ecuaciones (2.88) y (2.89) reproducen las ecuaciones (2.63) y (2.64).

Aquí se determinarán las soluciones para las ondas reflejadas que resultan cuando la onda plana de compresión P o de corte S de estado estacionario, incide en el límite libre de un semi- espacio de material elástico.

Basándonos en las condiciones de equilibrio y continuidad que deben existir en la interfase entre el estrato de suelo y el basamento rocoso mostrado en la Fig. (2.27), determinaremos las relaciones existentes entre las direcciones de las ondas reflejadas, refractadas y la onda incidente, las cuales son sencillas y de especial interés cuando se trata de ondas elásticas que arriman a una interfase casi plana.

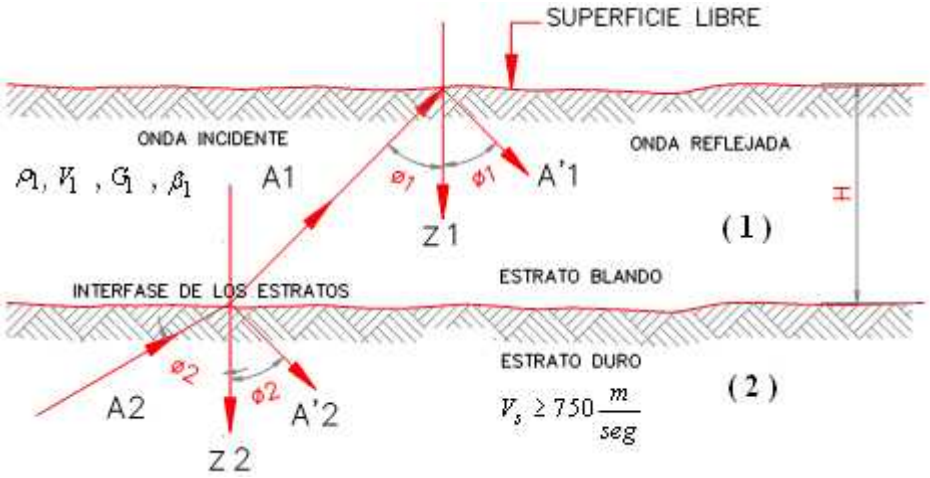


Fig. (2.27): Reflexión y refracción de ondas en una interfase plana.

Definiendo el vector característico de configuraciones modales como $u_n(z)$, entonces los desplazamientos totales u (z, t) pueden escribirse en la siguiente forma compleja:

$$u(z,t) = u_n e^{i\mu t} \qquad (2.90)$$

La cual es una solución que satisface la Ec (1.29), por lo que es necesario efectuar doble derivación respecto a las variables (z, t), obteniendo las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\mu_n{}^2 (z) e^{i\mu t} \qquad (2.91) \qquad \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} = \frac{d^2 u_n}{dz^2}(z) e^{i\mu t} \qquad (2.92)$$

Llevando las Ec (2.91) y (2.92) a la ecuación de ondas de distorsión, resulta la siguiente ecuación diferencial ordinaria, homogénea de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \left(\frac{\mu_n{}^2}{V^2} \right) u_n = 0 \qquad (2.93)$$

Cuya solución es de la forma siguiente:

$$u_n(z) = A_1 sen(pz) + A'_1 \cos(pz) = A_2 e^{i\mu t} + A'_2 e^{-i\mu t} \qquad (2.94)$$

En esta solución $p_n = \frac{\mu_n}{V}\cos ¤$ es la constante de propagación del medio considerado, siendo ¤ el ángulo formado entre el haz de ondas incidentes y reflejadas con la línea normal a la interfase entre dos medios elásticos 1 y 2 tal como se aprecia en la Fig. (2.27)

A y A' son constantes arbitrarias dependientes de las condiciones de fronteras, y representan a como vimos anteriormente, las amplitudes de las ondas viajando hacia arriba y hacia abajo respectivamente.

Tomando únicamente la parte real de la solución (2.94), se obtiene la siguiente ecuación:

$$u_n(z) = A_2 \cos(pz) \qquad (2.95)$$

Siendo

$$A_2 = (A_1 + A_1') \quad \text{Y} \quad A'_2 = (A_1 - A'_1)i$$

Entonces la solución de la Ec (1.63) es la siguiente:

$$u(z,t) = A_2 e^{i\mu t} \cos(pz) \qquad (2.96)$$

En la superficie libre del estrato de suelo, las amplitudes son iguales, esto es A2 = A'2, y en la interfase entre los estratos, la continuidad del desplazamiento y del esfuerzo cortante requieren

del cumplimiento de las condiciones de compatibilidad expresadas mediante las Ec (2.69), las cuales aplicamos considerando las condiciones de fronteras definidas:

$$uz_2(H) = uz_1(0) \qquad (2.97) \qquad {}^{2}z_2(H) = {}^{2}z_1(0) \qquad (2.98)$$

La condición (2.97) implica que: $A_1\left(e^{ip_1H_1} + e^{-ip_1H_1}\right)u_1(z,t) = \left(A_2 + A'_2\right)u_2(z,t)$ (2.99)

Como la identidad (2.99), es satisfecha para cualquier valor (z, t), tenemos que:

$$\frac{i\mu}{V_1}sen\alpha_1 = \frac{i\mu}{V_2}sen\alpha_2 \quad (2.100) \qquad A_1\left(e^{ipz} + e^{-ipz}\right) = A_2 + A'_2 \quad (2.101)$$

Donde p es la constante de propagación del medio considerado expresada por la Ec (2.94).

Si se cumplen las dos condiciones impuestas de continuidad para los desplazamientos y esfuerzos cortantes, determinadas por las ecuaciones (2.97) y (2.98), la ecuación (2.100) expresa la ley de Snell, la cual define las relaciones existentes entre las direcciones de ondas incidentes, reflejadas y refractadas, para el caso de ondas planas que arriman a una interfase casi plana como la de la Fig. (2.27).

$$\frac{sen\alpha_1}{V_1} = \frac{sen\alpha_2}{V_2} = p \qquad (2.102)$$

Según esta Ley, el seno del ángulo ϕ formado por la dirección de propagación de cualquier onda - sea esta incidente, reflejada o refractada – con la normal a la interfase entre dos medios elásticos, es proporcional a la velocidad de propagación V_S de la onda, en el medio estratigráfico considerado. La condición de continuidad de los esfuerzos cortantes expresada mediante la Ec (2.98), genera la siguiente ecuación:

$$A_1 G_1 H_1 \left(e^{ip_1 H_1} - e^{-ip_1 H_1} \right) = iG_2 p_2 \left(A_2 - A'_2 \right) \qquad (2.103)$$

Combinando las Ecs. (2.98) y (2.103) obtenemos entonces las relaciones (2.104) y (2.105):

$$A_2 + A'_2 = A_1 \left(e^{ip_1 H_1} + e^{-ip_1 H_1} \right) \qquad (2.104)$$

$$A_2 - A'_2 = A_1 \left(e^{ip_1 H_1} - e^{-ip_1 H_1} \right) \left(\frac{G_1 p_1}{G_2 p_2} \right) \qquad (2.105)$$

El término $G_1 p_1 / G_2 p_2$ es la relación de admitancia entre el suelo y la roca, y se define como:

$$q = \frac{G_1 p_1}{G_2 p_2} = \frac{G_1 V_2 \cos ¤_1}{G_2 V_1 \cos ¤_2} = \sqrt{\frac{°_1 G_1}{°_2 G_2}} \frac{\cos ¤_1}{\cos ¤_2} \qquad (2.106)$$

Al parámetro $\sim = \frac{1}{q}$ se le llama relación de impedancia, contenidos en las Ecs (2.70a) y (2.70b) siendo su valor el siguiente: $\sim = \frac{G_2 p_2}{G_1 p_1}$ (2.107)

Ahora podemos definir los coeficientes A1 y A'1 en términos de la admitancia, del siguiente modo:

$$A_2 = 0.5 A_1 \left[(1+q) e^{ip_1 H_1} + (1-q) e^{-ip_1 H_1} \right] \qquad (2.108)$$

$$A'_2 = 0.5 A_1 \left[(1-q) e^{ip_1 H_1} + (1+q) e^{-ip_1 H_1} \right] \qquad (2.109)$$

3.5. Comportamiento dinámico de un semi-espacio homogéneo estratificado horizontalmente cimentado sobre lecho rocoso rígido

Cuando el terreno está compuesto por dos o más estratos como se muestra en la Fig. (2.28), en la interfase entre ambos, parte de la onda incidente viajando desde el estrato superior, pasa por la frontera del estrato inferior reflejándose, mientras el resto se refracta. El subsuelo se considera como un conjunto de estratos planos. El rayo que se muestra se refracta críticamente en la parte superior del enésimo estrato con velocidad V_n.

Las propiedades del suelo generalmente varían con la profundidad, especialmente la rigidez, que podría deberse entre otras causas a la historia geológica del suelo. Además, las capas de suelo generalmente se depositan una sobre la otra con el tiempo y se consolidan resultando por lo general la formación de materiales más rígidos con la profundidad.

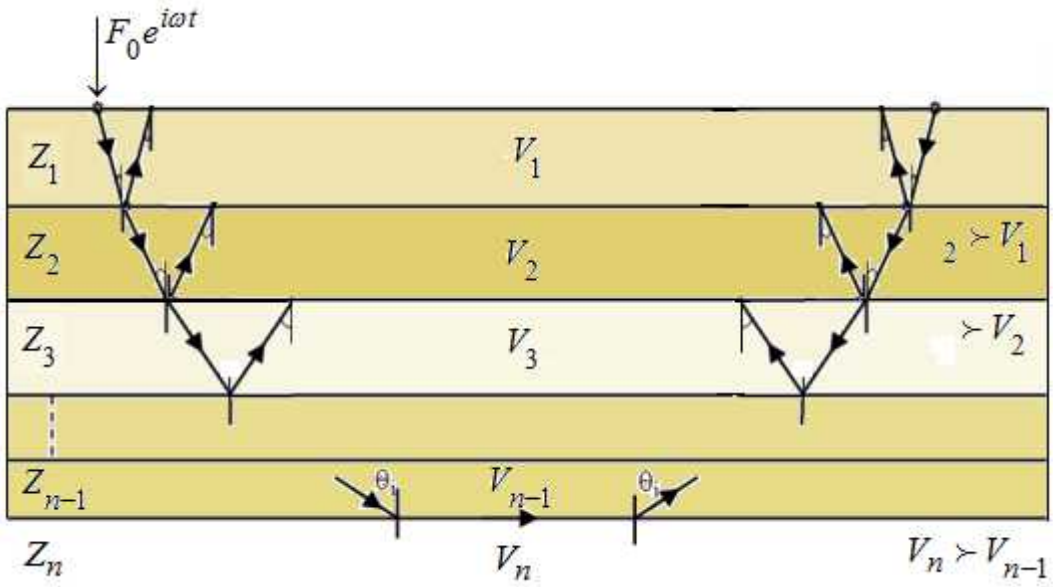


Fig. (2.28): Transmisión de ondas en la interfase entre múltiples estratos.

Previamente se ha establecido que los coeficientes de reflexión y refracción de las ondas planas en una interfase que delimita dos medios homogéneos estratificados horizontalmente con diferentes propiedades elásticas, dependen principalmente de las propiedades del semi-espacio y del ángulo de incidencia. Únicamente si el ángulo crítico se excede, se produce una dependencia de frecuencia débil, los coeficientes se vuelven complejos, y el signo de la fase está controlado por el signo de la frecuencia de la onda incidente. La dependencia de la frecuencia se vuelve mucho más pronunciada cuando la reflexión y la refracción de las ondas planas se consideran en medios subparalelos estratificados con dos o más interfases. Entonces, en general, ocurren fenómenos de interferencia y para frecuencias especiales u ondas longitudes, ocurren interferencias constructivas o destructivas.

La frecuencia fundamental para un depósito multi estratificado del suelo, podría ser evaluado mediante el uso sucesivo de las soluciones para dos estratos, establecidas mediante las ecuaciones (2.79) y (2.80). Como el perfil del suelo de dos estratos se valida con una solución aproximada, para simular la propagación de las ondas en el suelo multi estratificado se adoptará una relación con una rigidez variando linealmente con la profundidad. Sin embargo, la rigidez del suelo no debe variar dentro de cada segmento en el que se ha dividido el estrato considerado. No obstante, la longitud de cada elemento es muy pequeña y, por lo tanto, el efecto de considerar la rigidez

constante sobre un pequeño segmento de profundidad puede no tener mucho efecto. Es una práctica común considerar un semi- espacio homogéneo con un módulo de corte promedio, pero es más práctico variar el módulo de corte del suelo con la profundidad, ya que el caso homogéneo subestima las características de amortiguación del medio.

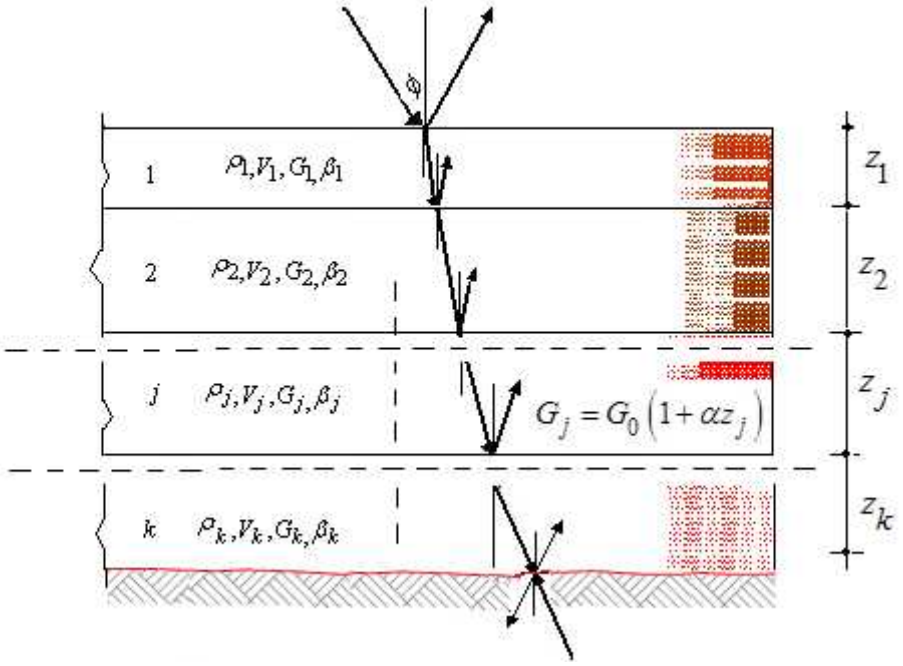


Fig (2.29): Variación lineal de la rigidez del suelo con la profundidad.

Se asume una variación de rigidez lineal con la profundidad para el perfil del suelo que descansa sobre el lecho de roca rígido horizontal. La variación lineal del módulo de corte con la profundidad se elige de tal manera que: $G_j = G_0\left(1+\sim z_j\right)$ donde $\sim$ es la tasa de linealidad, G_j es el módulo de corte a una profundidad determinada, G_0 es una referencia del módulo de cortante en la superficie del suelo, y z_j es determinada profundidad debajo de la superficie del suelo. Se supone que la rigidez al cortante del depósito de suelo es menor en la superficie y que aumenta gradualmente con la profundidad. Las amplitudes de un suelo con una rigidez que aumenta casi continuamente exhiben el mismo comportamiento asintótico para bajas y altas frecuencias, que el estratificado a como se aprecia en la Fig. (2.30) pero el incremento de las bajas amplitudes del suelo más rígido, respecto a las amplitudes del suelo blando, es más regular.

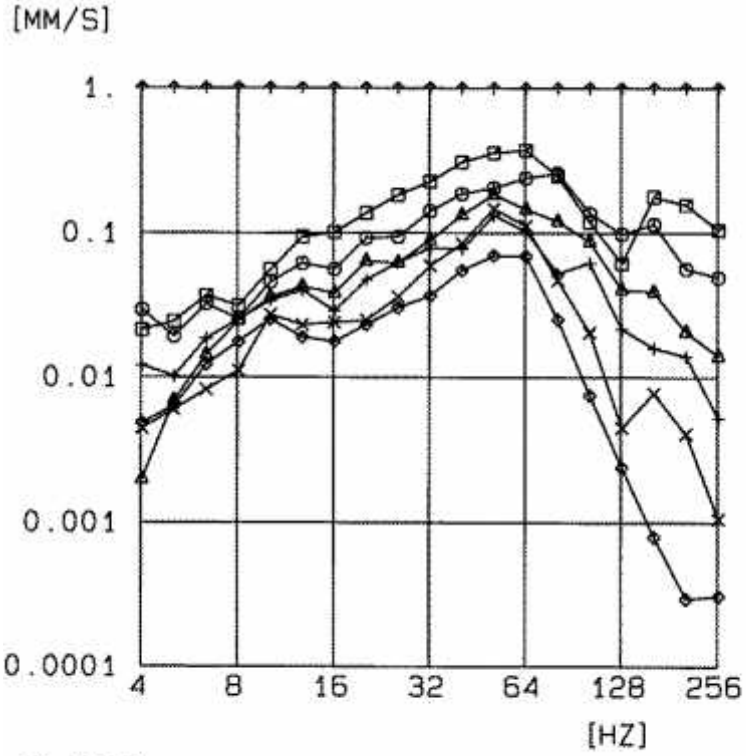


Fig (2.30): L. Auersch. Vibrations of soil and foundation due to railway, blast and impact Loading. Berlin 1994.

En general, los medios de semi-espacio estratificados son de gran utilidad para resolver problemas de propagación ondulatoria inducida por cimentaciones de maquinarias. Los efectos de la estratificación del suelo en las fundaciones, generalmente aumentan la rigidez estática y de baja frecuencia en comparación con la rigidez de un suelo homogéneo, y la amortiguación de baja frecuencia se reduce considerablemente. Para altas frecuencias, la amortiguación y la rigidez se aproximan a los valores de un suelo homogéneo. Se produce un cambio rápido de estos valores alrededor de las frecuencias características para el modo horizontal y torsional, y para los modos vertical y oscilante, la rigidez se vuelve pequeña y puede ser cero o incluso negativa. Se puede afirmar además que los efectos de la estratificación se reducen cuando el espesor del estrato aumenta, y para valores muy grandes de la relación entre el espesor del estrato y el radio de la cimentación $\left(h / r_0 \to \infty\right)$ los valores del semi-espacio son alcanzados. Por otro lado, para estratos muy delgados, la rigidez dinámica alcanzaría los valores del semiespacio subyacente más rígido. La influencia de un estrato delgado en la rigidez de un medio espacio subyacente es más

fuerte para los modos horizontales. Generalmente el estrato superior del suelo tiene una gran influencia en la rigidez de la base.

En síntesis, los efectos de la estratificación del suelo sobre la rigidez de las cimentaciones y en la propagación de ondulatoria, son más o menos lo mismo: el material más profundo del suelo generalmente tiene más influencia en el comportamiento de bajas frecuencias, mientras que las capas superiores son más importantes para frecuencias más altas. Las frecuencias características de los modos horizontales μ_h y de los modos verticales $\mu_v$son las mismas para las ondas y los cimientos. Los estratos superiores suaves ejercen una influencia considerable en la rigidez de la cimentación y puede explicar algunas observaciones experimentales.

Luco [26] estudia el problema de las vibraciones armónicas forzadas de un disco rígido sin masa soportado sobre un medio de estratos elásticos. El medio elástico consiste en una capa de espesor constante colocada en un semi-espacio elástico. El contacto entre el estrato y el semi-espacio subyacente es tal que se asegura la continuidad de los desplazamientos y las tensiones en la interfase. Las vibraciones verticales, oscilantes y horizontales forzadas con dependencia armónica de tiempo se consideran bajo la suposición de una unión relajada entre el disco rígido y el estrato superficial. Los problemas resultantes del valor de límite mixto se reducen a conjuntos de ecuaciones integrales de Fredholm que se resuelven numéricamente para un amplio rango de frecuencias. Las relaciones fuerza-desplazamiento así obtenidas presentan varias diferencias con los resultados correspondientes para un semi-espacio homogéneo. En general, las impedancias de balanceo son las menos afectadas por la estratificación, mientras que las impedancias verticales son las más afectadas. Las impedancias para un medio estratificado muestran una dependencia de frecuencia más fuerte que las impedancias para el semi-espacio. Para contrastes intermedio y alto entre las propiedades elásticas del estrato, y el estrato del semi-espacio, hay una reducción considerable de la amortiguación por radiación para bajas frecuencias.

El modelo de elementos finitos TLM-PBC se emplea para evaluar numéricamente la propagación ondulatoria en medios de semi-espacio estratificado. Este tratamiento puede investigarse en Cohen, Seale, Park, Maeda y Kausel.

4. CIMENTACIONES APOYADAS EN EL SEMI-ESPACIO ELÁSTICO HOMOGÉNEO.

4.1. Introducción.

Un problema básico importante y útil para el análisis de la propagación de las ondas en los suelos, es el problema de un semi-espacio elástico cargado en su superficie por una carga dependiente del tiempo, que puede fluctuar armónicamente con el tiempo, o puede aplicarse en un tiempo muy corto.

Generalmente las cimentaciones para máquinas son superficiales y los efectos interactivos suelo-estructura se determinan empleando la respuesta a las vibraciones en un medio elástico sólido semi-infinito, delimitado por un plano horizontal, problema estudiado inicialmente por Rayleigh al introducir en 1885, [14] el tema de las vibraciones libres para un semi-espacio elástico, lo cual significa que la masa de suelo está limitada en uno de sus lados, mientras que se extiende infinitamente en las otras direcciones, con la superficie superior como un límite, debido a que las dimensiones del suelo se extienden infinitamente en todas las direcciones.

Horace Lamb (1849-1934) [15] en 1904, estudia las vibraciones de un semi-espacio elástico, excitado por un impulso vertical de corta duración, aplicado en su superficie, así como las vibraciones debidas a una perturbación aplicada internamente. Este análisis corresponde a un caso de propagación de ondas en dos dimensiones. Para su estudio, Lamb consideró el semi-espacio de Joseph Boussinesq (1885), limitado únicamente por un plano horizontal. como un ente que para los propósitos prácticos, sustituye en primera aproximación al terreno. Boussinesq ideo el semi-espacio elástico, para obtener el estado de esfuerzos por debajo de cualquier superficie particular de suelo a cualquier profundidad y distancia radial, para una carga estática vertical. Por tal razón el problema de Lamb, es conocido como " Carga dinámica de Boussinesq

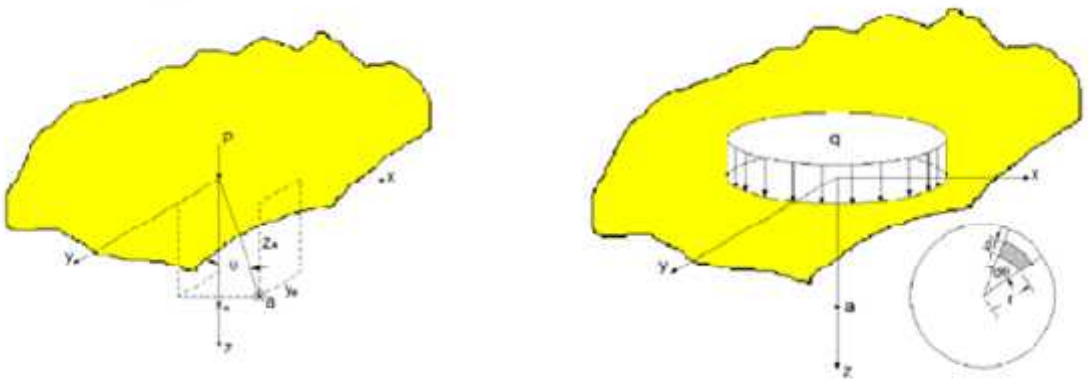


Fig (4.1): Modelo de Boussinesq de carga puntual P y circular distribuida q sobre un medio semi-infinito. Tomado de "Introduccion a la Ingenieria de Cimentaciones". por Cruz, L.

Para el caso de perturbaciones ondulatorias, se basó en las leyes de propagación para un medio ilimitado, desarrolladas por Green y Stokes. Para Lamb un asunto clave fue considerar que las ondas superficiales descubiertas por John Strutt Lord of Rayleigh, evidenciaba la influencia de la superficie libre, en la modificación del carácter de las vibraciones, ya que las ondas Rayleigh, siempre se generan cuando existe una superficie libre en un cuerpo continuo. En su trabajo, Rayleigh anticipó la importancia que ese tipo de ondas podrían tener en la transmisión de las perturbaciones debidas a terremotos.

Lamb demostró cómo una serie de fuerzas verticales periódicas, con diferentes frecuencias, pueden combinase y remplazarse por una fuerza sencilla aplicada en la superficie. También introdujo el novedoso fenómeno de amortiguamiento por radiación, hasta entonces desconocido, demostrando que para fuentes perturbadoras puntuales o lineales actuando en la superficie a través de un eje de simetría axial, la perturbación se propaga en forma de un campo anular, de modo que se atenúan a medida que se apartan de la fuente. La reducción de las ondas superficiales por atenuación geométrica, pueden asociarse directamente a esta propiedad. Antes del trabajo de Lamb, Lord Rayleigh, aunque no resolvió el caso de una fuente puntual, tuvo una intuición similar sobre la atenuación de las ondas superficiales a medida que se apartan de la fuente.

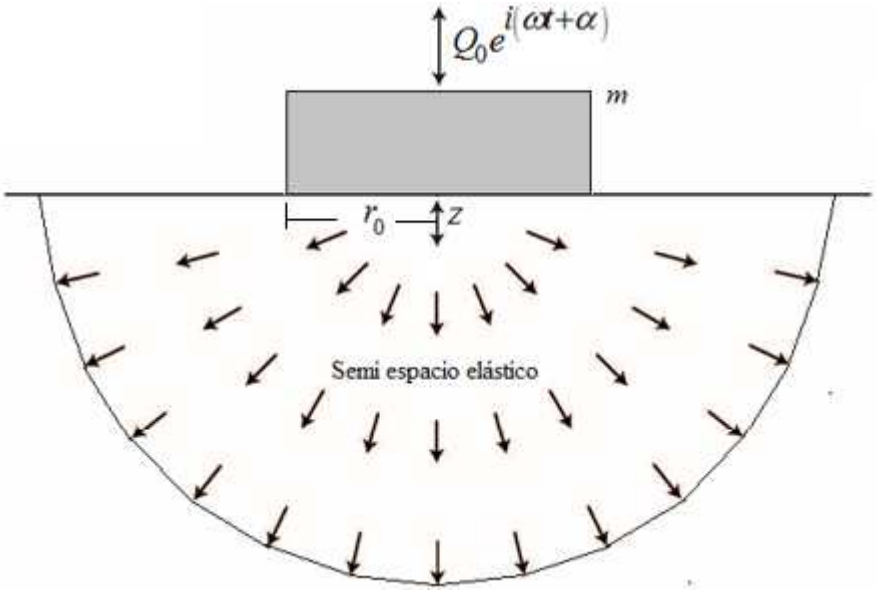


Fig. (4.2): Radiaciones en el semi-espacio elástico debidas a vibraciones verticales.

El factor según el cual las ondas se atenúan a medida que se alejan de la fuente, se puede estimar considerando que los frentes de ondas generados en una fuente puntual enterrada en un medio infinito, la energía liberada se extiende sobre una superficie esférica y por lo tanto su atenuación es proporcional a la cuadrado de distancia de la fuente. Dado que la energía es proporcional al cuadrado de los desplazamientos, estos últimos se atenúan proporcionalmente a la distancia. Análogamente ya que las ondas de Rayleigh, son generadas por una fuente puntual que actúa sobre la superficie del suelo, se propagan con un frente de onda cilíndrico, y su atenuación es proporcional a la distancia, y la atenuación del desplazamiento es proporcional a la raíz cuadrada de la distancia. En cuanto a la atenuación geométrica de las ondas longitudinales y de superficie libre, no es posible establecer una analogía como las anteriores, pero es demostrable que debido a la perdida de energía en el espacio libre, la atenuación del desplazamiento varia con el cuadrado de la distancia (Richart et al. 1970). En síntesis, para un semi-espacio elástico, el amortiguamiento por radiación para las amplitudes de ondas, puede expresarse mediante una ley de potencia del tipo:

$\frac{1}{r^n}$ Con $n = \begin{cases} 1 \\ 2 \\ 1/2 \end{cases}$

Donde $n = 1$ para ondas longitudinales y transversales en la superficie; $n = 2$ para ondas de cuerpo en el sólido; y $n = \frac{1}{2}$ para ondas Rayleigh.

Regresando al trabajo de Lamb, los desplazamientos a gran distancia r de una fuente puntual armónica vertical $F_0 e^{i\mu t}$ se pueden expresar como:

Desplazamientos verticales: $u_z = F_0 \frac{b_z}{\sqrt{r}} e^{i\left(\mu t - kr - \frac{®}{4}\right)}$ (4.1)

Desplazamientos radiales: $u_r = F_0 \frac{b_r}{\sqrt{r}} e^{i\left(\mu t - kr + \frac{®}{4}\right)}$ (4.2)

Donde u_z y u_r son los desplazamientos verticales y radiales respectivamente, b_z y b_r son los parámetros mecánicos del medio de propagación, y $k = \frac{\mu}{V_r}$ es el número de onda, que indica el número de veces que vibra una onda en una unidad de distancia.

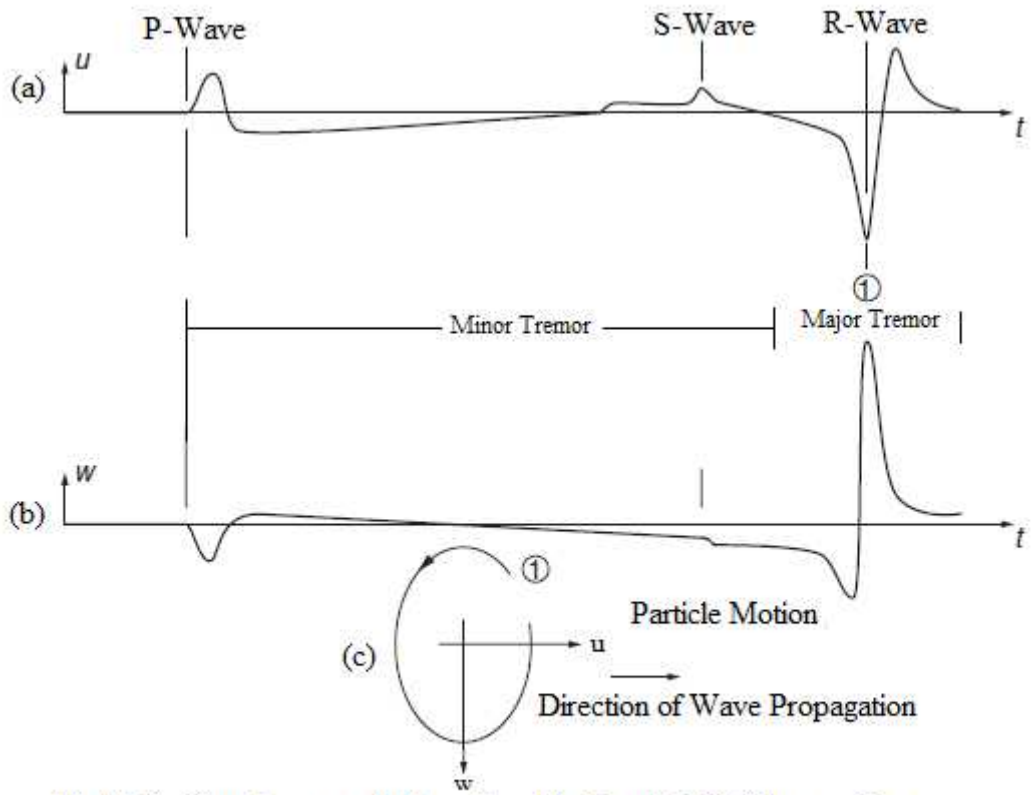


Fig (4.3): Complete wavefield predicted by Lamb (1904) for a surface point source on an halfspace. (a) horizontal radial motion; (b) vertical motion; (c) particle path of Rayleigh waves.

4.2. Planteamiento original del problema.

Por la década de 1920 ya se conocían los problemática de Ingeniería de cimentaciones, generados por el cada vez más creciente uso de equipos con cargas vibratorias, debido a la expansión del desarrollo industrial. Geiger (1927) adelantó investigaciones para determinar la frecuencia natural de las fundaciones, mientras que se dio un gran adelanto de la ciencia tanto en la teoría como en la práctica por medio del trabajo de Rausch, quien investigó los cimientos para máquinas (1926) y turbinas (1924). Por su parte, Timoshenko (1928) y Den Hartog (1934) trataron con gran cantidad de problemas prácticos.

En los años treinta, el Fondo Alemán de Investigación Sobre Mecánica del Suelo, (Deuctche Forschschumgsgesellschaft für Bodenmechanik), se proponía realizar experimentos para

determinar las características dinámicas del suelo. El soporte teórico de tales experimentos, le fue encomendado a Hans Jakob Reissner (1874–1967), para lo cual se construyó un vibrador del tipo de masas excéntricas, montado sobre un marco rígido. El modelo empleado por Reissner consistía en una masa rígida fijada al terreno, la que le inducía un desplazamiento alternativo constante en la zona de contacto.

Reissner en 1936 publicó [16] los resultados de sus análisis, los que constituyen la primera solución de carácter analítico para el desplazamiento vertical en la superficie de un espacio semi-infinito homogéneo, isotrópico y elástico, dinámicamente caracterizado por el módulo de corte G, la relación de Poisson ν, y la densidad de la masa ρ, sometido a un esfuerzo normal $q_z(t)$, debido a la carga armónica $P_0 e^{i\mu t}$ actuando en la superficie. La teoría del semi- espacio elástico, propuesta por Reissner, es una generalización del modelo empleado por Boussinesq en mecánica de suelos, para determinar el estado de esfuerzo-deformación debido a carga estática.

Reissner desarrolló una solución analítica para el desplazamiento vertical periódico z_0 en el centro del área circular cargada en la superficie del semi-espacio elástico, mediante integración de la solución de Lamb (1904) sobre un área circular, en la que las fuerzas y los desplazamientos son positivos hacia abajo.

Consideró como representativo el desplazamiento obtenido en el centro del área cargada, considerando que los esfuerzos verticales periódicos $q_z(t)$ estarían distribuidos uniformemente bajo el área circular.

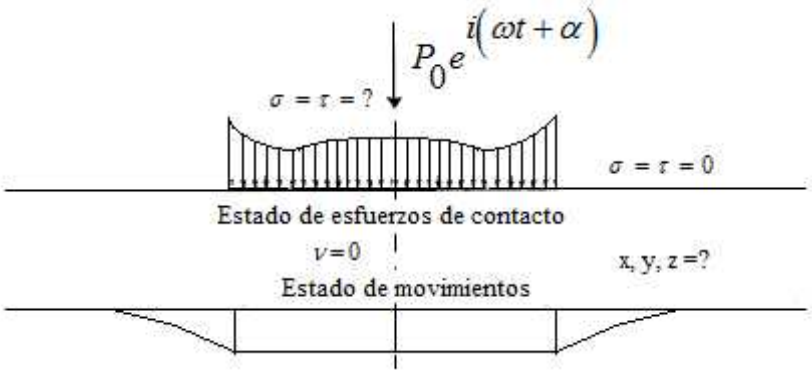
Con estos planteamientos, el problema consiste en determinar el estado esfuerzo deformación en un semi-espacio sometido a un estado de tensiones en una zona de radio r_0.

$$q_z = \frac{P_0 e^{i\mu t}}{\pi r_0^{\,2}} \qquad (4.3)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$$

Este es un problema mixto, que implica un sistema de ecuaciones integrales, para el cual Reissner no disponía de un método de resolución apropiado. Esto explica que haya supuesto conocida la distribución de presiones en la zona de contacto en la interfase, lo que no cumple con las condiciones de compatibilidad de deformaciones, para el movimiento de un sólido rígido.

El problema corresponde a la respuesta de un semiespacio tridimensional homogéneo con una carga puntual armónica en el tiempo, cuya solucion se obtiene se obtiene mediante las funciones de Green para el semiespacio, halladas por Lamb en 1904. Esta solucion es de gran importancia debido a que se puede emplear como solución fundamental en el Método de los Elementos de Contorno para la resolución de problemas elastodinámicos tridimensionales de semiespacios.



Para el movimiento del punto en el eje de simetría, se presenta en la forma:

$$z(t) = \frac{P_0 e^{i\mu t}}{G r_0} f = \frac{P_0 e^{i\mu t}}{G r_0}\left(f_1 + i f_2\right) \qquad (4.4)$$

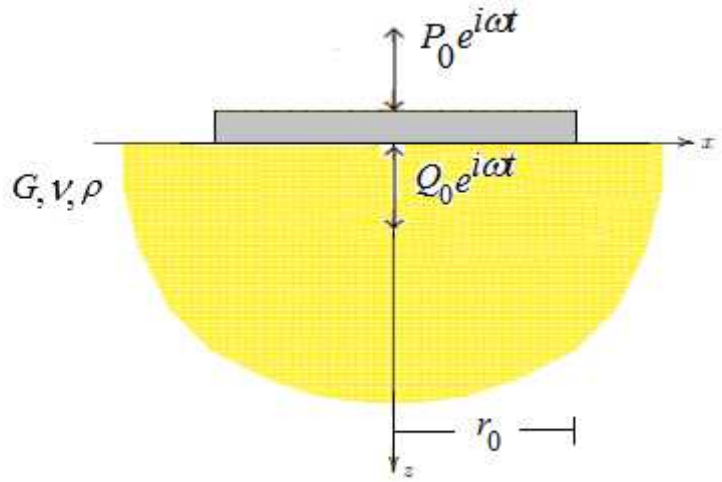


Fig (4.4): Modelo del semi-espacio elástico de Reissner 1936

En esta solucion, r_0 es el radio del área circular de contacto, P_0 y μ son la amplitud y la frecuencia de la fuerza aplicada respectivamente, y f_1, f_2 son la parte real y la imaginaria de las funciones de desplazamientos de Reissner, las que dependen de la relación de Poisson ν y de un término adimensional de frecuencia $\sim_0$ descrito como: $\sim_0 = \mu r_0 \sqrt{\frac{\circ}{G}} = \frac{\mu r_0}{V_S}$ (4.5)

Donde V_S es la velocidad de propagación de las ondas de cortante en el semi-espacio elástico. Reissner estableció un término dimensional que describe la relación entre las masas agrupadas del cimiento y del equipo m, apoyada en el semi-espacio, y una porción de masa del cuerpo elástico $m_s = \circ r_0^3$ denominado como relación de masa $b = \frac{m}{\circ r_0^3}$ (4.6)

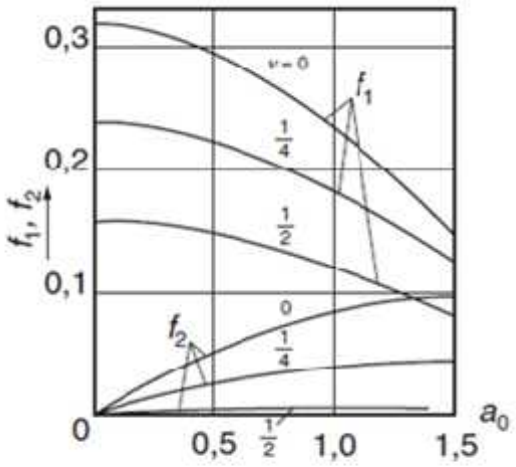


Fig (4.5): Verlauf des Realteils f_1 und des Imaginärteils f_2 der komplexen Verschiebungsfunktion $\hat{f}$ (nach Reissner) als Funktion der dimensionslosen Größe $a_0 = r_0 \Omega / c_s$

Gráficos de la parte real y la parte imaginaria de la función de desplazamiento complejo (según Reissner) en función de la cantidad adimensional $a_0 = \frac{r_0 \mu}{V_s}$ (4.7)

A través de la expresión para los desplazamientos $z(t)$ dados por la Ec (4.4), se puede determinar la respuesta del sistema vibrador-suelo de masa m, admitiendo la hipótesis de movimiento de sólido rígido.

El equilibrio dinámico requiere que:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + Q_0 e^{i\mu t} = P_0 e^{i\mu t} \qquad (4.8)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\mu^2 z$$

Reemplazando esta relación en la Ec (4.8) se obtiene:

$$\left(-m\mu^2 + \frac{Gr_0}{f_1 + f_2}\right) z = P_0 e^{i\mu t} \qquad (4.9)$$

Suponiendo que los movimientos son armónicos según $z(t) = AP_0 e^{i\mu t}$

$$A = \frac{P_0\left(f_1 + if_2\right)}{\left(-m\mu^2 f_1 + Gr_0\right) - imf_2\mu^2} \qquad (4.10)$$

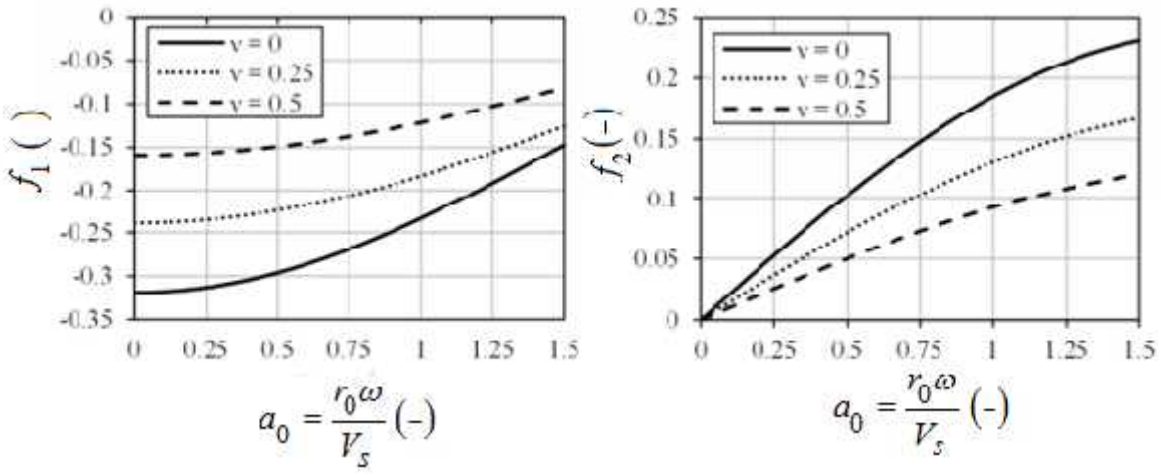


Fig. (4.6): Valores negativos de las funciones de desplazamiento de Reissner para un plato circular flexible descansando sobre un semi-espacio elástico 1936.

$$\hat{f} = f_1 + if_2 = \left|\hat{f}\right| e^{i\sim} = \sqrt{f_1^{\,2} + f_2^{\,2}}\, e^{i\sim} \qquad (4.11)$$

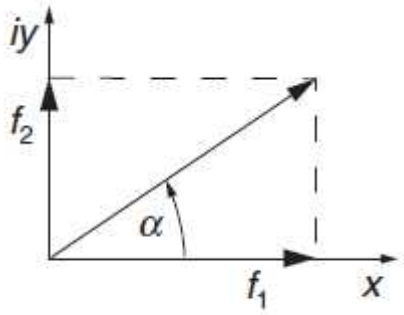


Fig (4.7): Representacion en el plano complejo de la funcion de desplazamiento de Reissner

La solución de Reissner constituyó una primera aproximación teórica para los estudios analíticos de osciladores apoyados en el semi-espacio elástico, debido a que hubo discrepancias entre los resultados teóricos y los resultados obtenidos en las pruebas de campo. En el ámbito teórico hubo algunas imprecisiones: haber asumido una distribución uniforme de la presión de contacto para simplificar los cálculos matemáticos, no fue realista.

La hipótesis de que las tensiones en la interfase eran independientes de la frecuencia. También debe de considerarse los errores de signo en las funciones de desplazamiento descubiertos por

Shekhter en 1948. En el ámbito experimental, no se cumplió con las condiciones asumidas para el semi-espacio elástico, por haberse desarrollado asentamientos permanentes en el transcurso de repetidas pruebas. También se reportan amplitudes grandes para las aceleraciones, lo que provocó que el vibrador impactase libremente como martillo por encima del suelo, alterando totalmente la hipótesis de partida.

Tales circunstancias fueron las causas de las divergencias, entre los resultados teóricos esperados y los obtenidos de las pruebas, por lo que su teoría no recibió una inmediata aceptación de parte de la comunidad de los Ingenieros de suelos. Sin embargo su estudio marcó las pautas para establecer el tratamiento analítico de osciladores apoyados en el semi-espacio elástico, y es la referencia clásica en este campo de la dinámica del suelo. Con su publicación se marca el inicio de la moderna dinámica de suelos.

Con la vibración de la fundación, los esfuerzos se originan en la superficie de contacto y viajan hacia el exterior en forma de ondas de cuerpo y de superficie. Estas ondas transportan parte de la energía transmitida al suelo por la cimentación, fenómeno semejante a la absorción de energía en un amortiguador viscoso, de modo que la disipación de la energía es debida fundamentalmente a la radiación. Se ha establecido que los parámetros básicos del suelo en la teoría del semi-espacio elástico son el módulo de cortante G, la densidad de masa ρ y la relación de Poisson ν. Para esta teoría tanto la rigidez del suelo como el amortiguamiento producido, dependen de sus características elásticas y de la frecuencia de las cargas dinámicas.

La distribución uniforme de las presiones de contacto asumidas por Reissner resultaban poco realistas para fundaciones masivas, las que generan patrones de distribución de esfuerzos no uniformes en la interfase suelo cimentación. Los primeros procedimientos de cálculo aplicados a cimentaciones de maquinaria fueron propuestos en Alemania en las décadas de los 50´s y 60´s, por la *German Research Society for Soil Mechanics* (DFB) por sus siglas en alemán.

Posteriormente a la solución para el caso vertical, de manera casi inmediata, se dio la solución para el caso de vibraciones torsionales. En los años siguientes, Reissner y Sagoci (1944) y Shekhter (1948) continuaron en esta misma línea de trabajo y usaron el promedio de los desplazamientos tanto en el centro como en los bordes del área cargada para obtener las curvas de la amplificación dinámica como una función de la frecuencia y la relación de masas adimensionales.

4.3. Aportes de Quinlan, Sung y Bycroft.

En la década del 50 aparecen importantes trabajos que aportaron grandes avances en el estudio de cimentaciones sometidas a cargas dinámicas, apoyadas en el semi-espacio elástico, destacándose los de Wilson (1942), T.Y. Sung (1953), P.M. Quinlan (1953), Pauw (1953), Arnold y Warburton (1955) y Bycroft (1956).

El trabajo de Reissner quedó olvidado hasta que en 1953, resurgiera con la aparición de los artículos que Quinlan y Sung, [17, 18] presentaron en el LVI Annual Meeting of American Society for Testing and Materials (ASTM). Quinlan y Sung evaluaron los efectos de la simplificación asumida por Reissner de presión uniforme, considerando tres tipos de presiones dinámicas debidas a excitaciones generadas por una carga constante y dependiente de la frecuencia, como contrapartida a las presiones estáticas verticales. En dichos artículos exponen resultados matemáticos obtenidos independientemente para distribución de presiones uniforme, parabólica, y una correspondiente a la condición de cimentación rígida, en la interfase de contacto de la fundación circular y el suelo, en un intento de continuar con las investigaciones antes iniciadas por Reissner. La distribución para cimiento rígido corresponde a una presión máxima en el borde y finita en el centro, mientras que la distribución parabólica exhibe presión cero en el borde con valor máximo en el centro.

Quinlan establece las soluciones para las tres distribuciones de presiones, presentando únicamente la aproximación correspondiente a una cimentación rígida circular. Él también propuso la solución para un vibrador rectangular largo asumiendo varias distribuciones de presiones de contacto, usando diferentes aproximaciones.

Sung extiende la solucion de Reissner desarrollando ecuaciones para las presiones de contacto correspondientes a los tres casos, considerando diferentes valores para la relación de Poisson, y una distribución simétrica axial de la carga total de la carga $P(r,t)$, con frecuencia μ, aplicada en la superficie libre del semi-espacio elástico.

El desplazamiento vertical en el centro del área de contacto de la cimentación circular apoyada en un semi-espacio elástico, se expresa de la siguiente forma:

$$z(0,0,t)=\frac{P_0 e^{i\mu t}}{Gr_0}\left(f_1+if_2\right) \qquad (4.12)$$

Los valores de las funciones de desplazamientos f_1, f_2 fueron determinados por Sung, demostrando que los valores para las funciones f_1, f_2 de desplazamientos de Reissner, cambian con la distribución de las presiones.

Quinlan y Sung, fueron capaces de evaluar la amplitud de la frecuencia de resonancia necesaria para mantener la vibración y el desplazamiento en el centro de la zapata, lo que implica el uso de los datos de una prueba simple de vibración de campo, basada en la teoría del semi-espacio elástico. Sung presentó gráficos de diseño para fundaciones de máquinas basadas en su trabajo. Sus parámetros adimensionales han sido empleados para predecir la respuesta de una fundación de máquina para un sitio particular donde se ha realizado la prueba de vibración de campo.

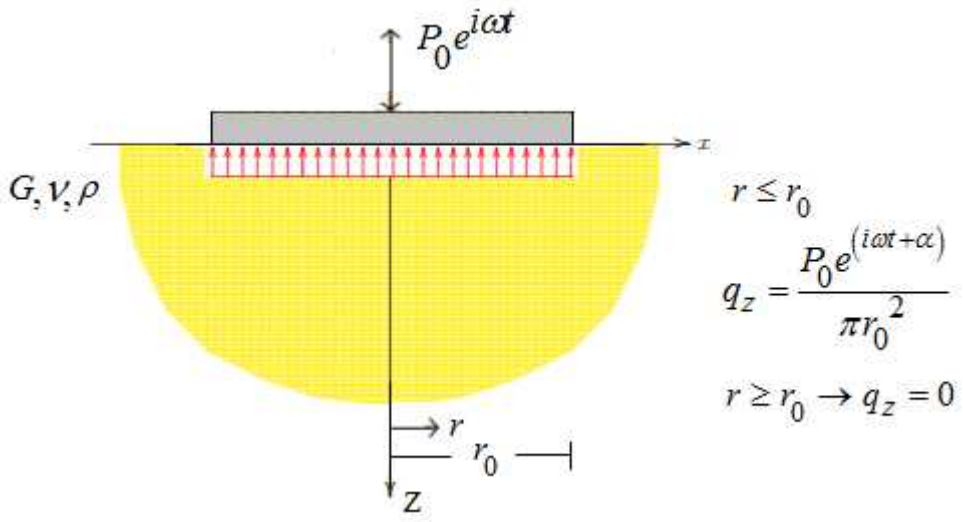


Fig. (4.8): Distribución de esfuerzo uniformes de contacto para cimentación circular flexible apoyada en un semi-espacio elástico. Quinlan y Sung 1953.

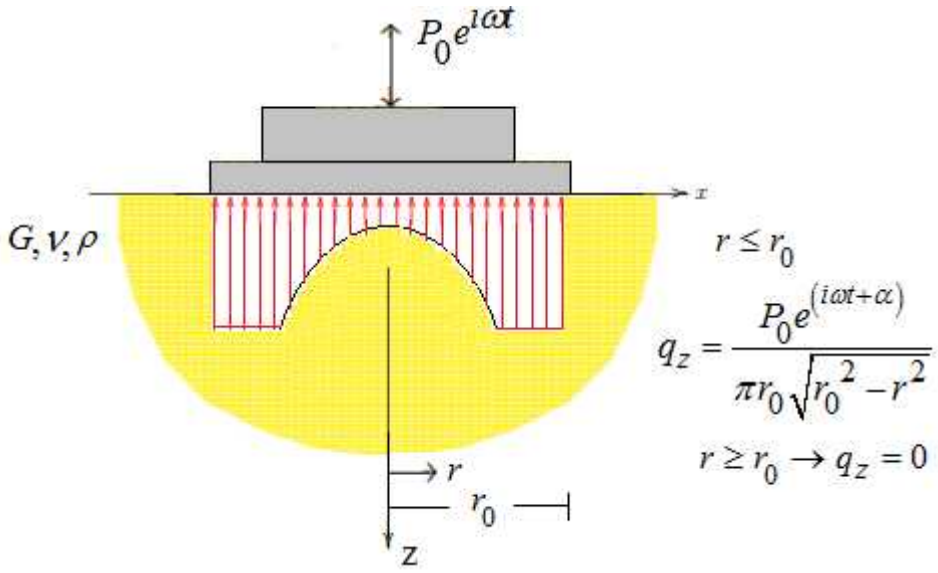


Fig. (4.9): Distribución para cimiento rígido con una presión de contacto máxima en el borde y finita en el centro. Quinlan y Sung 1953.

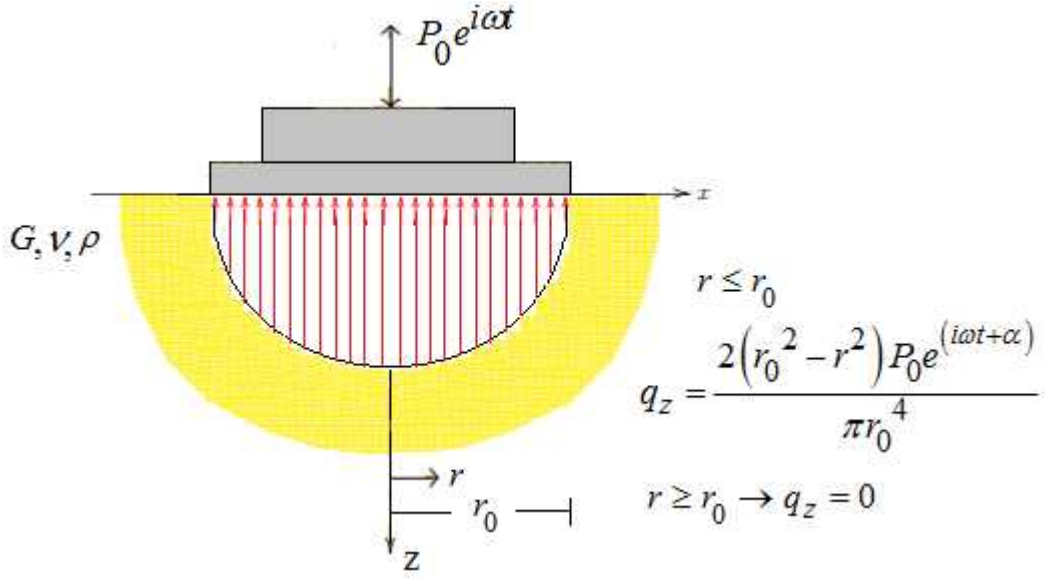


Fig. (4.10: Distribución parabólica para cimiento rígido con una presión de contacto máxima en el centro y nula en los bordes. Quinlan y Sung 1953.

La distribución de las presiones de contacto ejerce influencia en las respuestas de las amplitudes de los desplazamientos de las cimentaciones, según se aprecia en los gráficos correspondientes a los tres tipos de distribución de Quinlan y Sung. Se observa que la distribución de presiones

parabólicas y uniforme, producen mayores desplazamientos que una cimentación rígida. Pueden obtenerse mejores resultados para las respuestas, si la amplitud se determina en base a un promedio compensado de los desplazamientos verticales.

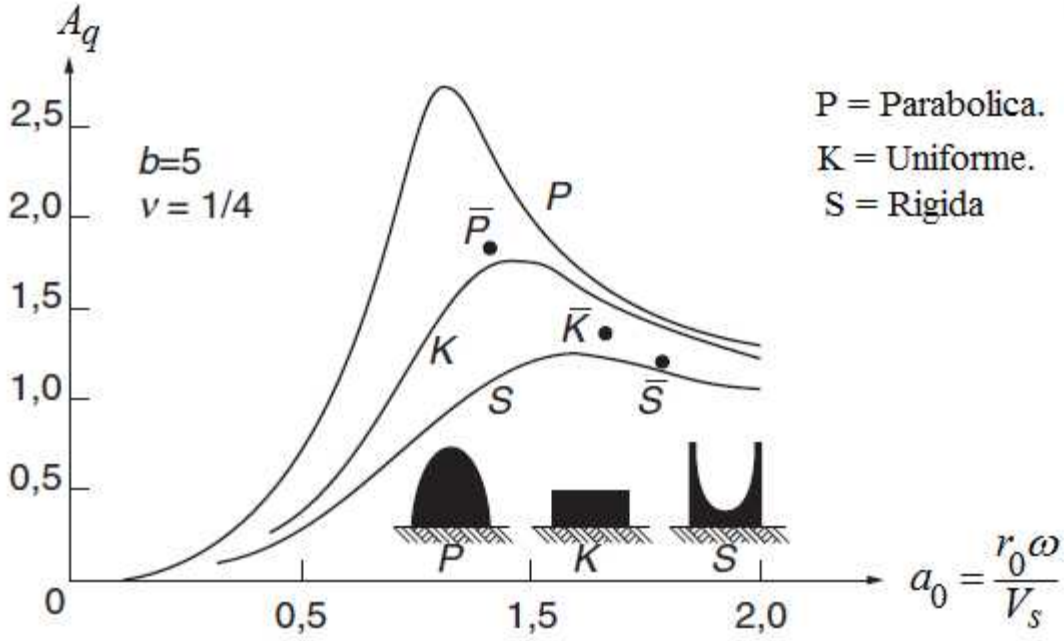


Fig (4.11): Efecto de la distribución de presiones en la respuesta de una cimentación rígida para vibración vertical. Sung 1953.

Arnold. R.N. et al, en 1955 [18], cuantificó la respuesta dinámica de una cimentación rígida circular, apoyada en el semi-espacio elástico, para el modo vertical de vibración y para otros modos denominados de balanceo y deslizamiento. Para una cimentación rígida, los desplazamientos dinámicos debajo de la zapata, no siempre son uniformes ya que varían con la frecuencia. Basado en este punto de vista, se evaluó el promedio ponderado del desplazamiento bajo la base y una magnitud media de las funciones de desplazamiento.

G.N. Bycroft [19] en su publicación de 1956 consideró un promedio compensado de los desplazamientos debajo de la cimentación para la distribución de presiones en cimentaciones rígidas, como una solución aproximada a las presiones reales requeridas para obtener valores que cumplieran con las funciones de desplazamientos, f_1 y f_2. Estas soluciones dan resultados

satisfactorios para el rango de valores $a_0 \prec 1.5$ de la relación de frecuencia, pero para valores altos, los esfuerzos cambian y los resultados se tornan imprecisos.

Bycroft estableció funciones de desplazamientos para la distribución de las presiones de cimentaciones rígidas, f_1 y f_2 que varían con la frecuencia adimensional a_0 y con la relación de Poisson ν. Estudió otros movimientos y representó el amortiguamiento interno del suelo.

En 1977, Bycroft extendió su estudio sobre vibraciones en cimentaciones rígidas circulares, apoyada sobre un semi-espacio elástico, para valores altos de las frecuencias. Las respuestas del movimiento, para fuerzas no sinusoidales, fueron evaluadas mediante síntesis de Fourier para estado estacionario.

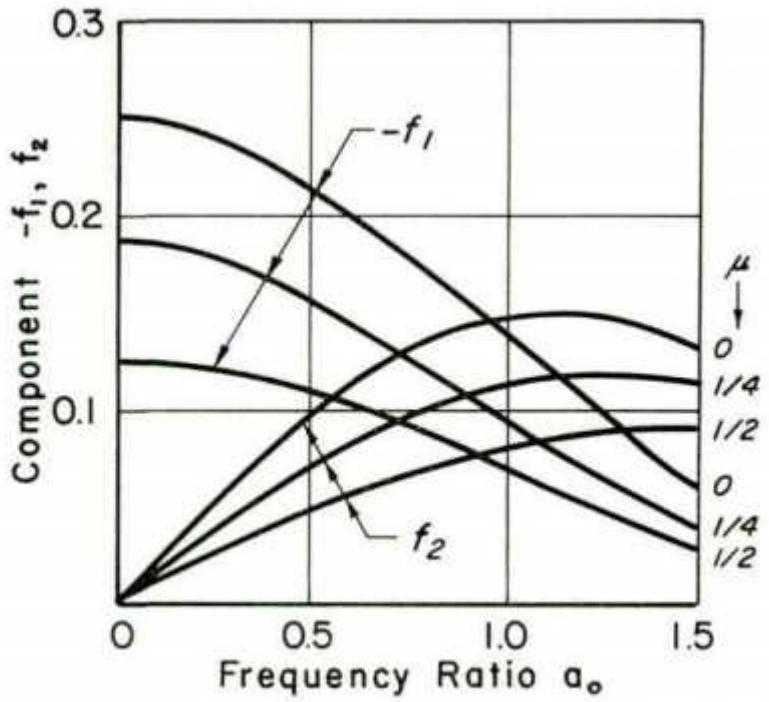
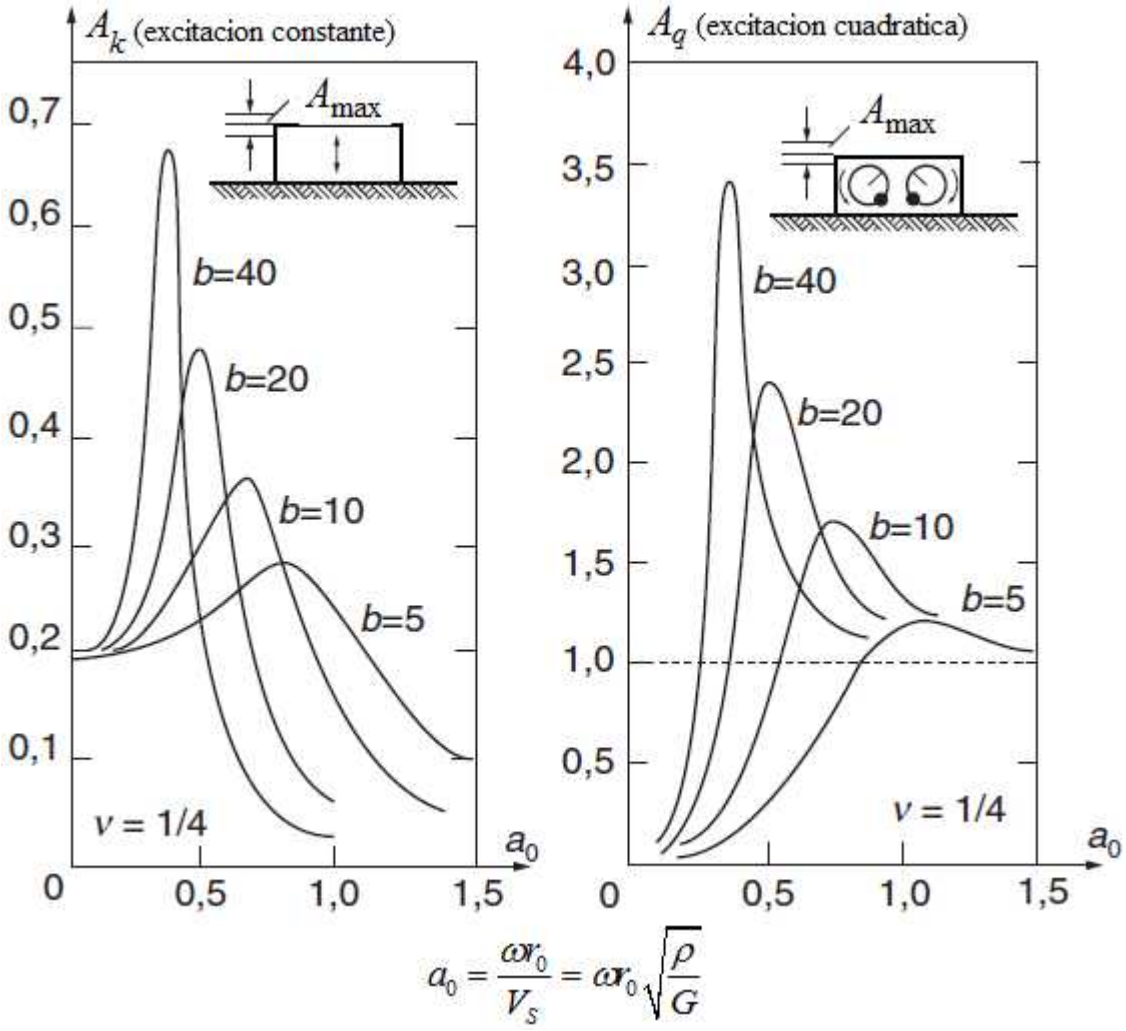


Fig (4.12): Bycroft's Displacement Function

Para una carga vertical P_0 estática, el desplazamiento $z = \frac{P_0 (1 - \neg)}{4 G r_0}$ (4.13) corresponde a valores nulos de a_0 y f_2. Esta relación permite definir el valor de la constante de resorte equivalente $k_z = \frac{4 G r_0}{P_0 (1 - \neg)}$ (4.14) para vibraciones verticales:

Los avances aportados por Bycroft en 1956, continuaron con el trabajo presentado por F. E.

Richart [20], 1962, en el que incluye gráficas de relaciones de amplitud vs parámetros adimensionales de frecuencia, $a_0 = \frac{\mu r_0}{V_S} = \mu r_0 \sqrt{\frac{\circ}{G}}$ (4.15) para diferentes valores de la relación de masa b, correspondientes a cimentaciones circulares rígidas en un semi-espacio elástico.



$$a_0 = \frac{\omega r_0}{V_S} = \omega r_0 \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

$$A_q = b a_0^{\,2} V_k \qquad\qquad b = \frac{m}{\circ\, r_0^{\,3}}$$

Fig. (4.13): Tomado de la obra de Richart Foundation Vibrations. ASCE 1962.

4.4. Analogía de Hsieh.

Debido a que las gráficas presentadas por Richart son semejantes a las de un oscilador amortiguado con un grado de libertad, T.K. Hsieh en 1962, [22] modificó las ecuaciones básicas de Reissner para obtener la ecuación para vibraciones verticales, con estructura similar a la

ecuación correspondiente a vibraciones amortiguadas de un SDF, recurso conocido como la analogía de Hsieh.

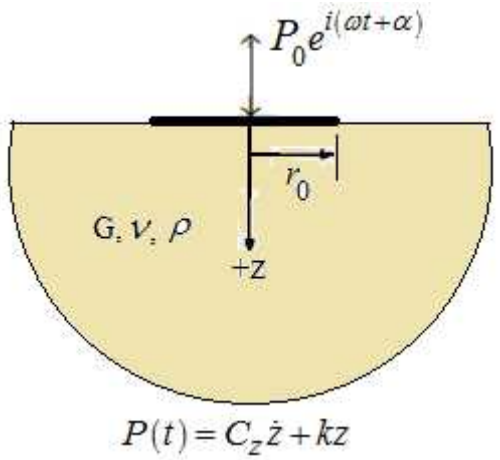


Fig. (4.14): Disco circular rígido sin masa, analizado por Hsieh para establecer la analogía con un sistema simple amortiguado sin masa.

Para establecer la analogía, Hsieh analizó un disco circular rígido sin peso, de radio r_0 apoyado en la superficie de un semi-espacio elástico sujeto a una fuerza oscilatoria vertical.

El desplazamiento vertical del disco está determinado por la Ec. (4.4):

$$z(t) = \frac{P_0 e^{i\mu t}}{G r_0} f = \frac{P_0 e^{i\mu t}}{G r_0}\left(f_1 + i f_2\right) \quad (4.16)$$

Y su primera derivada respecto al tiempo es: $\frac{dz}{dt} = \frac{P_0 e^{i\mu t}}{G r_0}\left(i f_1 - f_2\right)$ (4.17)

De modo que: $f_1 \mu z - f_2 \frac{dz}{dt} = \frac{P_0 \mu e^{i\mu t}}{G r_0}\left(f_1^{\,2} + f_2^{\,2}\right) = \frac{P\mu}{G r_0}\left(f_1^{\,2} + f_2^{\,2}\right)$ (4.18)

Entonces: $P = -\frac{Gr_0}{\mu}\frac{f_2}{\left(f_1^{\,2}+f_2^{\,2}\right)}\frac{dz}{dt} + Gr_0\frac{f_1}{\left(f_1^{\,2}-f_2^{\,2}\right)}z$ (4.19)

La ecuación (4.19) es de la forma correspondiente a la de un oscilador amortiguado carente de masa, con un grado de libertad: $P(t) = C_z\dot{z} + K_z z$

De donde $K_z = Gr_0\frac{f_1}{\left(f_1^{\,2}+f_2^{\,2}\right)}$ (4.20) y $C_z = -\frac{r_0^{\,2}}{a_0}\sqrt{G^\circ}\frac{f_2}{\left(f_1^{\,2}+f_2^{\,2}\right)}$ (4.21)

Las que dependen de la relación de frecuencias $a_0 = \frac{\mu r_0}{V_S} = \mu r_0\sqrt{\frac{^\circ}{G}}$ y del módulo de Poisson.

Hsieh también consideró una cimentación cilíndrica rígida de un peso total *W* soportada en la superficie del semi-espacio elástico, excitado por una fuerza periódica Q (t)

Admitiendo la hipótesis de movimiento en un sólido rígido, tenemos la ecuación de equilibrio dinámico siguiente: $m\ddot{z} + P(t) = Q(t)$ (4.21)

Donde $P(t) = P_0 e^{i\mu t} = C_z\dot{z} + K_z z$ (4.22) representa las fuerzas de amortiguamiento y de rigidez elástica dependientes de la frecuencia.

Procediendo de modo análogo que en el caso de la vibración del disco circular rígido sin masa, considerando que los desplazamientos verticales están determinados por la ecuación (4.4), tenemos:

$$z(t) = \frac{P_0 e^{i\mu t}}{Gr_0} f = \frac{P_0 e^{i\mu t}}{Gr_0}\left(f_1 + if_2\right)$$

$$m\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(\frac{Gr_0}{\mu}\frac{f_2}{f_1^{\,2}+f_2^{\,2}}\right)\frac{dz}{dt} + \left(Gr_0\frac{f_1}{f_1^{\,2}+f_2^{\,2}}\right)z = Q_0 e^{i\mu t} \quad (4.23)$$

Esta ecuación es de forma análoga a la ecuación de equilibrio dinámico de un sistema masa-resorte -amortiguador, sujeto a vibración forzada:

$$m\ddot{z} + C_z\dot{z} + K_z z = F_0 e^{i\mu t} \quad (4.24)$$

Lo que valida concluir, que la tanto la rigidez, como el amortiguamiento son dependientes de la frecuencia y del módulo de Poisson, y están dadas por las siguientes expresiones:

$$K_z = Gr_0 \frac{f_1}{f_1^{\,2} + f_2^{\,2}} \quad (12) \qquad \text{y} \qquad C_z = \frac{Gr_0}{\mu} \frac{f_2}{f_1^{\,2} + f_2^{\,2}} \quad (4.25)$$

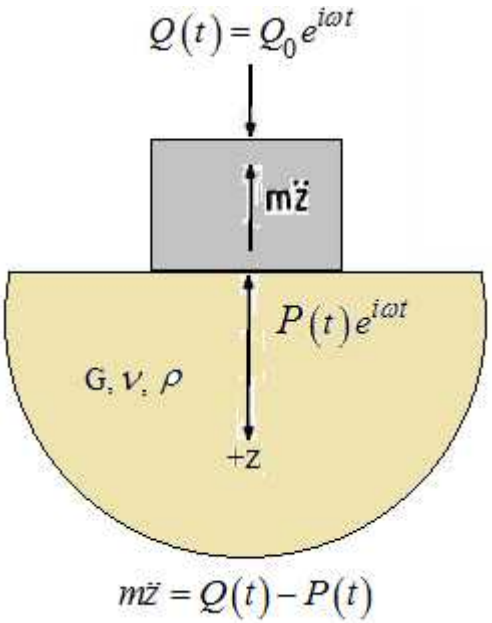


Fig. (4.15): Modelo de Hsieh para para establecer la analogía con un sistema simple amortiguado con masa.

Con estas analogías, Hsieh, estableció que una cimentación que descansa superficialmente en un semi-espacio elástico, sujeta a vibraciones verticales armónicas, puede modelarse análogamente como un sistema simple masa-resorte-amortiguador, con la diferencia de que tanto la rigidez como el amortiguamiento dependen de la frecuencia.

4.5. Teoría de Lysmer.

La teoría del semiespacio tuvo grandes avances y mayor aceptación, con los estudios de J. Lysmer [23], contenidos en sus tesis para el grado de Doctor en Filosofía en la Universidad de Michigan en 1965. En su trabajo, Lysmer analiza una zapata circular rígida, excitada por una fuerza vertical estacionaria dependiente del tiempo $P_0 e^{i\mu t}$ aplicada en el eje de simetría y apoyada superficialmente en un semi-espacio elástico, al que únicamente se transfieren las tensiones normales a la interfase suelo-cimiento.

Lysmer, extendiendo los análisis iniciados Reissner, y considerando los aportes realizados por Quinlan, Sung, Bycroft, y Hsieh, realizó sus análisis matemáticos a partir de un modelo en el cual el subsuelo puede considerarse como un semi-espacio perfectamente elástico, isotrópico y homogéneo. Para la época en que Lysmer publicó sus análisis, la técnica del semi-espacio elástico se había desarrollado hasta tal punto, que ya era posible calcular la respuesta en estado estacionario de un sistema rígido suelo-zapata, en el rango de frecuencias bajas. Este rango incluye las frecuencias de funcionamiento de la mayoría de las máquinas y las soluciones anteriores son por lo tanto útiles para muchos fines prácticos. Esto fue claramente demostrado en un artículo de Richart [24], quien también consideró los modos de vibración de balanceo y deslizamiento.

Lysmer, en su trabajo muestra cómo el rango de frecuencias puede extenderse para incluir todas las frecuencias del movimiento del estado estacionario, y también cómo ésta solución completa

del estado estacionario puede emplearse para calcular la respuesta transitoria causada por una carga no armónica de impulsos arbitrarios.

El sistema analizado por Lysmer, difiere de la mayoría de los sistemas de la dinámica clásica en los cuales las dimensiones son infinitas. Antes de centrar la atención en el modelo del semi-espacio elástico, define una amplia clase de sistemas dinámicos a los que denomina sistemas S, excitados por una fuerza vertical periódica $P(t)=P_0e^{i\mu t}$ de frecuencia μ y amplitud P_0 aplicada en el punto O, de modo que el desplazamiento ¢ de dicho punto, es siempre vertical. Esta clase de sistemas simétrico respecto al eje vertical que pasa por el punto O, son del tipo que analiza Lysmer. El sistema S puede exhibir o no un amortiguamiento viscoso y puede ser de dimensiones finitas o infinitas. En el caso del movimiento en estado estacionario se sabe que las fuerzas y los desplazamientos son armónicos con la frecuencia circular μ y proporcional a la amplitud de la fuerza de excitación. $¢=\frac{P_0}{k}Fe^{i\mu t}$ Donde k es una cantidad constante que tiene dimensión fuerza / longitud y F es una función adimensional.

La cantidad k se denominará constante de resorte y por lo general se puede suponer igual a la constante de resorte estática del sistema S. Sin embargo hay miembros de la clase del sistema considerado, para los que esto no es posible, como los que únicamente tienen amortiguador, en cuyo caso deben buscarse otras opciones.

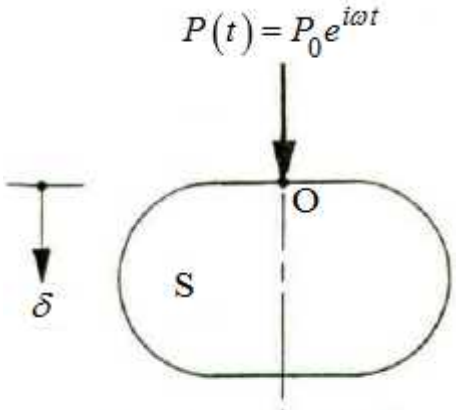


Fig (4.16): System S

La función compleja independiente del tiempo $F = F_1 + iF_2$ es en general una función de la frecuencia y de las propiedades del sistema S. En lo sucesivo se hará referencia a F como la función de desplazamiento para el sistema S. Debe tenerse en cuenta que a la constante de resorte estática k, corresponde $F = F_1 = 1$ para $\mu = 0$ y que K es la rigidez dependiente de la frecuencia.

Lysmer luego aborda la posibilidad de que los desplazamientos ¢ de un oscilador simple resorte- amortiguamiento, puedan considerarse como análogo de un sistema S.

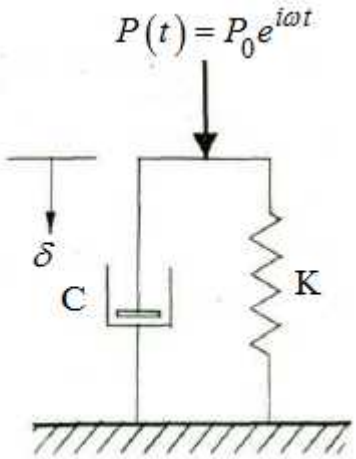


Fig (4.17): Analog for System S

La ecuación de equilibrio dinámico de dicho sistema es: $C\dot{¢} + K¢ = P_0 e^{i\mu t}$ (4.26) donde el sistema de parámetros C y K son reales.

Por sustitución de la ecuación del desplazamiento $¢ = \frac{P_0}{k} F e^{i\mu t}$ en la ecuación de equilibrio dinámico se obtiene: $i\mu CF + KF = k$ (3.27)

Separando la parte real dela imaginaria se obtienen las siguientes ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} -\mu F_2 C + F_1 K &= k \\ \mu F_1 C + F_2 K &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.28)$$ las que tienen como solucion: $$\left.\begin{aligned} K &= \frac{F_1}{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}} k \\ C &= \frac{-F_2 / \mu}{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}} k \end{aligned}\right\} (4.29)$$

Estas expresiones demuestran que es realmente posible determinar parámetros adecuados C y K con tal que sean funciones de la frecuencia excitadora μ

Lysmer luego consideró la dinámica del sistema S + m, que se obtiene complementando el sistema S con una masa rígida m en el punto 0. Supongamos que este nuevo sistema es excitado por una fuerza vertical armónica: $Q(t) = Q_0 e^{i\mu t}$ actuando en la masa adicionada.

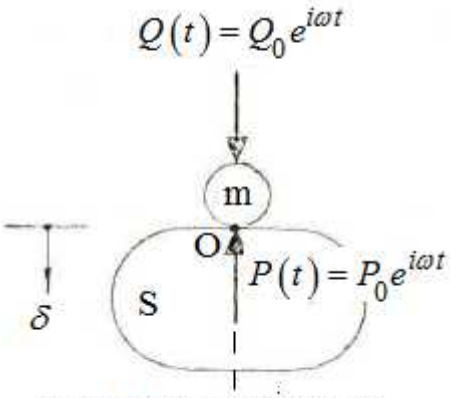


Fig (4.18): System S + m

Este nuevo sistema pertenecerá a la clase definida anteriormente y por lo tanto existe una función $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$ tal que el desplazamiento ¢ de la masa m, y por ende del punto O, pueda ser escrito en la forma: $¢ = \frac{Q_0}{k} \bar{F} e^{i\mu t}$

Se puede encontrar una conexión entre F y $\bar{F}$ introduciendo la reacción P actuando sobre la masa m, y el sistema S, en el punto 0. Esta fuerza está relacionada con el desplazamiento ¢ $¢ = \frac{P_0}{k} F e^{i\mu t}$ y debe satisfacer la ecuación de movimiento para la masa m.

$$m¢'' = Q_0 e^{i\mu t} - P_0 e^{i\mu t} \quad (4.30)$$

Diferenciando las ecuaciones $¢ = \frac{P_0}{k} F e^{i\mu t}$ y $¢ = \frac{Q_0}{k} \bar{F} e^{i\mu t}$ se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} m¢'' &= -\frac{m\mu^2}{k} F P_0 e^{i\mu t} \\ m¢'' &= -\frac{m\mu^2}{k} \bar{F} Q_0 e^{i\mu t} \end{aligned}\right\}$$ Reemplazándolas en la ecuación de equilibrio $$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{Q_0}{1 - \frac{m\mu^2}{k} F} \\ \bar{F} &= \frac{F}{1 - \frac{m\mu^2}{k} F} \end{aligned}\right\}$$

Consecuentemente el desplazamiento del punto O del sistema S + m está dado por la ecuación:

$$¢ = \frac{Q_0}{k} \bar{F} e^{i\mu t} = \frac{Q_0}{k} \frac{F}{1 - \frac{m\mu^2}{k} F} \quad (4.31)$$

Este importante resultado expresa la solución de estado estacionario del sistema S + m en términos de la solución del sistema simple S. Su importancia física se aprecia mejor si la parte real está separada de la imaginaria. Esto dará la solución al caso cuando la fuerza de excitación es: $Q(t) = Q_0 e^{i\mu t}$ Realizando el proceso de separación encontramos el desplazamiento real:

$$¢ = \frac{Q_0}{k} \sqrt{\frac{F_1^2 + F_2^2}{\left[1 - \frac{m\mu^2}{k} F_1\right]^2 - \left[\frac{m\mu^2}{k} F_2\right]^2}} \cos(\mu t + \sim) \quad (4.32)$$

Donde la cantidad sub radical es el factor de amplificación dinámica del sistema estacionario DAF, y es igual al valor absoluto de $\bar{F}$

$$¢ = \frac{Q_0}{k} DAF \cos(\mu t + \sim) = \frac{Q_0}{k} \left|\bar{F}\right| \cos(\mu t + \sim) \quad (4.33)$$

Lysmer ilustra el uso de la teoría desarrollada, considerando el sistema simple S, resorte-amortiguador carente de masa, perteneciente a los sistemas cubiertos por la teoría, y por lo tanto tendrá una solución de estado estacionario: $¢ = \frac{P_0}{k} F e^{i\mu t}$

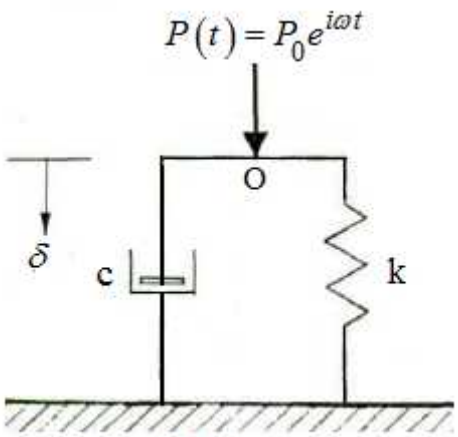


Fig (4.19): System S

La ecuación del movimiento del punto O es: $c\dot{¢} + k¢ = \frac{P_0}{k} e^{i\mu t}$ en la que reemplazando la ecuación el desplazamiento, se obtiene la ecuación para la función del desplazamiento:

$$F = \frac{1}{1 + i\frac{c}{k}\mu} = \frac{1}{1 + a_0} \quad (4.34)$$

Donde $a_0 = \frac{c}{k}\mu$ es un número adimensional denominado relación de frecuencias del oscilador amortiguado. Separando la parte real de la parte imaginaria en la ecuación de la función del desplazamiento, se obtienen las siguientes funciones F_1 y F_2

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{1+\bar{a}_0^{\,2}} \\ F_2 &= \frac{-\bar{a}_0}{1+\bar{a}_0^{\,2}} \end{aligned}\right\} \quad (4.35)$$

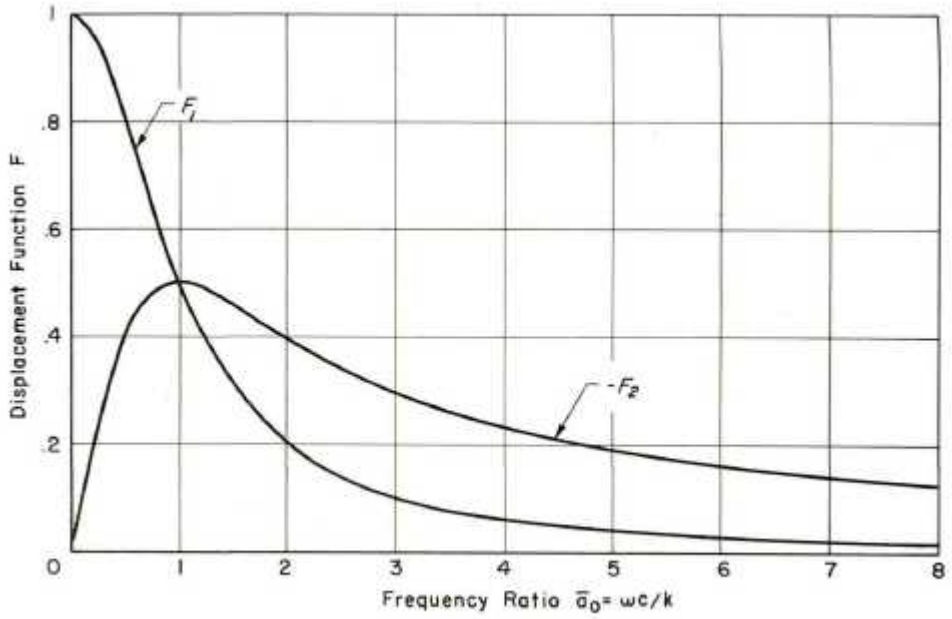


Fig (4.20): Displacement Function for Simple Damped Oscillator. Lysemer 1965

Reemplazando las funciones $\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{1+\bar{a}_0^{\,2}} \\ F_2 &= \frac{-\bar{a}_0}{1+\bar{a}_0^{\,2}} \end{aligned}\right\}$ en $\left.\begin{aligned} K &= \frac{F_1}{F_1^{\,2}+F_2^{\,2}}k \\ C &= \frac{-F_2/\mu}{F_1^{\,2}+F_2^{\,2}}k \end{aligned}\right\}$ resulta que $C = c$ y $K = k$

Son constantes, y que la función del desplazamiento es asintótica: $\left.\begin{aligned} F_1 &\to \frac{1}{\bar{a}_0^{\,2}} \\ F_2 &= \frac{-1}{1+\bar{a}_0} \end{aligned}\right\} \bar{a}_0 \to \infty$

Habiendo determinado la función de desplazamiento del sistema S, Lysmer determina el desplazamiento del oscilador más general masa resorte amortiguador, al que denomina como sistema S + m.

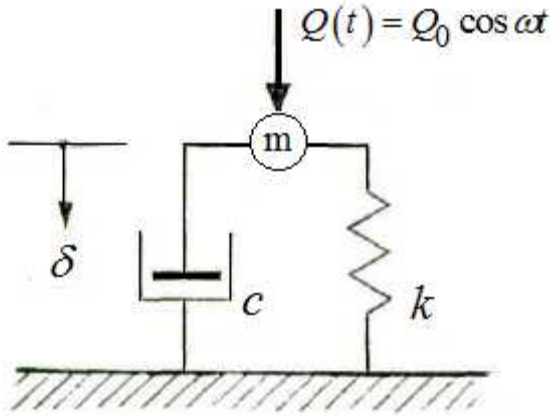


Fig (4.21): Sistema s + m. Lysmer 1965

Antes de anotar la solución, introduce el parámetro llamado relación de masa, definido como $\bar{B} = \frac{km}{c^2}$. Este número adimensional puede considerarse como una medida a escala para la masa m.

Considerando que $a_0 = \frac{c}{k}\mu$ entonces $\bar{B}a_0{}^2 = \frac{m\mu^2}{k}$ y que el factor de amplificación dinámica es:

$$DAF = \sqrt{\frac{F_1{}^2 + F_2{}^2}{\left[1 - \frac{m\mu^2}{k}F_1\right]^2 - \left[\frac{m\mu^2}{k}F_2\right]^2}} \qquad (4.36)$$

Entonces el desplazamiento general para el oscilador amortiguado es:

$$¢ = \frac{Q_0}{k}\sqrt{\frac{1}{\left(1 - \bar{B}a_0{}^2\right)^2 + a_0{}^2}}\cos\left(\mu t + \sim\right) \qquad (4.37)$$

Se demuestra analíticamente que siempre que $\bar{B} \succ \frac{1}{2}$, los espectros de respuesta mostrados exhiben valores picos de resonancia $DAF_{max} = \frac{\bar{B}}{\sqrt{\bar{B} - 1/4}}$, para las relaciones de frecuencia $a_0 = \frac{\sqrt{\bar{B} - 1/2}}{\bar{B}}$

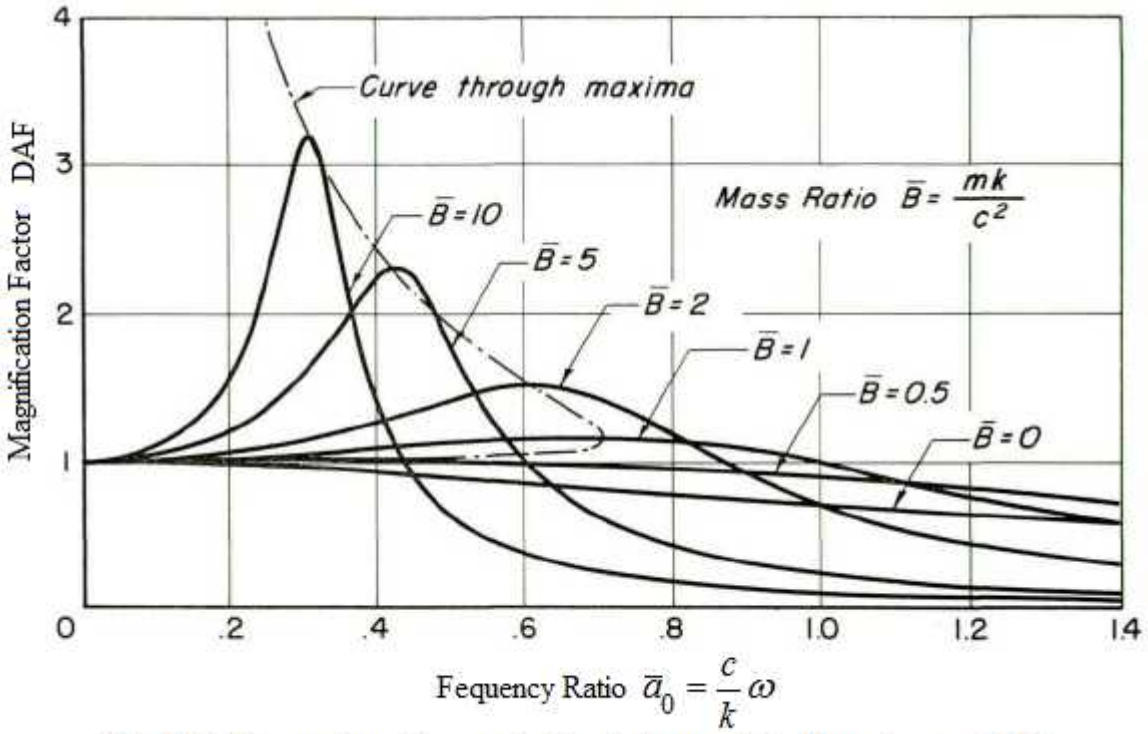


Fig (4.22): Steady-State Spectra for Simple Damped Oscillator. Lysmer 1965

Para $\bar{B} \leq \frac{1}{2}$ no existen picos y el mayor desplazamiento ocurre para el caso de carga estática.

La forma anterior de la solución para el oscilador simple amortiguado es por supuesto, equivalente a la forma más usual que se encuentran en los libros de texto estándar, que utilizan los parámetros adimensionales $\mu\sqrt{\frac{m}{k}}$ y $\frac{c}{2}\sqrt{km}$.

La ventaja de usar $\bar{a}_0 = \frac{\mu c}{k}$ y $\bar{B} = \frac{km}{c^2}$ es que el efecto de frecuencia y masa puede ser estudiados por separado.

Lysmer obtiene la solucion para el desplazamiento ¢ en la superficie libre para estado estacionario del semi-espacio elástico perfecto, caracterizado por la densidad de masa ° y las constantes elásticas G y ¬, excitado por una carga uniforme vertical superficial $P = P_0 e^{i\mu t}$ por unidad de área.

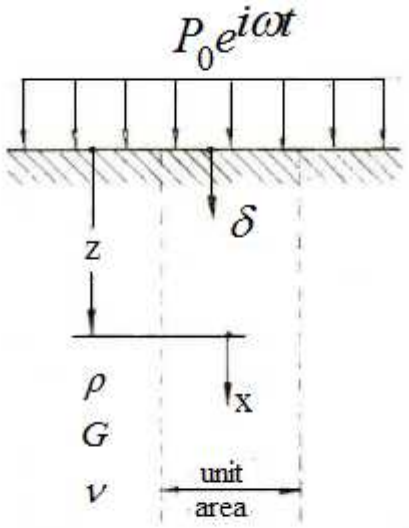


Fig (4.23): Uniformly Loaded Elastic Half Space

Para realizar este análisis, basta considerar una columna de unidad de área, la que en ausencia de desplazamientos horizontales se comportará como una varilla con desplazamiento lateral nulo, y su módulo elástico constreñido es por lo tanto: $E_p = \frac{G}{s^2}$ donde $s^2 = \frac{1-2¬}{2(1-¬)}$

La velocidad de propagación de las ondas P a lo largo de la barra, es $V_p = \sqrt{\frac{E_p}{°}} = \frac{1}{s}\sqrt{\frac{G}{°}} = \frac{V_s}{s}$

Donde V es la velocidad de ondas S de cortantes. No se producirá ninguna onda reflejada, ya que la varilla es infinitamente larga y los desplazamientos de esta barra deben por tanto ser de la forma: $x = Ae^{i\mu\left(t-z/V_p\right)}$ que es la expresión general para una onda sinusoidal con amplitud A propagada hacia abajo con la velocidad constante V_p

El esfuerzo de tracción en un plano horizontal es: $\pm\left(z\right) = E_p \frac{\partial x}{\partial z} = -iAE_p \frac{\mu}{V_p} e^{i\mu\left(t-z/V_p\right)}$ y el esfuerzo en la condición de frontera $z = 0$ es consecuentemente:

$$\pm\left(0\right) = E_p \frac{\partial x}{\partial z} = -P_0 e^{i\mu t} = -iAE_p \frac{\mu}{V_p} e^{i\mu t} \quad \text{O} \quad A = \frac{iP_0}{\mu\sqrt{\circ E_p}} = \frac{isP_0}{\mu\sqrt{\circ G}} \quad (4.38)$$

Por tanto mediante la ecuación $x = Ae^{i\mu\left(t-z/V_p\right)}$ se obtiene el desplazamiento ¢ en la superficie libre: $¢ = \frac{isP_0 e^{i\mu t}}{\mu\sqrt{\circ E_p}}$ (4.39)

La solución exacta de la ecuación diferencial del estado estacionario es: $\frac{\sqrt{\circ G}}{s}¢^{\cdot} = P_0 e^{i\mu t}$ (4.40) que es también la ecuación de movimiento para el oscilador simple amortiguado.

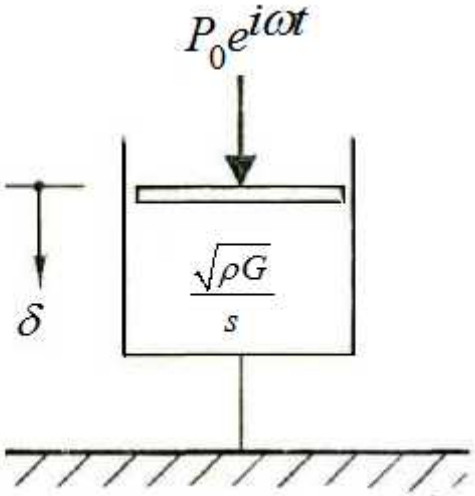


Fig (4.24): Analog for Half Space

Este oscilador, que consiste de solo un amortiguador $c = \frac{\sqrt{\circ G}}{s}$ puede ser usado como analógico para el semi-espacio cargado uniformemente, del que solamente estamos interesados en determinar el desplazamiento en la superficie.

Esta analogía entre la disipación de energía debida a la propagación de la onda y la de la amortiguación viscosa es de gran interés, ya que nos permite estudiar el comportamiento de un sistema infinito considerando un sistema finito simple. Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar que es posible ampliar esta idea a sistemas más complicados. En particular, estudiaremos un sistema consistente en una base circular rígida descansando sobre la superficie de un semi-espacio elástico. Los elementos materiales de un semi- espacio elástico no poseen propiedades de amortiguación. La disipación de energía observada es por lo tanto enteramente debida a la geometría infinita del sistema, y en lo sucesivo se denominará amortiguación geométrica, en comparación con el amortiguamiento viscoso, que está relacionado con una propiedad del material, tal como la viscosidad de un fluido.

El tema de fondo del análisis de Lysmer, es la idealización del modelo del semi-espacio, para el sistema suelo-zapata, consistente en una zata circular rígida de masa m, que descansa sobre una base isotrópica homogénea de un semi-espacio perfectamente elástico, caracterizado por las constantes físicas, $(G, \neg, \circ)$

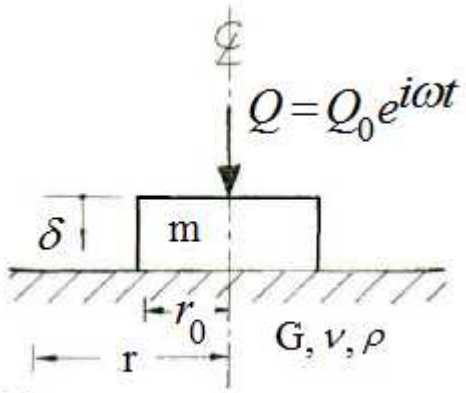


Fig (4.25): Footing-Soil System. Lysmer 1965.

Para la solucion del estado estacionario de este sistema, primero debe definirse la función del desplazamiento del punto O para m = 0.

La solucion para $m \neq 0$ fue previamente definida para el sistema S + m:

$$¢ = \frac{Q_0}{k} \bar{F} e^{i\mu t} = \frac{Q_0}{k} \frac{F}{1 - \frac{m\mu^2}{k} F} \quad (4.41)$$

Si la relación de Poisson ¬ es dada, entonces F depende de los parámetros $(\mu, r_0, G, °)$ contenidos en la relación adimensional de frecuencia $a_0 = \mu r_0 \sqrt{\frac{°}{G}}$ y dado que F es adimensional, se concluye que únicamente es una función de $(¬, a_0)$

La importancia física de a_0 se hace evidente si se anota que la velocidad V_s de las ondas S de cortantes en un medio solido elástico es: $V_s = \sqrt{\frac{G}{°}}$ por tanto la ecuación para la relación de frecuencia puede reescribirse de la siguiente manera: $a_0 = \mu \frac{r_0}{V_s} = 2® \frac{r_0}{a_s}$ donde a_s es la longitud de las ondas de cortante en el semi-espacio elástico. Estas relaciones muestran que a_0 es una frecuencia basada en el tiempo que toma una onda de cortante S, en viajar desde el eje central de la zapata, hasta el borde, o bien una medida del radio de la zapata r_0 en relación a la longitud de las ondas a_s propagadas en el semi-espacio elástico.

La constante de resorte estática para una base rígida circular de radio r_0 es: $k = \frac{4Gr_0}{1 - ¬}$ (4.42) y la expresión para el desplazamiento: $¢ = \frac{Q_0}{k} F(a_0, ¬) e^{i\mu t}$ (4.43)

Los parámetros del modelo resorte-amortiguador análogo correspondiente son entonces:

$$K = \frac{F_1}{F_1^2 + F_2^2} k = k_1 k \quad (4.44) \qquad C = \frac{\frac{-F_2}{\sim_0}}{F_1^2 + F_2^2} \frac{kr_0}{V_s} = c_1 \frac{kr_0}{V_s} \quad (4.45)$$

Donde los coeficientes k_1 y c_1 están definidos por $k_1 = \frac{F_1}{F_1^2 + F_2^2}$ (4.46) y $c_1 = \frac{-F_2 / a_0}{F_1^2 + F_2^2}$ (4.47) las que son funciones adimensionales de $\left(a_0, \neg\right)$

A partir del análisis de dicho modelo, propuso el uso de coeficientes de rigidez y amortiguamiento K y C dependientes de la relación de frecuencias a_0 y de la relación de Poisson ν, en donde F_1 representa la parte real y F_2 la parte imaginaria de las funciones complejas de desplazamientos para el sistema S amortiguado.

Mediante sustitución de las ecuaciones $\left.\begin{array}{c} K = \frac{F_1}{F_1^2 + F_2^2} k = k_1 k \\ C = \frac{\frac{-F_2}{\sim_0}}{F_1^2 + F_2^2} \frac{kr_0}{V_s} = c_1 \frac{kr_0}{V_s} \end{array}\right\}$ en $C\dot{¢} + K¢ = P_0 e^{i\mu t}$

Se obtiene la ecuación para el movimiento sin masa zapata-suelo:

$$c_1 \frac{kr_0}{V_s} \dot{¢} + k_1 k ¢ = P_0 e^{i\mu t} \quad (4.48)$$

Antes de considerar esta ecuación con más detalle debemos estudiar el comportamiento de c_1 y k_1. Esto requiere del conocimiento de la función de desplazamiento F.

La determinación analítica de esta función implica la solución de la ecuación de onda para un sólido elástico con una condición de frontera mixta, a saber, una condición de tensión cero en la superficie libre del semi-espacio y una condición de desplazamiento uniforme bajo la base. Este difícil problema matemático todavía no ha sido resuelto exactamente y, por lo tanto, es necesario confiar en aproximaciones analíticas y numéricas que posteriormente serán discutidas.

Lysmer revisa la suposición de Sung y la de Bycroft, respecto a que si las dimensiones de la cimentación son pequeñas comparada con la longitud de onda propagándose en el semi-espacio elástico, entonces la distribución de la presión bajo la cimentación, exhibe valores que se aproximan a la presión correspondiente al caso estático,

$\mu = a_0 = 0$. Esta distribución se conoce a partir de la teoría de la elasticidad, y puede ser expresada, a como hemos visto previamente:

$$q(r) = \frac{P_0}{2® r_0 \sqrt{r_0^2 - r^2}} \qquad (4.49)$$

Sung y Bycroft, por lo tanto, reemplazaron la condición de frontera, con la condición de esfuerzo puro:

$$q(r,t) = \begin{cases} \dfrac{P_0 e^{i\mu t}}{2® r_0 \sqrt{r_0^2 - r^2}} & para \quad r \prec r_0 \\ 0 \quad para \quad r \succ r_0 \end{cases} \qquad (4.50)$$

A como hemos visto antes, Sung y Bycroft, fueron capaces de obtener soluciones aproximadas para los desplazamientos en la superficie del semi- espacio, para rango de valores bajos de la frecuencia $a_0 \prec 1.5$

El desplazamiento vertical de un punto de la superficie a la distancia r desde el eje de simetría, se puede escribir en función de la relación de distancia $a = \frac{r}{V_s}\mu$, que es una generalización de la definición de la relación de frecuencia.

$$¢(r,t) = \frac{P_0}{Gr} g\left(a, a_0, ¬\right) e^{i\mu t} \qquad (4.51)$$

La función de desplazamiento superficial $g = g_1 + ig_2$ es adimensional e independiente del tiempo, y es característica para las condiciones de frontera elegidas. En el caso de las soluciones de Sung y Bycroft, esta condición es la distribución de presión estática definida por la ecuación:

$$q(r,0) = \frac{P_0 e^{i\mu t}}{2®\, r_0 \sqrt{r_0^{\,2} - r^2}} \; para \quad r \prec r_0 \qquad (4.52)$$

Sung determinó solamente el desplazamiento en el centro de la base $a = 0$, mientras que Bycroft calculó el desplazamiento como un valor promedio del desplazamiento de la base cargada. Por tanto la solución de Bycroft es una mejor aproximación que la de Sung.

Bycroft calculó el desplazamiento de la base como positivo hacia arriba, y escribió su solución final en la forma:

$$¢ = \frac{P_0}{Gr_0} f\left(a_0, ¬\right) e^{i\mu t} \qquad (4.53)$$

Las partes real e imaginaria de su función de desplazamiento $f = f_1 + if_2$ son las del grafico previamente mostrado cuando nos ocupamos de los aportes de Bycroft para las soluciones de los desplazamientos del semi-espacio elástico.

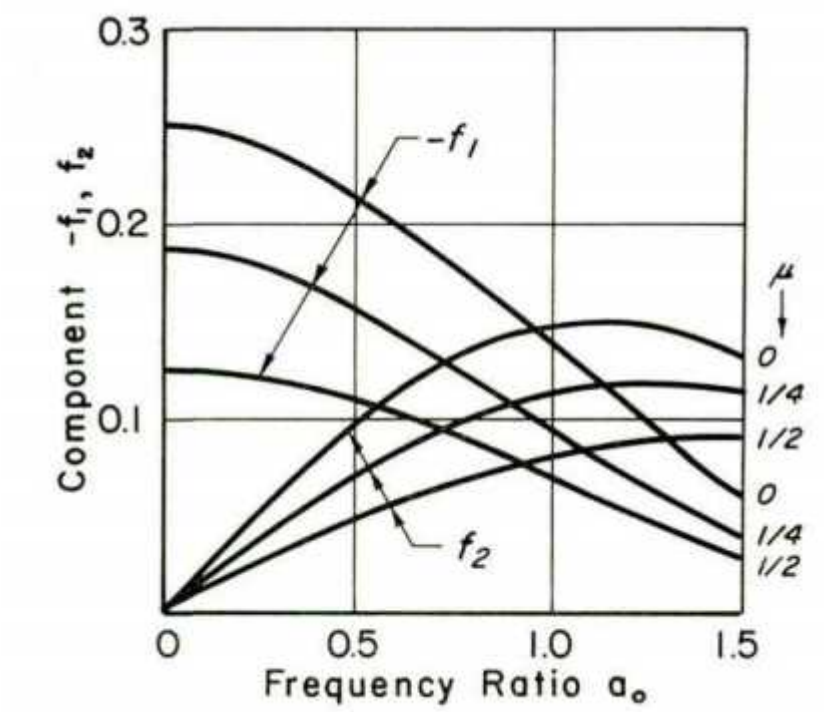


Fig (4.26): Bycroft's Displacement Function

Lysmer compara las ecuaciones $¢ = \frac{P_0}{k} f\left(a_0, ¬\right) e^{i\mu t}$ (4.54) y $¢ = \frac{P_0}{Gr_0} f\left(a_0, ¬\right) e^{i\mu t}$ (4.55) concluyendo que la función de desplazamiento de Bycroft, está conectada a la función de desplazamiento normalizado F utilizada en su trabajo, mediante la simple expresión: $F = \frac{-4}{1-¬} f$

Lysmer definió una nueva función de desplazamiento modificada *F* expresada como:

$F = \frac{4}{1-¬} f = F_1 + iF_2$ (4.56), en la que los componentes de F para cualquier propósito práctico podemos considerarlos F como independiente de la relación de Poisson ν. Ésta es, por supuesto, la principal razón para introducir la función de desplazamiento normalizado.

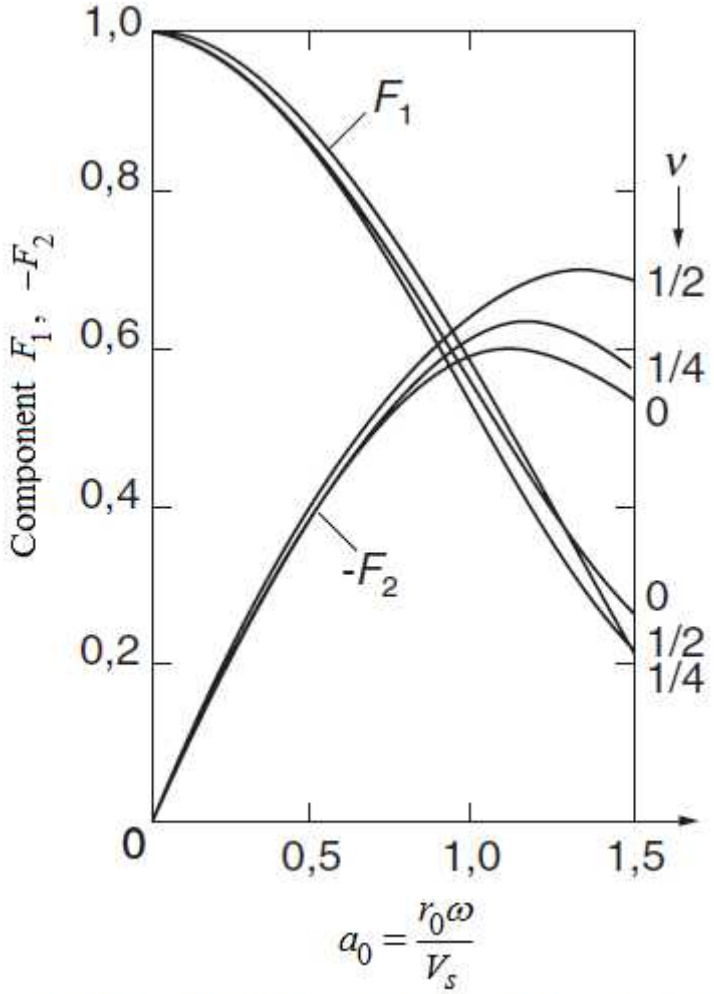


Fig (4.27): The Displacement Function F. Lysmer 1965

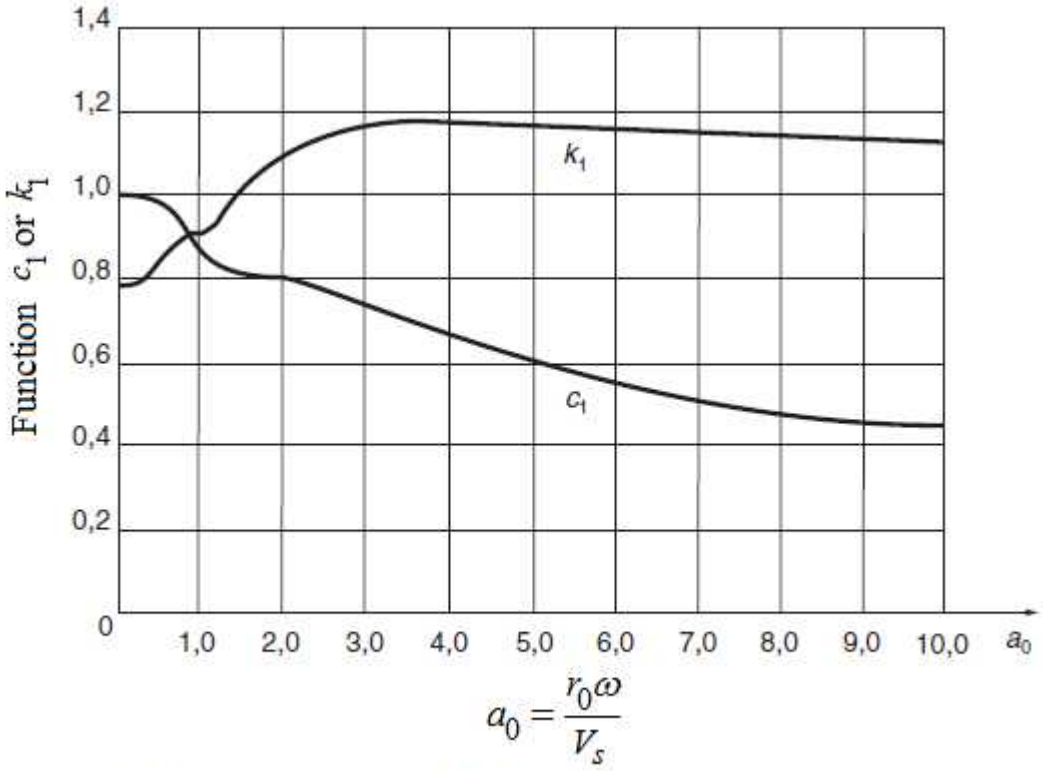


Fig (4.28): The Function k1 and c1 for Poisson Ratio = 1/3. Lysmeer 1965

Con este trabajo Lysmer, dio el primer paso en la simplificación para analizar el problema de un cuerpo rígido apoyado en la superficie del semi-espacio elástico. Estableció valores independientes de la frecuencia para los coeficientes de resorte y del amortiguador, en el modelo de Hsieh. Lysmer llegó a estos resultados asumiendo que el valor de la constante de rigidez era igual a la del caso estático, realizando algunos ajustes al valor de la constante de amortiguamiento, para minimizar el error en todo el rango de las relaciones de Poisson $0 \prec \neg \prec 0.5$, y en el rango $0 \leq a_0 \leq 1$ para la frecuencia adimensional a_0. Las constantes de resorte y amortiguamiento para una carga vertical armónica, aplicada en el centro del bloque rígido circular son: $k_z = \frac{Gr_0}{1-\neg}$ (4.57) y $c_z = \frac{3.4 r_0^{\,2}}{1-\neg}\sqrt{\circ G}$ (4.58)

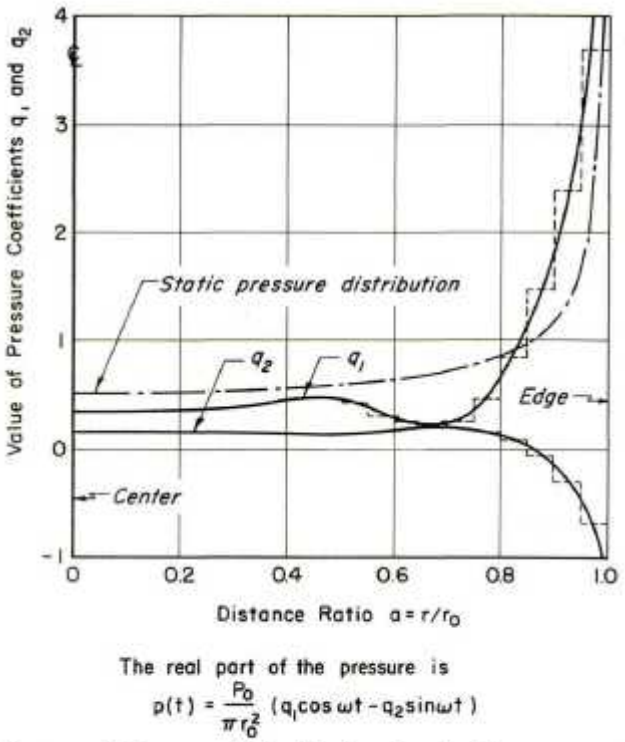


Fig (4.29): Pressure Distribution for the Case: $a_0 = 1$

Lysmer estableció que la pérdida de energía por radiación en el semi-espacio elástico, es comparable a la del amortiguador en un simple oscilador amortiguado. Esta observación ha llevado al autor a la adopción de un sistema rigidez-amortiguador analógico para cálculos prácticos. El nuevo oscilador analógico se diferencia de los análogos previamente sugeridos, en que sus componentes resorte-amortiguador, son independientes de la frecuencia de la fuerza de excitación. Este modelo analógico puede ser utilizado para predecir la respuesta a los impulsos dinámicos mediante los métodos clásicos para un oscilador amortiguado.

Lysmer instauró que la respuesta a las vibraciones verticales en una zapata circular rígida apoyada sobre un semiespacio elástico homogéneo e isotrópico, caracterizado mediante los parámetros G , ¬ y ° puede representarse con bastante precisión con el modelo simplificado de parámetros concentrados masa-rigidez-amortiguador, mediante la llamada analogía de Lysmer 1966, eligiendo correctamente los coeficientes del resorte y del amortiguador.

Con los trabajos de John Lysmer y F. E. Richard [25] publicados en 1966, se extendió la obra de Hsieh (1962), incluyendo el efecto de la masa m de la cimentación, y el concepto disipación de energía por amortiguamiento geométrico del suelo, y se determinan las amplitudes de respuesta de vibración asociadas a la frecuencia de resonancia.

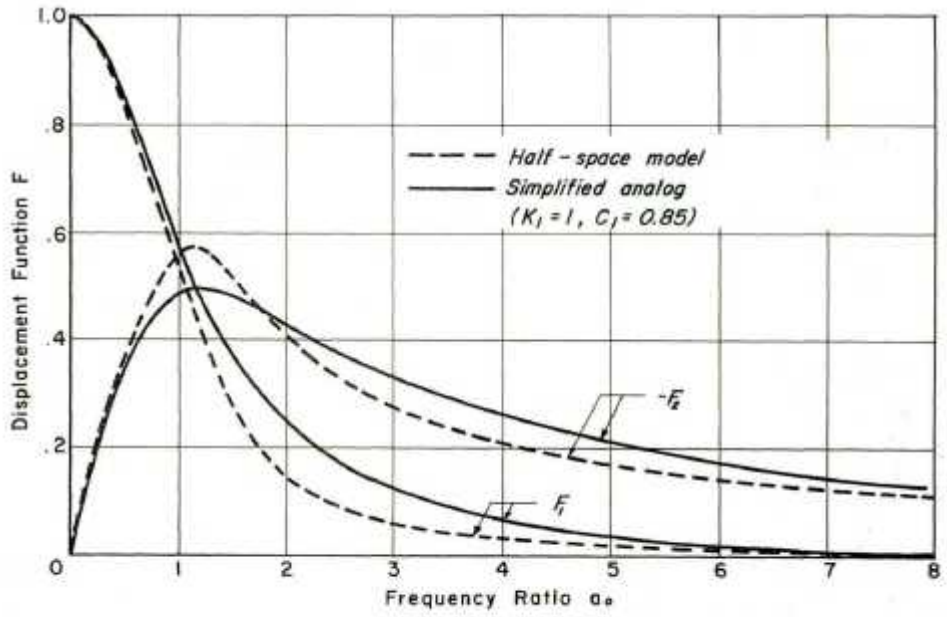


Fig (4.30): Displacement Functionfor Footing-Soil System

Las respuestas para vibraciones verticales en una zapata circular rígida apoyada sobre un semiespacio elástico, pueden representarse con bastante precisión en dependencia de que las constantes del resorte y amortiguador sean elegidas correctamente. Con estos trabajos quedó establecido que todos los modos de vibración pueden ser estudiados mediante un sistema masa-resorte-amortiguador de parámetros discretos, independientes de la frecuencia.

Lysmer y Richart (1966), utilizando los valores de *F* y la relación de masa modificada para vibraciones verticales $B_z = \frac{1-\neg}{4} b = \frac{1-\neg}{4} \frac{m}{\circ r_0^3}$ de Lysmer, desarrollaron las curvas de respuesta mostradas en el siguiente gráfico. Se analizó el efecto de la relación de la frecuencia

$a_0 = \frac{\mu r_0}{V_s}$ en la variación de los factores de rigidez y amortiguamiento, verificándose que estas cantidades pueden usarse en los intervalos de frecuencia de interés práctico.

La constante de rigidez fue tomada igual al valor estático $k_z = \frac{Gr_0}{1-\neg}$ (4.59) y el amortiguamiento representado por $c_z = \frac{3.4 r_0^{\,2}}{1-\neg}\sqrt{\circ G}$ (4.60)

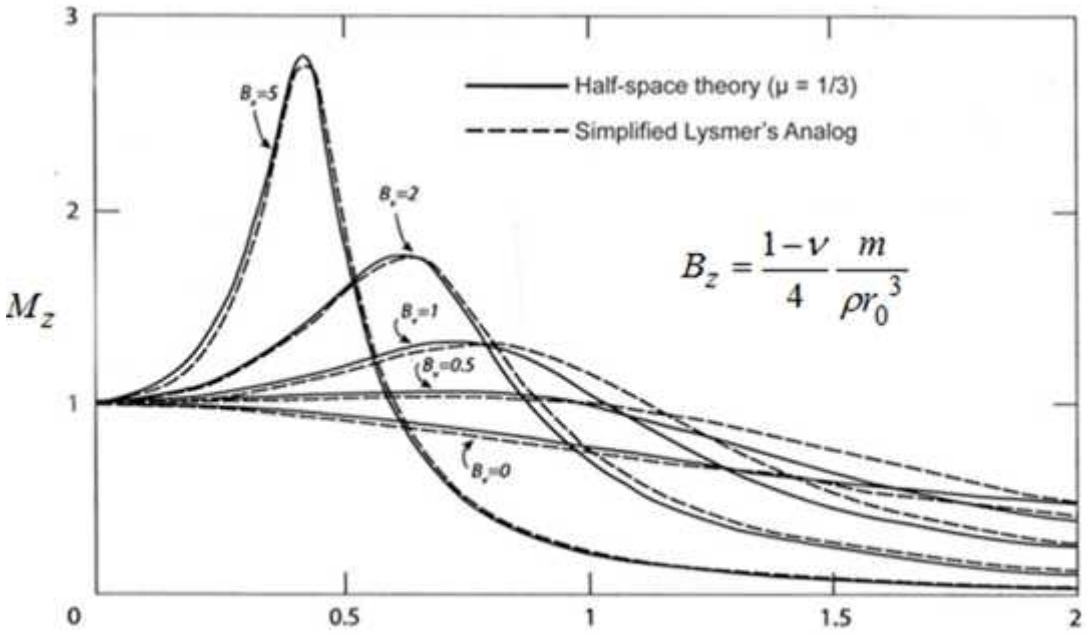


Fig (4.31): $a_0 = \frac{\omega r_0}{V_s}$

Con estos valores se determinó la frecuencia natural de vibración vertical $\mu_z = \sqrt{\frac{k_z}{m}}$ se construyeron las curvas de amplificación, $M_z = \frac{1}{\sqrt{\left(k_1 - B_z a_0^{\,2}\right) + \left(c_1 a_0\right)^2}}$ (4.61) y $a_0 = \frac{\mu r_0}{V_s}$

mostrados con líneas punteadas. Las curvas de trazo continuo corresponden a las soluciones exactas con el modelo del semi-espacio elástico.

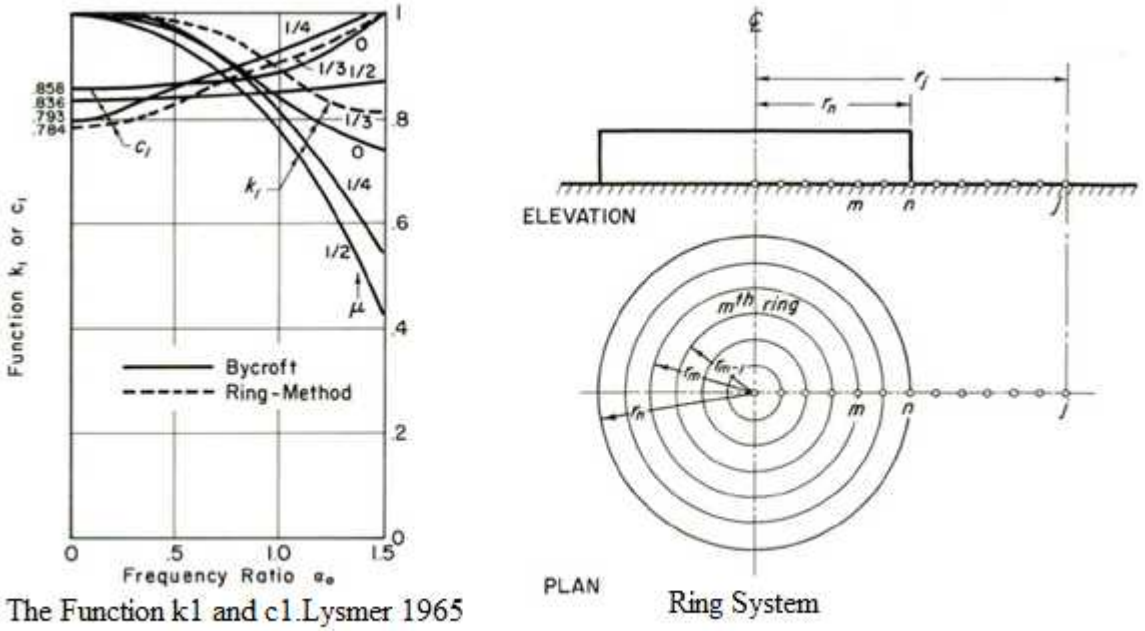
La ecuación de movimiento para la analogía de Lysmer puede ser escrita como:

$$m\ddot{z} + \frac{3.4r_0^{\,2}}{1-\neg}\sqrt{\circ G}\,\dot{z} + \frac{4Gr_0}{1-\neg}z = P_0 e^{i\mu t} \qquad (4.62)$$

La relación de amortiguamiento es $\P_z = \frac{C_z}{C_c} = \frac{C_z}{2\sqrt{k_z m}} = \frac{3.4r_0^{\,2}}{2(1-\neg)}\frac{\sqrt{\circ G}}{\sqrt{\frac{4Gr_0 m}{(1-\neg)}}}$ (4.63) o $\P_z = \frac{0.425}{\sqrt{B_z}}$

Y la resonancia ocurre solamente cuando $B_z \geq 0.3$

Se corroboro que la *Analogía de Lysmer*; es válida para calcular la respuesta de una cimentación circular rígida, sujeta a oscilaciones verticales.



The Function k1 and c1.Lysmer 1965

Ring System

Fig (4.32)

4.6. Aportes posteriores a Lysmer.

F.E. Richard y R.V.Whitman en 1969 demostraron que el comportamiento dinámico de una cimentación puede resolverse satisfactoriamente mediante la teoría del semi-espacio elástico.

Richart y Whitman (1967) y más tarde Richart et al. (1970) y Whitman (1976) [26, 27, 28, 29] presentaron expresiones para los parámetros de rigidez y amortiguamiento, correspondientes a los cuatro modos de vibraciones: vertical, horizontal, oscilante y torsional.

En la teoría del semiespacio, se introdujeron ciertas simplificaciones matemáticas poco realistas, pero que sirvieron de base para estimar las constantes de rigidez y amortiguamiento que deben de ser incorporadas en sistemas vibratorios discretos modelados mediante masa-resorte-amortiguador.

Subrahmanyam (1971) ha extendido el trabajo de Sung. Richart y Whitman (1967), concluyendo que la teoría del semi-espacio elástico es cualitativamente satisfactoria, basado en vastos resultados de pruebas realizadas por él, y por el U.S. Army Engineer Waterways Experiment, Station. [30]

Otros investigadores también han presentado sus propias soluciones, las que pueden investigarse en F.E Richart et al (1970).

Las ideas previamente expuestas, condujeron a una serie de investigadores al análisis de la respuesta de la cimentación circular frente a solicitaciones más generales, tales como las vibraciones oscilantes horizontales, rotación (rocking) y balanceo (swaying). El estado del arte sobre el tema, hasta el año 1969, puede encontrarse en la obra de Richart, Ha1l y Woods. [31]

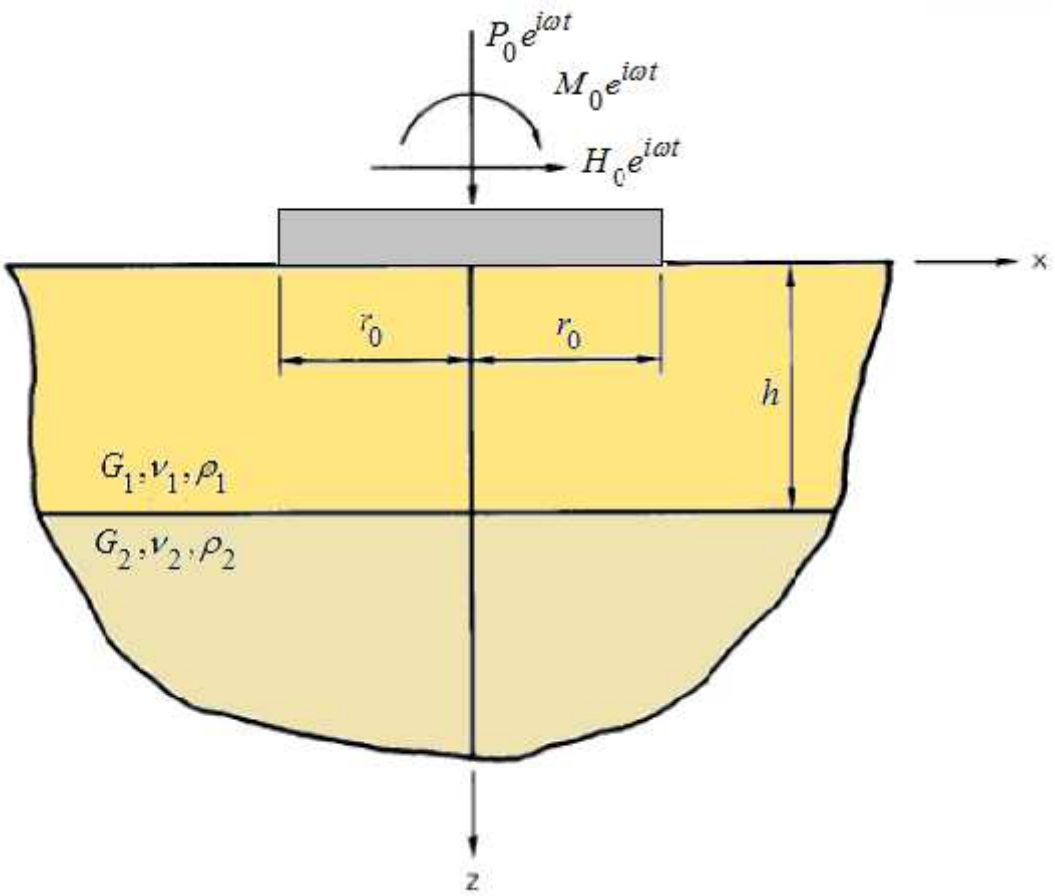


Fig (4.33): Disco de cimentacion sobre un suelo medio estratificado. Luco (1974)

Para cimentaciones en bloque, los efectos de deslizamiento horizontal y de cabeceo, ocurren acopladas, pero inicialmente por simplicidad se estudian los casos por separado. Las frecuencias naturales debidas a rotación o bien a deslizamiento, se emplean para determinar la respuesta de la cimentación bajo el efecto de ambas vibraciones actuando simultáneamente. A como puede demostrarse, la frecuencia natural de deslizamiento es muy próxima a las bajas frecuencias naturales de rotación y deslizamiento combinado. Sin embargo, el estado de esfuerzos resultante del acoplamiento exhibe discrepancias para algunos resultados obtenidos mediante el desacoplamiento.

Las relaciones de acoplamiento entre los movimientos horizontal y oscilante fueron considerados por primera vez por Luco & Westmann (1971), [32] quienes estudiaron las respuestas dinámicas de cimentaciones circulares en la superficie de un semi-espacio elástico para una amplia gama de frecuencias adimensionales. Presentaron además, las tracciones superficiales y los desplazamientos de campo lejano en función de la frecuencia.

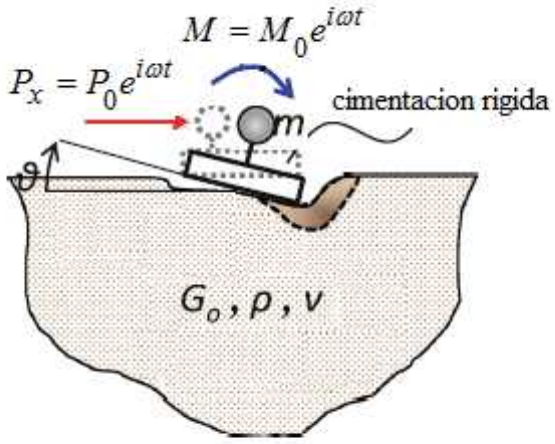


Fig (4.34): Cimentación superficial rigida sobre un semi-espacio elástico sujeta a vibración horizontal y rotación.

El tratamiento analítico de las vibraciones periódicas horizontales $P_x = P_0 e^{i\mu t}$ para obtener los parámetros discretos de rigidez y amortiguamiento y predecir la frecuencia de resonancia y la amplitud de vibración de las cimentaciones, se remonta a los trabajos de Arnold et al., 1955, Bycroft 1956 y 1959, Hsieh 1962, Barkan 1962, Lysmer y Richart 1966, Hall 1967, Dobry y

Gazetas 1985 y 1986. Esta función periódica se ha utilizado ampliamente para obtener los parámetros discretos de rigidez y amortiguamiento para vibraciones verticales, de rotación y de balanceo. Las vibraciones de torsión se encuentran totalmente desacopladas de las anteriores.

El problema de las vibraciones por torsión, de una cimentación circular apoyada en la superficie del semi-espacio elástico, fue analizado por Reissner en 1937 y posteriormente por Reissner y Sagoci en 1944, [33]. Los valores de las constantes de rigidez y amortiguamiento para el caso torsional, han sido han sido obtenidos por Luco y Westmann en 1971.

Las soluciones correspondientes a zapatas circulares, para diferentes modos de vibración, han sido desarrolladas por Bycroft (1956), Lysmer y Richart (1966), y Hall (1967). Las soluciones para la respuesta dinámica de fundaciones de forma arbitraria, se han desarrollado por Dobry y Gazetas 1986, y Gazetas y Tassoulas 1987. Esta teoría es válida para cimentaciones circulares y de franjas, incluyendo soluciones para los modos de vibración vertical, horizontal de rotación y de torsión. Para aplicar estas soluciones a cimentaciones de forma diferente a la circular, es necesario determinar el radio equivalente.

Para los movimientos vibratorios horizontales y de cabeceo, es posible obtener las soluciones en los sentidos corto y largo para cimentaciones rectangulares. Para el caso de fundaciones de franjas alargadas, la rigidez y el amortiguamiento correspondientes a los modos de vibración horizontal y de rotación, son insignificantes en la dirección longitudinal.

Los resultados de los análisis de Arnold et al 1955 y Bycroft 1956 [34] se expresan en términos de una relación de frecuencias dimensionales $a_0 = \frac{\mu r_0}{V_s}$ y una relación de masas *b*, la solución fue válida para todos los valores de ν, de una manera similar a la solución de Lysmer.

La solucion de Bycroft de 1956 para los coeficientes de rigidez y amortiguamiento dependientes de la frecuencia de excitación, son dadas para $\neg = 0$ y $0 \leq a_0 \leq 1.5$ mediante las siguientes expresiones (4.64):

Para translación: $\begin{cases} k_T = \circ V_s{}^2 r_0 \dfrac{f_{1H}}{f_{1H}{}^2 + f_{2H}{}^2} \\ c_T = -\dfrac{\circ V_s r_0{}^2}{a_0} \dfrac{f_{2H}}{f_{1H}{}^2 + f_{2H}{}^2} \end{cases}$ Para rotación: $\begin{cases} k_R = \circ V_s{}^2 r_0{}^3 \dfrac{f_{1R}}{f_{1R}{}^2 + f_{2R}{}^2} \\ c_R = -\dfrac{\circ V_s r_0{}^4}{a_0} \dfrac{f_{2R}}{f_{1R}{}^2 + f_{2R}{}^2} \end{cases}$

Donde:

$$\begin{cases} f_{1H} = -02188a_0 + 0.05992a_0{}^2 - 0.007917a_0{}^4 + 0.0005852a_0{}^6 - 0.00002693a_0{}^8 + ... \\ f_{2H} = 0.1248a_0 - 0.0236a_0{}^3 + 0.002299a_0{}^5 - 0.0001319a_0{}^7 + 0.000004866a_0{}^9 - .... \\ f_{1R} = -0.373 - 0.311a_0 - 0.12782a_0{}^2 + 0.488a_0{}^3 - 0.8498a_0{}^4 + 0.671a_0{}^5 - 0.1820a_0{}^6 + ... \\ f_{2R} = -0.0166a_0 - 0.1117a_0{}^2 + 0.3680a_0{}^3 - 0.2596a_0{}^4 + 0.1024a_0{}^5 - 0.02275a_0{}^6 + ... \end{cases}$$

Las teorías de D.D. Barkan 1962 [35], y Hall 1967, son la primeras desarrolladas para fundaciones circulares y no son aplicables a fundaciones de franjas. Barkan 1962 desarrolló un método para estimar la respuesta dinámica de fundaciones para máquinas empleando una rigidez elástica para representar el suelo de fundación. Esta aproximación no consideraba el efecto de la geometría de la cimentación, sino solamente el area independientemente de la forma.

Barkan estudió el comportamiento dinámico de fundaciones y de los suelos de base y desarrolló una teoría de rigidez elástica estática para las respuestas de fundaciones para máquinas. El parámetro base del suelo para esta teoría es el coeficiente de compresión uniforme definido mediante la expresión $C_u = c_s \dfrac{E}{1 - \neg^2} \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ (4.65) donde c_S es un coeficiente dependiente de la

relación largo ancho de la fundación, E es el módulo de elasticidad, y A el area de en proyección horizontal de la cimentación. Esta relación se limita a cimentaciones con $A \leq 10m^2$

Las relaciones recomendadas entre C_u y los coeficientes de compresión no uniforme correspondientes a rotación $C_{\square}$ y deslizamiento horizontal C_2 son los siguientes: $C_u = \begin{cases} 2C_{\square} \\ 2C_2 \end{cases}$

Los valores para las constantes de rigidez para movimiento vibratorio vertical, horizontal y de rotación, son dadas por las relaciones: $\begin{cases} k_z = C_u A \\ k_x = C_2 A \\ k_{\square} = C_{\square} I \end{cases}$ donde I es el momento de inercia del area de contacto alrededor del eje x.

Los valores para el amortiguamiento crítico del suelo de fundación para los diferentes

Modos de vibración son los siguientes: $\begin{cases} C_{cz} = 2\sqrt{mk_z} = 2\sqrt{mC_{uz}A} \\ C_{cx} = 2\sqrt{mk_x} = 2\sqrt{mC_{ux}A} \\ C_{c\square} = 2\sqrt{M_{m0}k_{\square}} = 2\sqrt{M_{m0}C_{\square}I} \end{cases}$ (4.66)

Donde M es el momento de inercia de la masa respecto al aje de rotación. Barkan no consideró amortiguamiento geométrico o material en su análisis; sin embargo las expresiones dadas para el amortiguamiento crítico, pueden emplearse para estimar el amortiguamiento material.

Hall en 1967 [36] desarrolló una analogía para vibraciones horizontales, y de rotación, para cimentaciones apoyadas sobre un semi-espacio elástico. Las expresiones para la relación de masa modificada para deslizamiento B_x, la constante estática de rigidez horizontal k_x, y de

amortiguamiento C_X, para cimentaciones circulares están definidas mediante las siguientes expresiones:

$$B_x = \frac{(7-8\neg)}{32(1-\neg)}\frac{m}{\circ r_0^{\,3}} = \frac{(7-8\neg)}{32(1-\neg)}\frac{W}{¥_s r_0^{\,3}} \quad (4.67)$$

El factor de frecuencia adimensional $a_0 = \frac{\mu r_0}{V_s}$.

La rigidez y el amortiguamiento equivalentes para vibraciones horizontales son:

$$\begin{cases} k_x = \dfrac{32(1-\neg)}{7-8\neg} G r_0 \\ C_x = \dfrac{18.4(1-\neg)}{7-8\neg} r_0^{\,2}\sqrt{\circ G} \end{cases} \quad (4.68)$$

La relación de amortiguamiento ξ es dada por: $\frac{C_x}{C_c} = \frac{0.2875}{\sqrt{B_x}}$

La ecuación de equilibrio dinámico, y la frecuencia natural para la analogía de Hall son las siguientes:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x = P_0 e^{i\mu t} \\ m\ddot{x} + \left[\dfrac{18.4(1-\neg)}{7-8\neg} r_0^{\,2}\sqrt{\circ G}\right]\dot{x} + \left[\dfrac{32(1-\neg)}{7-8\neg} G r_0\right] x = P_0 e^{i\mu t} \\ \mu_{nx} = \sqrt{\dfrac{\frac{32(1-\neg)}{7-8\neg} G r_0}{m}} \end{cases} \quad (4.69)$$

Las relaciones para la constante de rigidez y amortiguamiento horizontal, son válidas dentro de cierto rango de valores geométricos. Si la cimentación no es circular, el radio equivalente se define mediante la relación $r_0 = \sqrt[4]{\frac{(2B)(2L)^3}{2®}}$, donde L y B son respectivamente la longitud y el ancho de la cimentación, 2L y 2B definen el rectángulo circunscrito.

Para cimentaciones circulares, las constantes de rigidez y amortiguamiento geométrico estático, para vibración rotacional, están definidas mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} k_{¤} = \frac{8Gr_0^{\,3}}{3(1-¬)} \\ c_{¤} = \frac{0.8r_0^{\,4}\sqrt{G°}}{(1-¬)(1+B_{¤})} \end{cases} \quad (4.70)$$

Donde $B_{¤} = \frac{3(1-¬)}{8}\frac{M_{m0}}{°\,r_0^{\,5}}$ (4.71) es la relación adimensional de inercia rotacional.

Los gráficos de amplificación dinámica DAF_x versus el factor de frecuencia adimensional a_0 correspondientes a la solucion determinada con el semi-espacio elástico, muestran similitudes muy cercanas con las correspondientes a la analogía de Hall.

Las crestas planas en las curvas indican que para el modo de vibración para deslizamiento horizontal, el efecto del amortiguamiento es significativo, como en el caso de las vibraciones

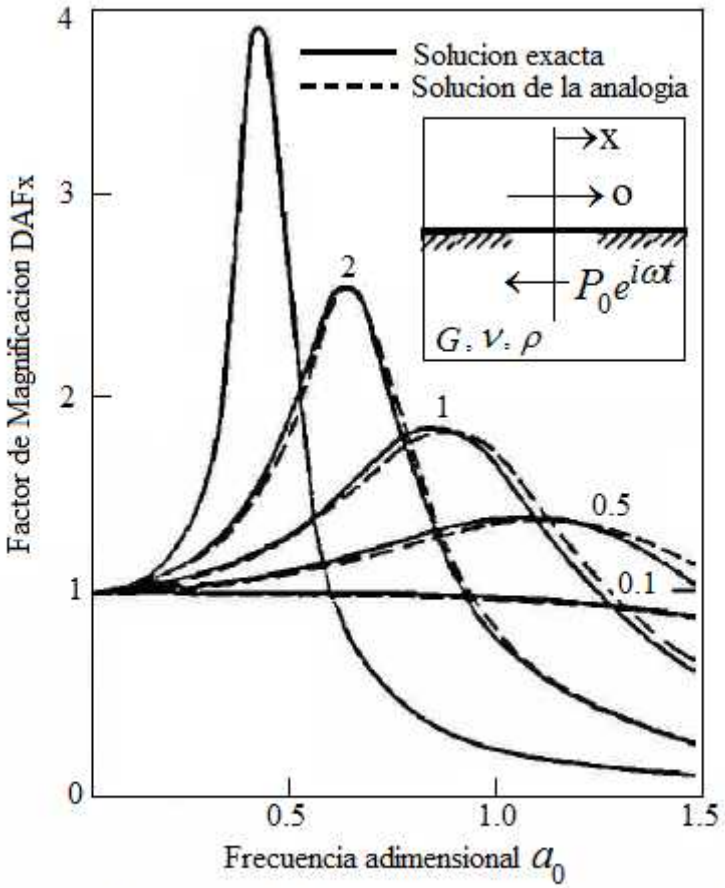


Fig (4.35): Respuesta de una cimentacion circular rigida en el semi-espacio elastico para vibracion horizontal.

verticales.

Los estudios actuales para el comportamiento horizontal y de rotación, parten de las hipótesis planteadas por Anestis S.Veletsos y Yau T. Wei, en 1971, ante la dificultad de encontrar valores independientes de la frecuencia adimensional. [37]

Veletsos y Wei postulan que la componente normal de la tensión de contacto es nula durante la acción de la carga horizontal, y que mientras actúa el momento flector, la componente tangencial del esfuerzo de contacto es nula. Estas hipótesis imponen condiciones de alivio a los esfuerzos de contacto para cada tipo de solicitación. En respuesta el disco gira y se traslada.

Los coeficientes de rigidez y de amortiguación de Veletsos y Wei, están dados por las siguientes expresiones:

Para translación:
$$\begin{cases} k_T = \dfrac{8°V_s{}^2 r_0}{2-¬}\dfrac{f_{11}}{f_{11}{}^2+g_{11}{}^2} \\ c_T = \dfrac{8°V_s r_0{}^3}{a_0(2-¬)}\left(-\dfrac{g_{22}}{f_{22}{}^2+g_{22}{}^2}\right) \end{cases} \quad (4.72)$$

Para rotación:
$$\begin{cases} k_R = \dfrac{8°V_s{}^2 r_0{}^3}{3(1-¬)}\dfrac{f_{22}}{f_{22}{}^2+g_{22}{}^2} \\ c_R = -\dfrac{8°V_s r_0{}^4}{3a_0(1-¬)}\left(-\dfrac{g_{22}}{f_{22}{}^2+g_{22}{}^2}\right) \end{cases} \quad (4.73)$$

Los valores de los coeficientes adimensionales de flexibilidad son dados para el rango $0 \le a_0 \le 10$ y $0 \le ¬ \le 0.5$

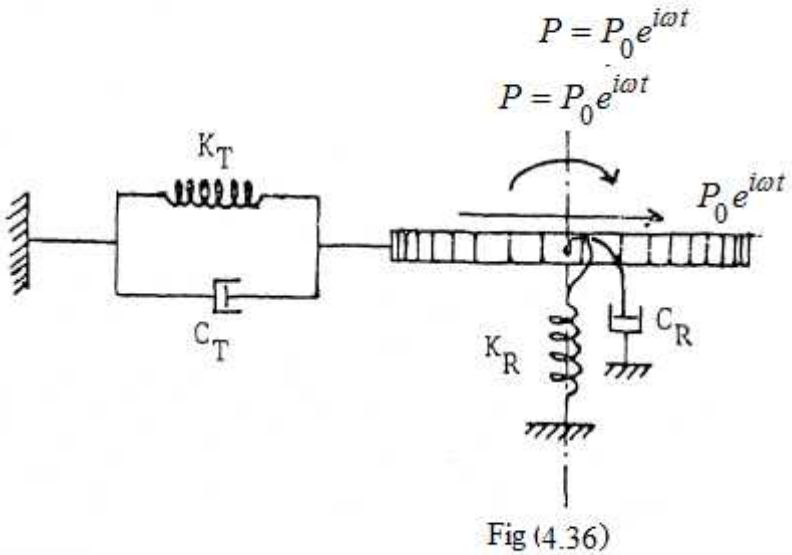


Fig (4.36)
Modelo sismplificado para la interaccion de los modos de vibracion de traslacion y rotacion

La solución de Veletsos y Wei, puede formulares mediante la siguiente matriz de flexibilidad:

$$\begin{Bmatrix} u \\ ¤r_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(f_{11}+ig_{11}\right) & \left(f_{12}+ig_{12}\right) \\ \left(f_{21}+ig_{21}\right) & \left(f_{22}+ig_{22}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{st} \\ ¤_{st} \end{Bmatrix} \quad (4.74)$$

Donde:

$$u_{st} = \frac{2-¬}{8°r_0} P_0 e^{i¼t} \text{ y } ¤_{st} = \frac{3(1-¬)}{8°r_0^{\,3}} M_0 e^{i¼t} \quad (4.75)$$

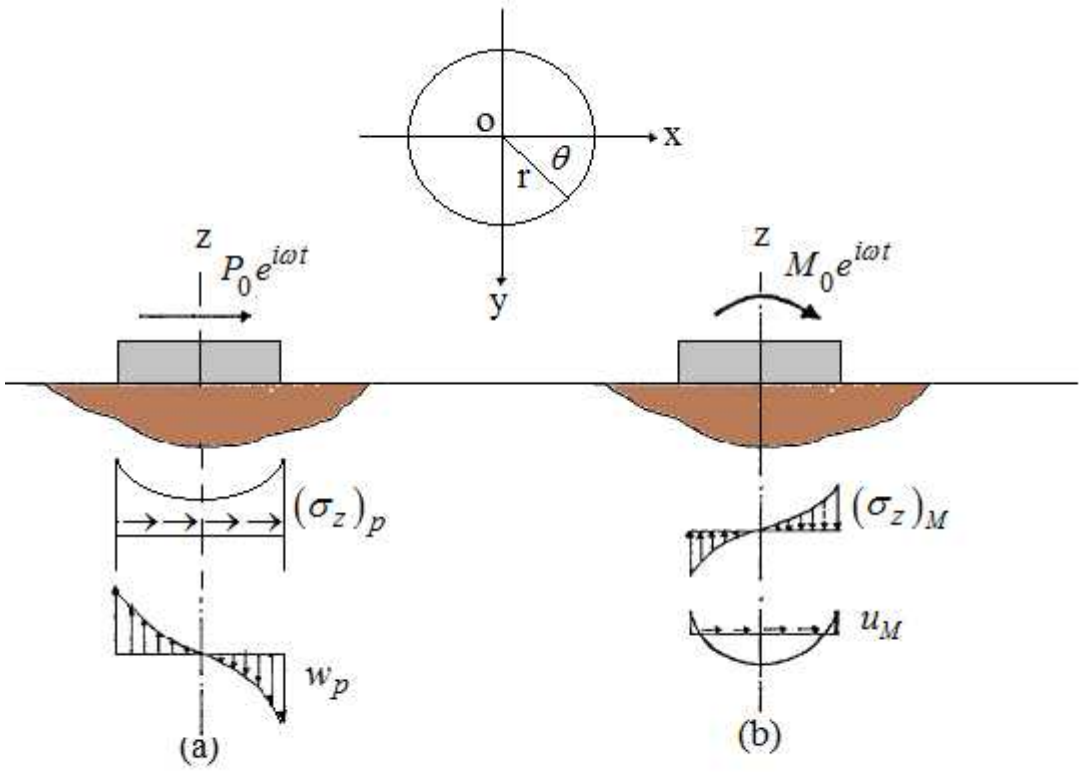


Fig (4.37)

De conformidad con el teorema de reciprocidad se cumple que:

$$\left(f_{12}+ig_{12}\right)=\frac{\left(2-\neg\right)}{3\left(1-\neg\right)}\left(f_{21}+ig_{21}\right) \quad (4.76)$$

En términos de la matriz de rigidez, la solucion puede formularse de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} K_x\left(k_{11}+ia_0c_{11}\right) & K_x r_0\left(k_{12}+ia_0c_{12}\right) \\ K_x r_0\left(k_{21}+ia_0c_{21}\right) & K_{¤}\left(k_{22}+ia_0c_{22}\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u \\ ¤ \end{Bmatrix} \quad (4.77)$$

$$\begin{cases} K_x=\dfrac{P}{u_{st}}\dfrac{8\,r_0}{\left(2-\neg\right)} \\ K_{¤}=\dfrac{M}{¤_{st}}=\dfrac{8\,r_0^{\,3}}{3\left(1-\neg\right)} \end{cases} \quad (4.78)$$

Los valores de k_{22} exhiben una sensible dependencia que los valores del coeficiente de Poisson a partir del valor $a_0=2$, llegando a alcanzar valores negativos para frecuencias $a_0 \succ 4.5$ y valores del módulo de Poisson $\neg=0.5$. Esto es indicativo del predominio de las fuerzas de inercia sobre las fuerzas elásticas puras para valores altos de la frecuencia de excitación. A fin de evitar que surjan valores negativos, algunos autores recomiendan el uso de una masa equivalente distinta de cero.

De manera semejante, se observa que $k_{11} \succ k_{22}$ para el mismo rango de frecuencias, lo que denota una mayor rigidez del terreno para movimientos vibratorios horizontales, y que las fuerzas inerciales desarrolladas son mayores para los movimientos rotacionales de la cimentación.

Respecto a los amortiguamientos se observa que para ambos tipos de movimientos, exhiben valores bajos, con tendencia creciente para valores bajos de la frecuencia de excitación.

Debido a que los términos de acoplamiento se muestran bajos, pueden despreciarse en la mayoría de los casos para los efectos prácticos.

Despreciando los términos del acoplamiento, la matriz de rigidez del terreno puede formularse en los siguientes términos:

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x\left(k_{11} + ia_0 c_{11}\right) & 0 \\ 0 & K_{¤}\left(k_{22} + ia_0 c_{22}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ ¤ \end{Bmatrix} \qquad (4.79)$$

$$\begin{cases} k_{11} = \dfrac{f_{11}}{{f_{11}}^2 + {g_{11}}^2} \\ k_{22} = \dfrac{f_{22}}{{f_{22}}^2 + {g_{22}}^2} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} c_{11} = -\dfrac{1}{a_0}\dfrac{g_{11}}{{f_{11}}^2 + {g_{11}}^2} \\ c_{22} = -\dfrac{1}{a_0}\dfrac{g_{22}}{{f_{22}}^2 + {g_{22}}^2} \end{cases} \qquad (4.80)$$

Finalmente la solucion de Veletsos y Wei, permiten las siguientes expresiones para la rigidez de los movimientos horizontal, rotacional, y vertical, para cargas armónicas:

$$\begin{cases} P_x(t) = P_0 e^{i\mu t} \\ P_z(t) = P_0 e^{i\mu t} \\ P_y(t) = M_0 e^{i\mu t} \end{cases} \qquad (4.81) \qquad \begin{cases} K_x = \dfrac{8 \circ r_0}{\left(2 - ¬\right)} \\ K_z = \dfrac{4 \circ r_0}{\left(1 - ¬\right)} \\ K_y = \dfrac{8 \circ {r_0}^3}{3\left(1 - ¬\right)} \end{cases} \qquad (4.82)$$

El problema de las vibraciones por torsión de una cimentación circular apoyada en la superficie del semi-espacio elástico fue analizado por Reissner en 1937 y luego por Reissner y Sagoci en 1944. El punto de partida para este análisis, fue asumir una distribución de esfuerzos correspondientes al caso estático, a partir de la cual se obtiene la constante de rigidez elástica, así como los índices de masa y amortiguamiento:

$$^2_ = \frac{3M_t r_0}{4® {r_0}^2 \sqrt{r - {r_0}^2}} \qquad (4.83)$$

Las constantes de rigidez $K-$ y de amortiguamiento $C-$, fueron obtenidas obtenidos por Luco y Westmann en 1971:

$$\begin{cases} K- = \dfrac{16}{3} G r_0^{\,3} \\ C- = \dfrac{16}{3} r_0^{\,2} \sqrt{\rho G} \\ M_z = K- \left(k- + i a_0 c- \right) \end{cases} \qquad (4.84)$$

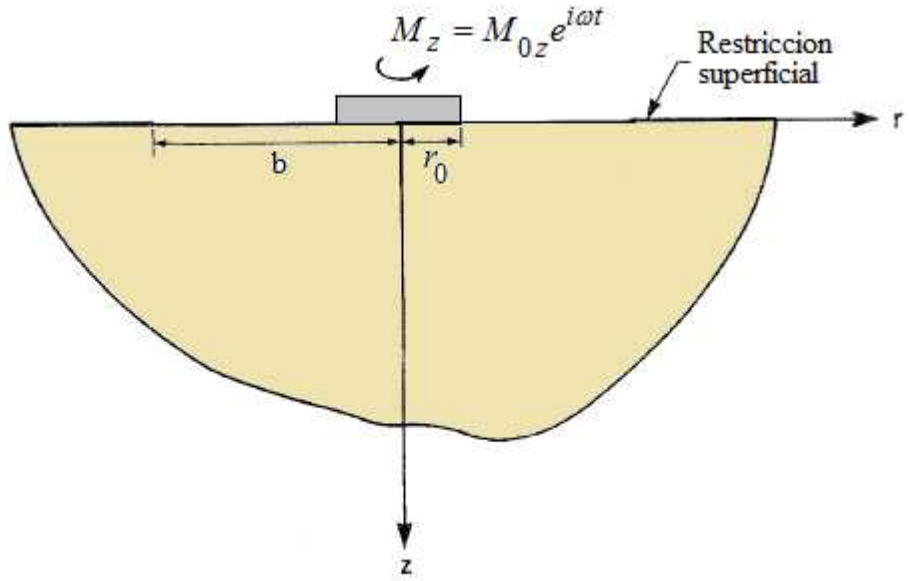


Fig (3.38): Vibracion torsional de un disco circular sobre el semi-espacio elastico isótropo

La relación de inercia para este caso puede ser definida como $B- = \dfrac{J_{mz}}{\rho r_0^{\,5}}$ (4.85)

La solución de la analogía para el caso de vibraciones por torsión puede ser expresarse como sigue (Richart 1970):

$$J_{mz} \ddot{-} + C- \dot{-} + K- \bar{-} = M_{0z} e^{i\mu t} \qquad (4.86)$$

Donde las constantes de rigidez y de amortiguamiento fueron establecidas por Richart y Whitman en 1967:

$$\begin{cases} K_z = \dfrac{16}{3} G r_0^{\,3} \\ C_z = \dfrac{1.6 r_0^{\,4}}{\left(1 + B_z\right)} \sqrt{\rho G} \end{cases} \qquad (4.87)$$

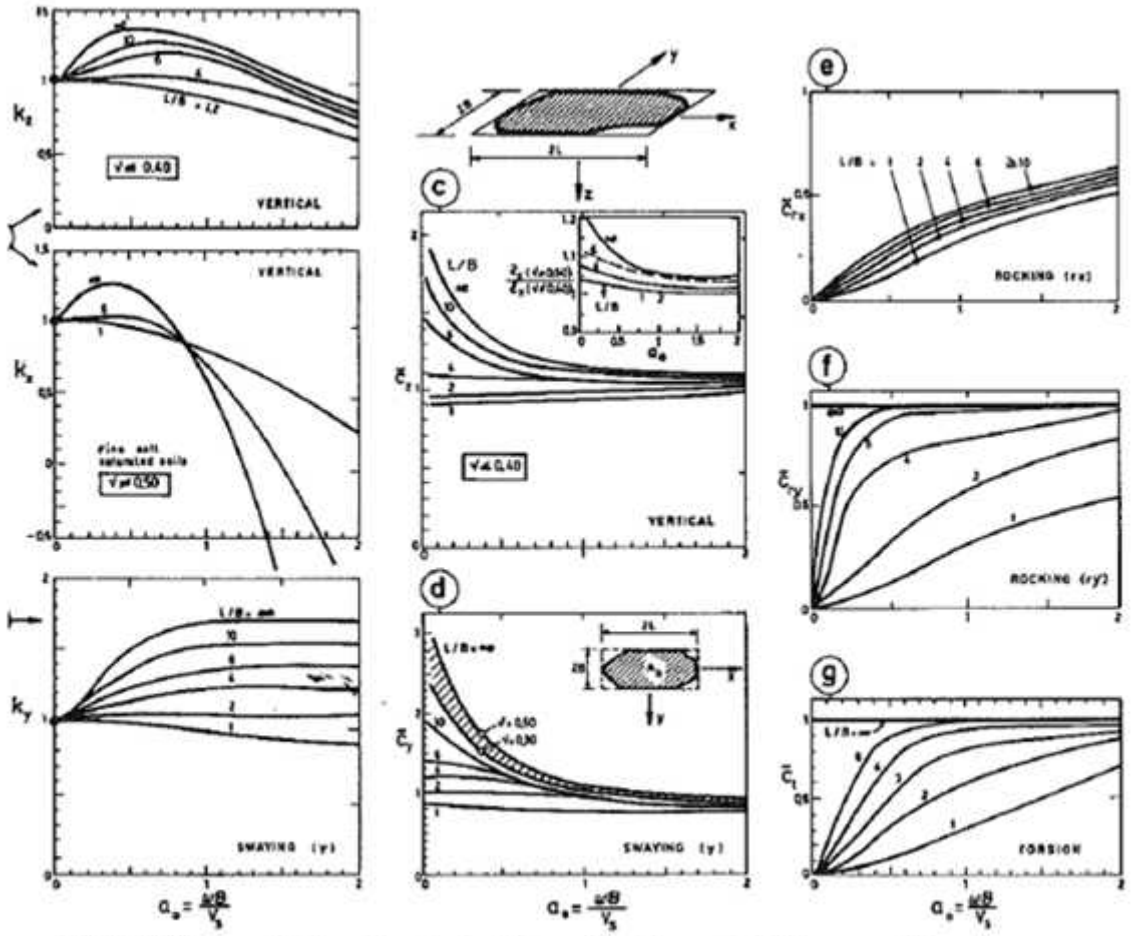
$$\begin{cases} J_{mz} \ddot{z} + \dfrac{1.6 r_0^{\,4}}{\left(1 + B_z\right)} \sqrt{\rho G}\, \dot{z} + \dfrac{16}{3} G r_0^{\,3} z = M_{0z} e^{i\mu t} \\ \mu_z = \sqrt{\dfrac{\dfrac{16}{3} G r_0^{\,3}}{\dfrac{1.6 r_0^{\,4}}{\left(1 + B_z\right)} \sqrt{\rho G}}} \end{cases} \qquad (4.88)$$

Gazetas en 1983, [38] expuso el estado del arte de los análisis para obtener la respuesta dinámica de las cimentaciones de máquina sujetas a cargas dinámicas apoyadas sobre el semi-espacio elástico homogéneo. Las soluciones de Gazetas para los coeficientes de rigidez dinámica a partir de la rigidez estática, así como los de amortiguamiento por radiación, correspondientes a los modos de vibración vertical, horizontal, rotacional y torsional, los que se resumen en el siguiente cuadro con los gráficos, transcritos de la obra de Gazetas de1983.

Coeficientes de rigidez y amortiguamiento dinámicos para cimentaciones con formas arbitrarias sobre el semi-espacio elástico homogéneo. Según Gazetas 1983

Modo de vibración	Rigidez dinámica $\bar{K} = K \cdot k(\mu)$			
	Rigidez estática K		Coeficiente de Rigidez dinámica $k(\mu)$	Coeficiente C de amortiguamiento por radiación
	Forma general: Area de contacto suelo-fundación A_b del rectángulo circunscrito $2L \cdot 2B$; $L \succ B$	Cuadrada L = B	Forma general $0 \le a_0 \le 2$	
Vertical	$K_z = \frac{2GL}{(1-\neg)}\left(0.73 + 1.54\,¡^{0.75}\right)$ Donde $¡ = \frac{A_b}{4L^2}$	$K_z = \frac{4.54GB}{(1-\neg)}$	$k_z = k_z\left(\frac{L}{B}, \neg, a_0\right)$	$C_z = \left(°V_{la}A_b\right)\tilde{c}_z$ $\tilde{c}_z = \tilde{c}_z\left(L/B, \neg, a_0\right)$ $V_{la} = \frac{3.4}{®(1-\neg)}V_s$ Analogía de velocidad de onda de Lysmer
Horizontal en dirección transversal	$K_y = \frac{2GL}{(2-\neg)}\left(2 + 2.5\,¡^{0.85}\right)$	$K_y = \frac{9GB}{(2-\neg)}$	$k_y = k_y\left(L/B, a_0\right)$	$C_y = \left(°V_s A_b\right)\tilde{c}_y$ $\tilde{c}_y = \tilde{c}_y\left(L/B, a_0\right)$
Horizontal en dirección longitudinal	$K_x = K_y - \frac{0.2}{0.75-\neg}GL\left(1-\frac{B}{L}\right)$	$K_x = K_y$	$k_x \approx 1$	$C_x = °V_s A_b$
Rotación alrededor del eje x longitudinal	$K_{rx} = \frac{G}{1-\neg}I_{bx}^{0.75}\left[3\left(\frac{L}{B}\right)\right]^{0.15}$ Donde I_{bx} e I_{by} son los momentos de inercia alrededor	$K_{rx} = \frac{3.6GB^3}{1-\neg}$	$k_{rx} \approx 1 - 0.20a_0$	$C_{rx} = \left(°V_{la}I_{bx}\right)\tilde{c}_{rx}$ $\tilde{c}_{rx} = \tilde{c}_x\left(L/B, a_0\right)$

	de los ejes x e y			
Rotación alrededor del eje y transversal	$K_{ry} = \frac{G}{1-\neg} I_{by}^{0.75} \left[3\left(\frac{L}{B}\right) \right]^{0.15}$	$K_{rx} = K_{ry}$	$\neg \prec 0.45$ $k_{ry} \approx 1 - 0.30 a_0$ $\neg \approx 0.50$ $k_{ry} \approx 1 - 0.25 a_0 \left(\frac{L}{B}\right)^{0.30}$	$C_{ry} = \left(\circ V_{la} I_{by} \right) \tilde{c}_{ry}$ $\tilde{c}_{ry} = \tilde{c}_y \left(L/B, a_0 \right)$
Torsión	$K_t = G J_b^{0.75} \left[4 + 11\left(1 - \frac{B}{L}\right)^{10} \right]$ $J_b = I_{bx} + I_{by}$ es el momento polar de inercia	$K_t = 8.3 G B^3$	$k_t \approx 1 - 0.14 a_0$	$C_t = \left(\circ V_s J_b \right) \tilde{c}_t$



Fig(4.39): Dimensionless Graphs for Determining Dynamic Stiffness and Damping Coefficients of Surface Foundations. After Gazetas 1983.

Un trabajo más completo sobre los parámetros representativos para determinar la respuesta dinámica de las fundaciones, fue realizado en 1986 por Dobry y Gazetas. [39]. En este estudio, se establecen soluciones para las constantes de rigidez y amortiguamiento geométrico para cimientos de forma arbitraria, cimientos rectangulares, y cimientos de franjas rígidas. Sin embargo, las áreas de las fundaciones de forma arbitraria se caracterizan por el rectángulo circunscrito de dimensiones 2L por 2B. Para las fundaciones de franjas alargadas, $2L \to \infty$ y las soluciones de rigidez y amortiguamiento deben ser independiente de su longitud.

Aunque las soluciones son desarrolladas para condiciones estáticas, la constante de rigidez dinámica $\bar{k}$ está relacionada con la rigidez estática constante k a través de una relación de rigidez adimensional $\tilde{k}$ como sigue: $\bar{k} = \tilde{k}k$

El valor de $\tilde{k}$, depende en gran medida de la relación de Poisson (v), de la relación geométrica

L / B , y el factor de frecuencia adimensional $a_0 = \frac{\mu r_0}{V_s}$.

Una relación típica de $\tilde{k} = \tilde{k}\left(L / B, \neg, a_0\right)$ y el factor de frecuencia adimensional a_0 para bases rectangulares y de franjas alargadas, se muestra para las vibraciones horizontales $\tilde{k}_x$ y verticales $\tilde{k}_z$. La relación de rigidez adimensional es dependiente de la relación L / B y a_0 para las vibraciones horizontales y verticales.

El valor correspondiente para la constante de rigidez para giro $\tilde{k}_{\alpha}$, depende únicamente de la relación de frecuencia a_0

Coeficientes de rigidez y amortiguamiento dinámicos para cimentaciones con formas arbitrarias en el semi-espacio elástico homogéneo según Dobry y Gazetas 1986

Modo de vibración	Rigidez dinámica $\bar{K} = K \cdot k(\mu)$			
	Rigidez estática K			Coeficiente C de amortiguamiento por radiación
	Forma general: Area de contacto suelo-fundación A_b	Circular	Cimentaciones alargadas	
Vertical	$k_z = S_z \frac{2LG}{1-\neg}$ $S_z = 0.8$ Para	$k_z = \frac{4GB}{1-\neg}$	$\frac{K_z}{2L} = \frac{0.8G}{(1-\neg)}$	$C_z = \frac{3.4}{®(1-\neg)} \circ V_s A_b$ Para frecuencias altas

	$\frac{A_b}{4L^2} \prec 0.02$ $S_z = 0.73 + 1.54\left(\frac{A_b}{4L^2}\right)^{0.75}$ Para $\frac{A_b}{4L^2} \succ 0.02$			
Horizontal en dirección corta	$K_y = S_y \frac{2LG}{2-\neg}$ con $S_y = 2.24$ para $\frac{A_b}{4L^2} \prec 0.16$	$K_y = \frac{8GB}{2-\neg}$	$\frac{K_y}{2L} = \frac{2.24G}{(2-\neg)}$	$C_x = °V_s A_b$
Horizontal en dirección larga	$K_x = K_y - \frac{0.21LG}{0.75-\neg}\left(1-\frac{B}{L}\right)$	$K_x = \frac{8GB}{2-\neg}$		$C_y = °V_s A_b$ $\frac{L}{B} \succ 3$
Rotación alrededor del corto	$K_{ry} = S_{ry}\frac{G}{1-\neg}(I_y)^{0.75}$ $S_{ry} = \frac{2.54}{\left(\frac{B}{L}\right)^{0.15}}$ para $\frac{B}{L} \prec 0.4$	$K_{ry} = \frac{8GB^3}{3(1-\neg)}$	$k_¤ = \frac{®GB^2}{2(1-\neg)}\left(1+\left[\frac{\ln(3-4\neg)}{®}\right]^2\right)$	$C_{rx} = \frac{3.4}{®(1-\neg)} °V_s I_x$
Rotación alrededor del eje largo	$K_{ry} = \frac{G}{1-\neg} I_y{}^{0.75}$ $S_{ry} = 3.2$	$K_{rx} = \frac{8GB^3}{3(1-\neg)}$		
Torsión	$K_t = S_t G(J_b)^{0.75}$ $J_b = I_{bx} + I_{by}$ $S_t = 3.8 + 10.7\left(1-\frac{B}{L}\right)^{10}$	$K_t = \frac{16GB^3}{3}$		$C_t = °V_s J$

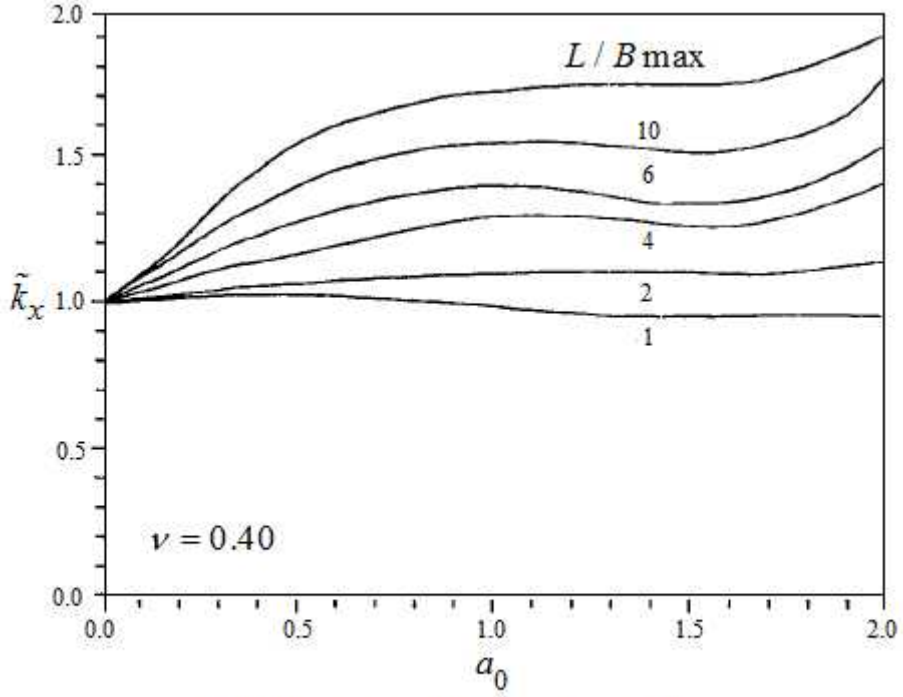


Fig (4.40): The horizontal dimensionless stiffness parameter
(After Gazetas and Taussolas. 1987.)

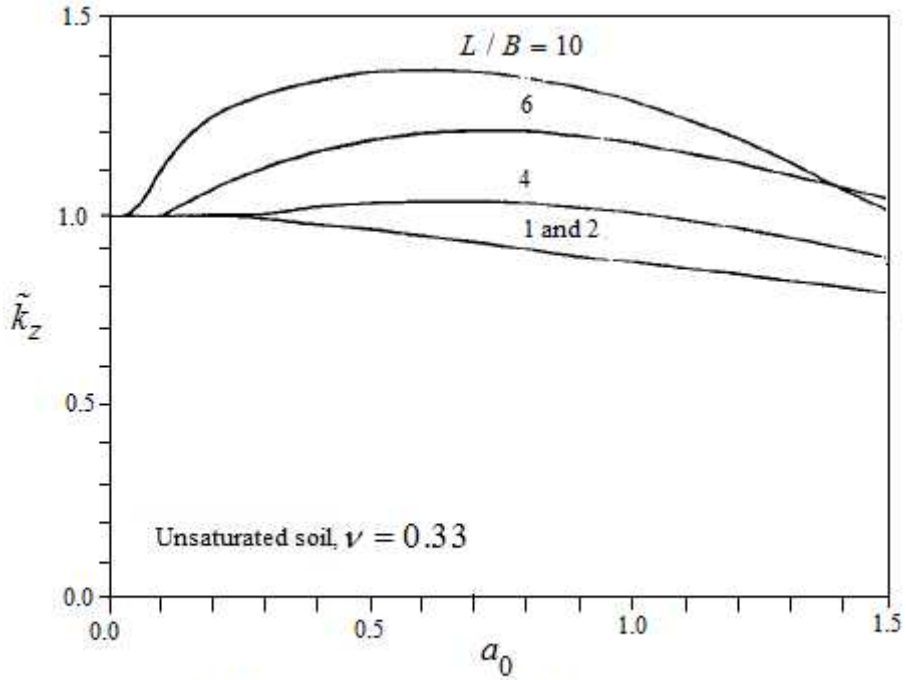


Fig (4.41): The vertical dimensionless stiffness parameter
(After Dobry and Gazetas. 1986)

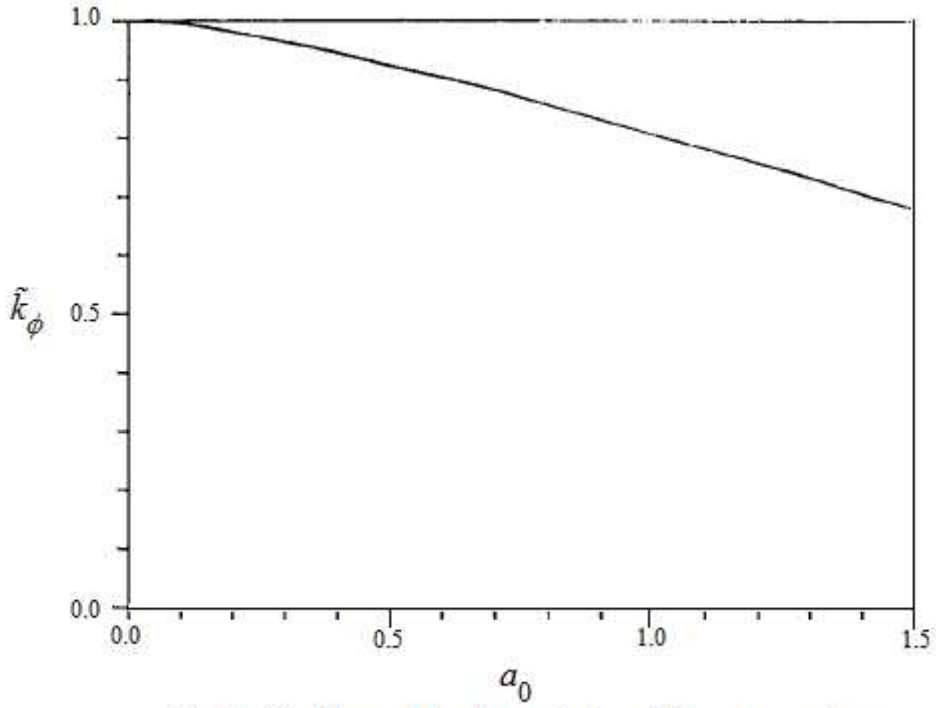


Fig (4.42): The rocking dimensionless stiffness parameter
(After Dodry and Gazetas, 1986)

La evaluación de las constantes de amortiguamiento por Dobry y Gazetas (1986) y Gazetas y Tassoulas (1987) presentados en la discusión anterior, únicamente consideran la amortiguación geométrica por radiación. Lysmer (1980) presentó un método de evaluación del amortiguamiento total para cualquier nivel de deformación desarrollado en la masa del suelo. Dobry y Gazetas (1986) adoptaron su método que es presentado por la siguiente ecuación: $c(¶) \cong c + \frac{2\bar{k}}{\mu} ¶$

Donde c es el amortiguamiento dinámico geométrico, $\frac{2\bar{k}}{\mu}$ es el amortiguamiento crítico de la masa del suelo, y ¶ es la relación de amortiguamiento del material.

Las respuestas calculadas para las cimentaciones rectangulares y alargadas, basadas en los parámetros anteriores de rigidez y amortiguamiento han sido sustentadas por investigaciones experimentales realizadas por Dobry, Gazetas, y Stokoe en 1986.

Las expresiones presentadas para la amortiguación total y la rigidez dinámica total se podrían usar para determinar si se producirá el desplazamiento permanente o la frecuencia resonante y la amplitud máxima de vibración.

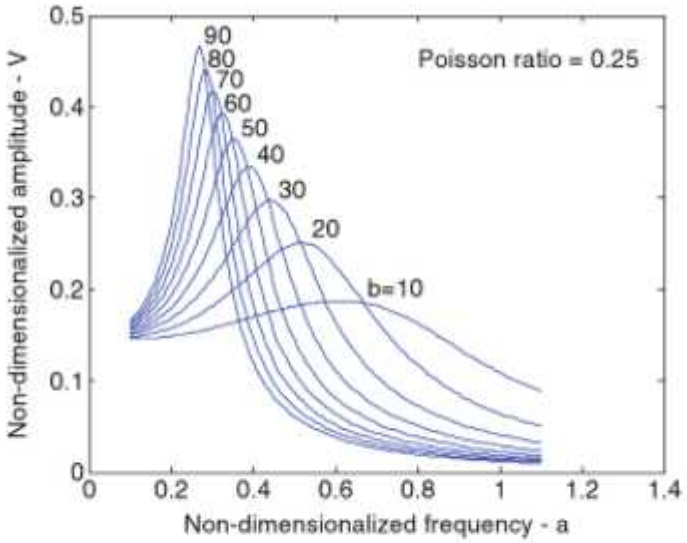


Fig (4.43): Non-dimensional amplitude vs. frequency at different mass ratios for vertical harmonic vibration

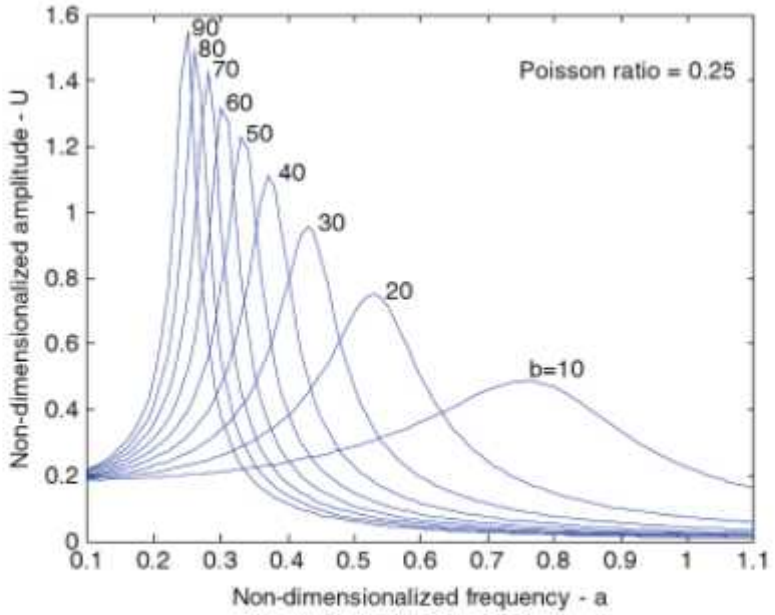


Fig (4.44): Non-dimensional amplitude vs. frequency at different mass ratios for horizontal harmonic vibration

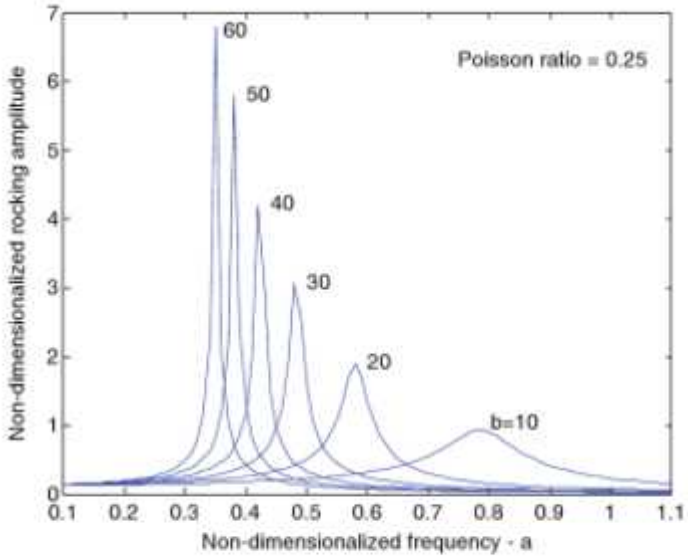


Fig (4.45): Non-dimensional amplitude vs. frequency at different Inertia ratios for rocking harmonic vibration

Gráficos tomados de Dynamical Systems. Albert. C. J. Luo.

Síntesis de los principals hitos de la evolución histórica del análisis para cimentaciones sujetas a cargas dinámicas, empleando la teoría del semi-espacio elástico, homogéneo e isótropo.

Autor	Año	Contribución
H. Lamb	1904	Solucion para carga vertical concentrada en una superficie de semi-espacio elástico. Llamado problema dinámico de Boussinesq.
H. J. Reissner	1936	Solucion para fundación circular flexible asumiendo distribución estática para las presiones.
P. M. Quinlan	1953	Solucion aproximada para fundación circular rígida asumiendo distribución estática de las presiones.
T. Y. Sung	1953	Solucion para diferentes distribuciones de presiones asumidas.
T.K.Hsieh	1962	Introduce la idea de rigidez y amortiguamiento equivalente dependiente de la frecuencia.
J.Lysmer y F.E.Richart	1966	Obtienen mediante el uso de computadora, los valores exactos del resorte y el amortiguador dependientes de la frecuencia para fundaciones circulares. Proponen valores aproximados para las constantes de resorte y amortiguador, independientes de la frecuencia mediante la solucion simplificada conocida como analogía de Lysmer.
F.E.Richart y R.V.Whitman	1967	Validan la analogía de Lysmer mediante pruebas de campo para vibración en zapatas.
R.V.Whitman y F.E.Richart	1976	Establecen los procedimientos de diseño empleando la analogía de Lysmer.

Author(s)	Year	Contribution	Stiffness	Damping	Experiment
Dobry and Gazetas Dobry et al.	1986 1986	Surface foundations, all six DOF's Experimental verification for surface foundations	X	X	X
Gazetas et al.	1985	Embedded foundations, vertical	X	X	
Gazetas and Tassoulas	1987a	Embedded foundations, horizontal	X		
Gazetas and Tassoulas	1987b	Embedded foundations, horizontal		X	
Hatzikonstantinou et al.	1989	Embedded foundations, rocking	X		
Fotopoulou et al.	1989	Embedded foundations, rocking		X	
Ahmad and Gazetas	1991	Embedded foundations, torsional	X	X	
Gazetas Gazetas Gazetas and Stokoe	1990 1991 1991	Surface and embedded foundations, all six DOF's; formulas, charts & numerical examples Experimental verification for embedded foundations	X X X	X X X	X

5. FUNCIONES DE IMPEDANCIA.

5.1. Introducción.

La respuesta dinámica de las estructuras de ingeniería es altamente dependiente de la impedancia de la fundación. La respuesta de una cimentación rígida ante cargas estáticas o dinámicas, surge básicamente de la deformación del suelo de soporte. En las últimas décadas, este problema particular ha sido investigado en términos de impedancia de la cimentación.

Author(s)	**Year**	**Contribution**	**Stiffness**	**Damping**	**Experiment**
Dobry and Gazetas Dobry et al.	1986 1986	Surface foundations, all six DOF's Experimental verification for surface foundations	X	X	X
Gazetas et al.	1985	Embedded foundations, vertical	X	X	
Gazetas and Tassoulas	1987a	Embedded foundations, horizontal	X		
Gazetas and Tassoulas	1987b	Embedded foundations, horizontal		X	
Hatzikonstantinou et al.	1989	Embedded foundations, rocking	X		
Fotopoulou et al.	1989	Embedded foundations, rocking		X	
Ahmad and Gazetas	1991	Embedded foundations, torsional	X	X	

Gazetas Gazetas Gazetas and Stokoe	1990 1991 1991	Surface and embedded foundations, all six DOF's; formulas, charts & numerical examples Experimental verification for embedded foundations	X X X	X X X	X

En las últimas décadas, este problema particular ha sido investigado en términos de impedancia de la cimentación, que representa la rigidez dinámica y la amortiguación suministrada por el suelo a lo largo de cualquier dirección de desplazamiento, evaluada de acuerdo con la teoría elastodinámica.

El método de impedancia proviene del enfoque del semiespacio elástico [Reissner, 1936; Bycroft, 1956], y que fuera generalizado por Lysmer [1965]; al introducir el sistema equivalente de parámetros concentrados masa-rigidez-amortiguador, capaz de reproducir los resultados del modelo de semi-espacio elástico para cada modo de vibración.

El modelado de la interacción dinámica de la estructura del suelo se ha utilizado ampliamente en el análisis de respuesta sísmica y problemas de aislamiento de la base. En el caso sísmico, no solo se debe considerar el desplazamiento de la base y el suelo, sino también el efecto de la rigidez de la base en el filtrado de componentes de alta frecuencia. En los problemas de aislamiento de la fundación solo el desplazamiento tanto de la base como del suelo, inducido por las fuerzas inerciales, son considerados. Este segundo tipo de análisis se denomina "interacción inercial" y se emplea ampliamente para aquellos problemas en los que la carga dinámica actúa directamente sobre la base o sobre la superestructura [Gazetas & Mylonakis, 1998]

Si una cimentación es infinitamente rígida, la respuesta a la carga dinámica surge únicamente del desplazamiento del terreno de apoyo. En las últimas décadas, este problema particular ha sido investigado en términos impedancias de cimentaciones, que explican la rigidez dinámica y la amortiguación suministrada por el suelo a lo largo de cualquier dirección de desplazamiento.

Más recientemente, el enfoque de impedancia de cimentaciones ha recibido un gran impulso con los trabajos de Kausel y Roesset, 1975; Dobry y Gazetas, 1985; Novak, 1987; Gazetas, 1991;

Wolf, 1994, de modo que las soluciones están disponibles para varias geometrías de cimentación, condiciones de contorno y propiedades mecánicas del suelo. Sin embargo, generalmente estas soluciones provienen del análisis elástico del suelo, sin tener en cuenta su inelasticidad, ni la degradación de su rigidez por efecto del régimen dinámico.

Cualquier discusión debe iniciarse primero describiendo formalmente la definición de la función de impedancia. A veces se denomina rigidez dinámica del suelo porque describe la relación entre un desplazamiento de entrada y una fuerza de salida. En la interacción suelo-estructura, el desplazamiento en esta relación es el desplazamiento de la interfase de cimentación entre el suelo y la estructura, y la fuerza de salida es la fuerza restauradora que actúa sobre la misma interfase. La respuesta de desplazamiento de la base diferirá dependiendo de la frecuencia de la fuerza aplicada, lo que implica que la rigidez del suelo varía con la frecuencia que se considera. La determinación de esta rigidez a varias frecuencias producirá la función de impedancia del sistema de suelo-cimentación dado. La función de impedancia contiene datos de valores complejos que describen la relación dinámica entre la fuerza y el desplazamiento. Los datos reales e imaginarios de la función de impedancia describen respectivamente la respuesta de desplazamiento en fase y 90 ° fuera de la fase en relación con la fuerza (Dotson & Veletsos, 1990). La porción imaginaria de los datos se debe a la presencia de amortiguamiento histerético en el suelo y a la radiación de la amortiguación radial del medio infinito del suelo (Dotson & Veletsos, 1990).

Inicialmente, las funciones de impedancia se determinaron analíticamente haciendo una serie de suposiciones para los materiales y condiciones de frontera del suelo que permitían expresar el problema de manera simple, permitiendo que una solución de forma cerrada para la función de impedancia se determinara algebraicamente. El método de formulación algebraica solo es posible si las matrices estructurales de las propiedades del suelo están disponibles para su manipulación. Es posible obtener la función de impedancia a partir de un modelo de suelo que se ha definido explícitamente en términos de masa estática, rigidez y matrices de amortiguación. Estas matrices producirán sistemas de suelo que son elásticos lineales los que se prestan fácilmente a la formulación de funciones de impedancia en el dominio de la frecuencia sin necesidad de procedimientos numéricos. Las ecuaciones de movimiento para estos sistemas se expresan en el dominio de la frecuencia mediante el uso de notación exponencial compleja, usando un procedimiento simple en notación algebraica. En consecuencia, la investigación en este tópico, rara vez se verifica con los datos de campo, pero al menos estos modelos aproximados son una

mejora en los análisis que ignoran la contribución de las propiedades del suelo, los que se consideran como válidos. Sin embargo, a medida que se empezaron a considerar sistemas de cimentación más complicados, la formulación matemática de la función de impedancia se hizo cada vez más compleja. La expresión de estos sistemas a menudo resultaría en un conjunto de integrales duales para las cuales no existe una solución de forma cerrada. Estas ecuaciones tendrían que transformarse en ecuaciones integrales de Fredholm[1][40] y luego evaluarse numéricamente (Shah, 1968) para producir soluciones analíticas aproximadas. El sistema posterior comenzaría a utilizar valores empíricos para simplificar las ecuaciones, lo que conduciría a soluciones matemáticas menos complicadas (Veletsos y Verbic, 1973).

Las impedancias generadas numéricamente están fácilmente disponibles en la literatura, por lo general, cada estudio se centra en una sola cimentación y el tipo de comportamiento del suelo. La mayoría de los estudios que se ocupan de sistemas de suelos y bases realistas no generan expresiones concisas para las funciones de impedancia; en su lugar, se presenta una familia de curvas como solución. Se necesitan varias curvas debido a la variabilidad que existe en los parámetros y la configuración del suelo. Las variables incluyen la relación de Poisson, el módulo de corte, y cualquier asignación geométrica para la fundación y el perfil del suelo. Obtener una función de impedancia precisa a partir de estas fuentes no es práctico para los ingenieros de la industria porque la solución solo se muestra gráficamente y porque los cimientos y los tipos de suelo considerados a menudo son demasiado simplificados en comparación con los cimientos reales. Esto ha llevado a la discusión de la investigación de la interacción suelo-estructura para centrarse en los avances en el modelado con elementos finitos que se pueden adaptar a cualquier suelo y tipo de fundación. Las propiedades de la interacción dinámica recíproca entre la cimentación y el suelo de soporte, puede abordarse mediante un análisis del estado estacionario en el dominio de la frecuencia, o como una aproximación en el dominio del tiempo para la subestructura.

[1] Erik Ivar Fredholm (1866-1927) tuvo un importante papel en la matemática de las ecuaciones integrales y teoría espectral. Una parte importante de su trabajo fue realizada en 1899, cuando estudió el problema de Dirichlet en comunicación con H. Poincaré (1854-1912), Emile Artin (1898-1962) y Jacques Hadamard (1865-1963). Al año siguiente publica su informe sobre teoría de ecuaciones integrales con el título Sur une nouvelle méthode pour la Résolution du probléme de Dirichlet, para, en 1903, dar a conocer una versión más amplia de la teoría en Sur une classe d'ecuations fonctionnelles (Acta Mathemática, 27:365-390). David Hilbert (1862-1943) extendería los estudios de Fredholm con la inclusión de valores propios, que conduciría posteriormente a la teoría de los espacios de Hilbert. Fuente: Acerca de las ecuaciones integrales y la alternativa de Fredholm, por Carlos S. Chinea.

Cualquier carga arbitraria en el dominio de tiempo puede transformarse en el dominio de la frecuencia utilizando la transformada de Fourier. Cada valor de datos en la función de fuerza transformada representa una fuerza sinusoidal constitutiva a una frecuencia específica. Al obtener todas las respuestas del sistema a la fuerza sinusoidal correspondiente de cada frecuencia, se puede obtener la respuesta completa del sistema simplemente sumando las respuestas individuales por la regla de la superposición.

El uso de la superposición en este procedimiento solo es aceptable si las propiedades del suelo y la estructura permanecen elásticos lineales. Sin embargo, se puede considerar el comportamiento inelástico del suelo y la disipación de energía histerética utilizando linealización equivalente. El sistema todavía se analiza como lineal elástico, pero el módulo del suelo y los niveles de amortiguación se eligen para que correspondan con la posible deformación máxima que el suelo experimentará con la carga dada. Este es un método aproximado ya que todos los elementos del modelo de suelo tienen propiedades basadas en este nuevo módulo secante (Yoshida et al., 2002).

Hasta ahora, la discusión ha supuesto que existía una función de impedancia para las propiedades del suelo que se desea modelar como un problema suelo - estructura. La obtención de una función de impedancia realista y adecuada puede ser una tarea desafiante y muchos investigadores han realizado estudios centrados únicamente en la generación de funciones de impedancia.

Es importante recordar que cualquier modelo del suelo, ya sea un modelo de elementos finitos, un modelo analítico o simplemente una representación de la función de impedancia, se basa en una suposición matemática del comportamiento del material del suelo. A partir de experimentos de laboratorio, se ha descubierto el comportamiento de algunos tipos de suelos en condiciones de carga específicas, pero, sin embargo, es muy difícil determinar la respuesta dinámica real debido a la no linealidad y la no homogeneidad del suelo.

Las funciones de impedancia también se pueden obtener a partir de modelos de elementos finitos del suelo utilizando dos métodos analíticos distintos. Estos modelos deberían ser capaces de reproducir adecuadamente los resultados similares a las funciones de impedancia generadas analíticamente si se utilizan las mismas suposiciones de la elasticidad del medio-espacio, las condiciones de contorno y las configuraciones de la cimentación. El mayor desafío que enfrenta el modelado de elementos finitos es describir con precisión la propiedad de disipación de la onda

del medio infinito del suelo. El uso de límites rígidos en el modelo de suelo de elementos finitos dará lugar a reflexiones de onda sísmica fuera de los límites que repercuten de nuevo en el sistema de suelo, dando lugar a respuestas de ondas reflejadas. Se ha llevado a cabo una gran cantidad de investigaciones para crear límites apropiados de absorción de energía y viscosidad y otros elementos límite (Yerli, 2003) que reproducen con precisión este comportamiento límite infinito de las propiedades del suelo.

Las funciones de impedancia solo se pueden determinar a partir de modelos de elementos finitos elásticos lineales a partir de las propiedades del suelo, ya que cualquier no linealidad o degradación del suelo no se puede describir adecuadamente en una función de dominio de la frecuencia. La razón es que durante el análisis no lineal, la respuesta dinámica del suelo no solo depende de la frecuencia, sino también de la amplitud de la fuerza aplicada. Para geometrías de cimentación complejas o del suelo, la impedancia puede determinarse mediante análisis dinámico de un modelo de continuum tridimensional o bidimensional del sistema suelo-fundación.

En particular, los procedimientos se pueden implementar utilizando el método de elementos finitos (FE). En este caso, el suelo está modelado como un material elástico o viscoelástico, que puede considerarse isotrópico, anisotrópico, homogéneo o no homogéneo. El enfoque general consiste en modelar el suelo con simetría axial, o como elementos sólidos 3D. Cuando sea posible, se deben usar elementos axisimétricos ya que reducen en gran medida el modelado y el tiempo de análisis comparado con el de un modelo equivalente que usa elementos 3D sólidos. El objetivo de este comentario es proporcionar los antecedentes necesarios para conocer sobre el estado del arte en el cálculo de las impedancias de cimentación. Sin embargo, estos cálculos deberán realizarse mediante programas informáticos especialmente diseñado para ese propósito [41].

Recientemente, el enfoque de impedancia de cimentaciones ha recibido un gran impulso con los trabajos de Kausel y Roesset, 1975; Dobry y Gazetas, 1985; Novak, 1987; Gazetas, 1991; Wolf, 1994, de modo que se dispone de soluciones para variadas geometrías de cimentación, condiciones de contorno y propiedades mecánicas del suelo. Sin embargo, estas soluciones provienen de análisis elástico y no consideran la inelasticidad y la degradación del suelo.

La rigidez estática $K = P / u$ se usa para modelar la respuesta suelo- fundación ante cargas estáticas. De modo análogo, la impedancia o rigidez dinámica del suelo $K = P(t) / u(t)$, se usa

para modelar la respuesta suelo - fundación ante cargas dinámicas como las debidas a maquinarias. Una base rígida aislada que descansa sobre el semi- tiene seis grados de libertad, tres traslacionales y tres rotacionales, para establecer la ecuación de equilibrio dinámico de una cimentación rígida. Las impedancias son funciones de la geometría de la cimentación, de las propiedades del suelo y de la frecuencia de vibración de la máquina.

La traslación vertical y la rotación de torsión están desacopladas en bases simétricas, mientras que el movimiento de oscilación y el de balanceo se acoplan porque el centro de gravedad de la estructura está por encima del centro de la presión reactiva del suelo.

Estas impedancias acopladas son insignificantes en cimientos superficiales, pero sus efectos se vuelven apreciables para cimentaciones desplantadas en el suelo.

Las ocho impedancias, que caracterizan la reacción dinámica del suelo contra el bloque de cimentación, se puede poner en la siguiente forma [Gazetas, 1991]

$$\tilde{K}(\mu) = K(\mu) + i\mu \cdot C(\mu) \qquad (5.1)$$

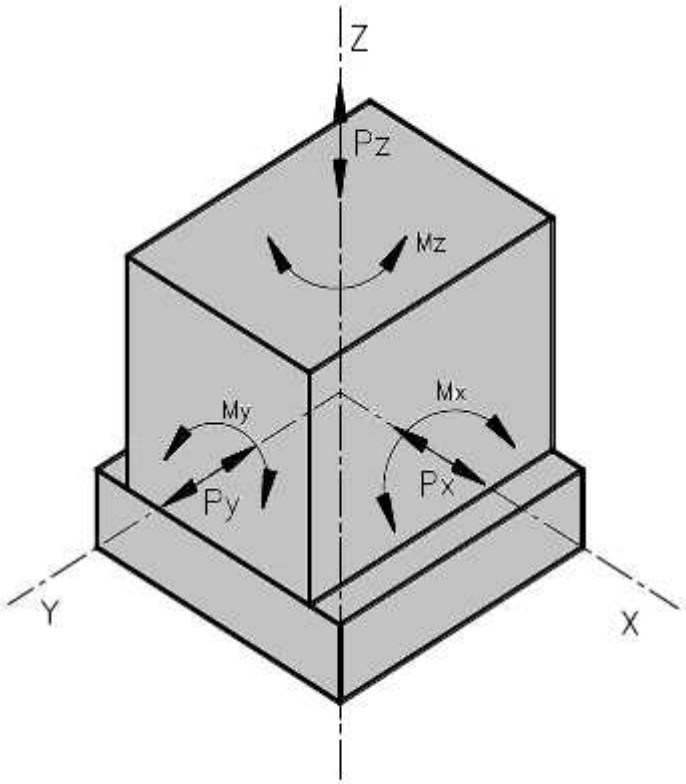
La impedancia $\tilde{K}$ es un número complejo, donde el componente real $K(\mu)$ refleja la rigidez y la inercia del suelo, mientras que el componente imaginario es el producto de la frecuencia circular y el coeficiente de amortiguación $C(\mu)$. Este último refleja dos tipos de amortiguamiento: la amortiguación geométrica por radiación, y la amortiguación interna del material. La amortiguación total debe incluir la amortiguación geométrica y la amortiguación del material. La amortiguación del material tiende a reducir la rigidez dinámica de la cimentación. La amortiguación de radiación depende del nivel de deformación, debido a su dependencia del módulo de cortante movilizado $G = °V_s^2$ del suelo. La disipación geométrica es debida a la propagación de la onda en el subsuelo y para los sistemas modelados con parámetros concentrados representa la mayor parte de la pérdida de energía en la estructura.

La amortiguación del material también depende del nivel de deformación movilizado en el suelo, durante la perturbación ondulatoria, como lo demuestran ampliamente los resultados de columnas de resonancia y pruebas triaxiales cíclicas, llevadas a cabo tanto en suelos granulares como cohesivos [Seed e Idriss, 1970]. Tanto la masa dinámica del suelo como el efecto de la masa del

cimiento con respecto a la amortiguación geométrica, se deberán considerar en los análisis de vibración.

El componente real $K(\mu)$se puede expresar como el producto de la rigidez estática K_{st} y el coeficiente de rigidez dinámica $K_{dy}(\mu)$. El coeficiente dinámico $K_{dy}(\mu)$ también depende del módulo de cortante movilizado $G = °V_s^2$ del suelo.

La variación de $K_{dy}(\mu)$ y del coeficiente de amortiguación de la radiación, frente al módulo de cortante, ha sido resumido por Gazetas [1991] para varias fundaciones y condiciones del suelo; la amortiguación del material movilizado solo puede ser evaluado a través del coeficiente de coeficiente de amortiguamiento obtenido por pruebas de laboratorio. Sin embargo, la variación de $K_{dy}(\mu)$ y de la amortiguación por radiación, frente al módulo de cortante movilizado, no deberían considerarse tan importantes para la predicción de impedancia, porque la porción de suelo, que experimenta una degradación sustancial del módulo de cortante, es lo suficientemente limitado y se encuentra cerca de la fundación. En cambio, la variación de amortiguamiento de material y K_{st} con el nivel de deformación puede considerarse muy significativo en la modificación de la impedancia.



Grados de libertad de un bloque de cimentación.

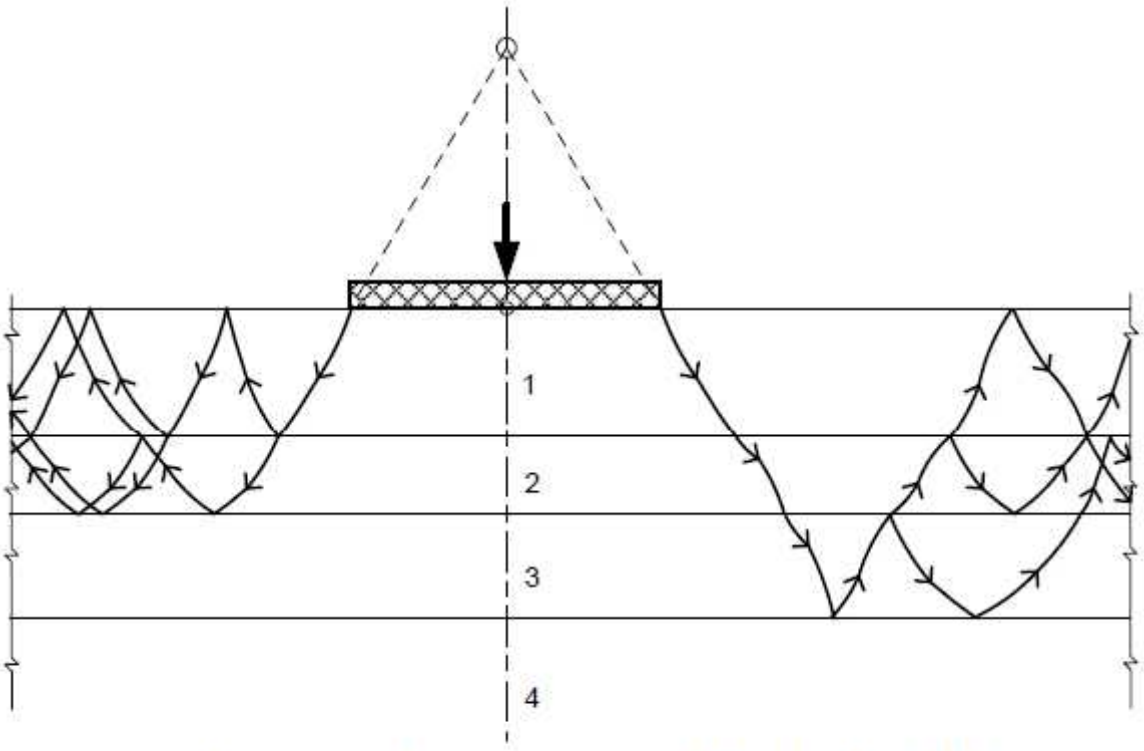
El procedimiento utilizado para calcular las impedancias dinámicas de una cimentación superficial rígida se puede resumir en los siguientes pasos:

La base se modela como carente de masa e infinitamente rígida; por lo tanto, solamente se requiere la geometría del área en contacto con el suelo B y L. Asumir una cimentación sin masa es importante, ya que evita la necesidad de volver a calcular la impedancia dinámica cada vez que cambia la masa de la cimentación, lo que a menudo ocurre durante el proceso de diseño.

Se aplica una fuerza armónica, o momento, de frecuencia ω y de magnitud unitaria, a la base rígida, $P(t) = P_0 e^{i\mu t}$ o $M(t) = M_0 e^{i\mu t}$ Como efecto de tales fuerzas o momentos, la propagación ondulatoria, genera esfuerzos en el suelo subyacente, modelado como un material viscoelástico, del que se requiere conocer las propiedades de cada estrato: espesor t, Módulo de elasticidad E_s, relación de Poisson ¬, densidad ρ y amortiguamiento del material ¶.

La amplitud de la vibración del estado estacionario $u(t) = u_0 e^{i(\mu t + ¤)}$ o $^{-}(t) = ^{-}_{0} e^{i(\mu t + ¤)}$ de la fundación sometida a las fuerzas armónicas, se obtiene al mantener un registro de las reflexiones

y refracciones sucesivas que ocurren cada vez que los esfuerzos debidos a las ondas alcanzan un límite en la interfase de los estratos de suelo. Esto se logra al encontrar las diferentes trayectorias de las ondas tal a como se muestran en la figura tomada de la obra de Wolf, J.P., 2004. Foundation Vibration Analysis: A Strength of Materials Approach. Butterworth-Heinemann.



Downwards and upwards wave propagation for surface disk in layered half-space, acording to Ref: Wolf, J.P., 2004. Foundation Vibration Analysis: A Strength of Materials Approach. Butterworth-Heinemann.

La impedancia dinámica K (ω) se define como la relación entre la fuerza armónica que actúa sobre la base y su amplitud de vibración. Debe observarse que esta es una magnitud compleja dependiente de la frecuencia (ω).

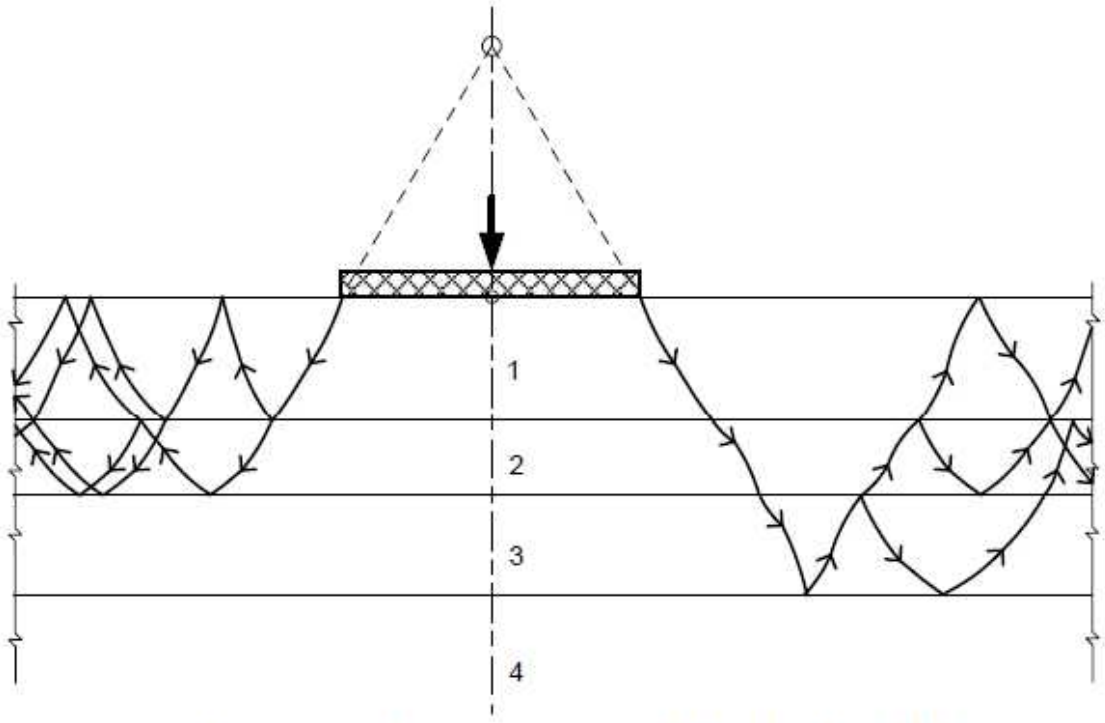
$$K(\mu) = \frac{P(t)}{u(t)} = \frac{P_0 e^{i\mu t}}{u_0 e^{i(\mu t + \alpha)}} = \frac{P_0}{u_0} e^{-i\alpha} \quad (5.2)$$

En la dinámica del suelo, es habitual expresar la impedancia dinámica mediante el número complejo $K(\mu)=\bar{k}+i\mu C$.

Adicionalmente, las partes real e imaginaria de la impedancia dinámica están asociadas, por analogía, con una rigidez y amortiguamiento dinámico dependiente de la frecuencia.

$$\begin{cases} \bar{k}(\mu)=\mathrm{Re}\left[K(\mu)\right]=\dfrac{P_0}{u_0}\cos¤ \\ C(\mu)=\dfrac{\mathrm{Im}\left[K(\mu)\right]}{\mu}=-\dfrac{P_0}{\mu u_0}sen¤ \end{cases} \qquad (5.3)$$

Los pasos 2 al 5 se repiten para cada frecuencia μ_i de interés, hasta que el rango de frecuencias de vibración de la máquina esté cubierto.



Downwards and upwards wave propagation for surface disk in layered half-space, acording to Ref: Wolf, J.P., 2004. Foundation Vibration Analysis: A Strength of Materials Approach. Butterworth-Heinemann.

Para la determinación de las funciones de impedancia se dispone de recursos analíticos como los métodos numéricos operados en computadora, métodos de los elementos de contorno, métodos de elementos finitos, métodos de las funciones de Green y las ecuaciones integrales entre otros.

Haremos un esbozo sucinto de algunos de estos métodos, ya que una discusión detallada de tales procedimientos, está más allá del alcance de este trabajo.

Es importante recordar que cualquier modelo del suelo, ya sea de elementos finitos, analítico o simplemente una representación de la función de impedancia, se basa en una suposición matemática del comportamiento del material del suelo.

Inicialmente, las funciones de impedancia se determinaron analíticamente haciendo una serie de suposiciones para el sistema del suelo que permitían expresar los materiales y sus condiciones de frontera de manera simple, permitiendo que una solución de forma cerrada para la función de impedancia se determinara algebraicamente. Sin embargo, a medida que se empezaron a considerar sistemas de cimentación más complicados, la formulación matemática de la función de impedancia se hizo cada vez más compleja. La expresión de estos sistemas a menudo resultaría en un conjunto de integrales duales para las cuales no existe una solución de forma cerrada. Estas ecuaciones tendrían que transformarse en integrales de Fredholm y luego evaluarse numéricamente (Shah, 1968) para producir soluciones analíticas aproximadas. El sistema posterior comenzaría a utilizar valores empíricos para simplificar las ecuaciones, lo que conduciría aún más a soluciones matemáticas menos racionales (Veletsos y Verbic, 1973).

5.2. Formulación algebraica para las funciones de impedancia.

Es posible obtener la función de impedancia a partir de un modelo de suelo que se ha definido explícitamente en términos de masa estática, rigidez y matrices de amortiguación. Estas matrices producirán sistemas de suelo que son elásticos lineales que se prestan fácilmente a la formulación de funciones de impedancia en el dominio de la frecuencia, sin necesidad de procedimientos numéricos. Las ecuaciones de movimiento para estos sistemas se expresan en el dominio de la frecuencia mediante el uso de notación exponencial compleja y, luego, utilizando un poco de álgebra, la función de impedancia se puede determinar siguiendo un procedimiento simple.

Al explicar la teoría de este método, es conveniente demostrar su ejecución para un sistema de un solo grado de libertad. El procedimiento se basa en poder expresar las matrices del sistema global en el dominio de la frecuencia para obtener la matriz de flexibilidad compleja global en el

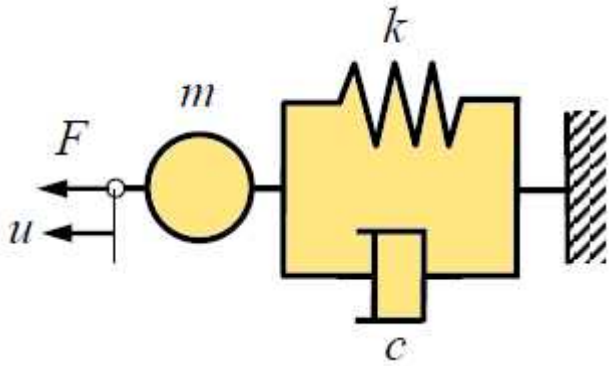
dominio de la frecuencia. A partir de esta matriz de flexibilidad, se puede obtener la función de impedancia para el grado de libertad en la interfase. La ecuación de movimiento para un sistema que contiene un solo nodo con una masa unida a una base rígida por un resorte y un amortiguador sometido a una fuerza armónica externa es la siguiente:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0 e^{i\mu t} \quad (5.4)$$

Para transformar esta expresión en el dominio de la frecuencia, tiene que reescribirse con la fuerza externa expresada como una suma de funciones de coseno y seno en una frecuencia distinta μ_i. Esta fuerza se debe describir utilizando una exponencial compleja equivalente en la siguiente forma: $F = F_0 e^{i\mu_i t}$ Tomando el desplazamiento para que sea una función exponencial compleja similar, la velocidad y la aceleración del sistema se pueden expresar simplemente como: $u = u_0 e^{i\mu_i t} \quad \dot{u} = i\mu_i u_0 e^{i\mu_i t} \quad \ddot{u} = -\mu_i^2 u_0 e^{i\mu_i t}$

F_0 y u_0 son las amplitudes de la fuerza y las funciones de desplazamiento resultantes, respectivamente. Estas expresiones permiten reescribir la ecuación del movimiento en términos de las dos variables de amplitud, de la siguiente forma:

$$-m\mu_i^2 u_0 e^{i\mu_i t} + ci\mu_i u_0 e^{i\mu_i t} + ku_0 e^{i\mu_i t} = F_0 e^{i\mu_i t} \quad (5.5)$$



Esta expresión puede simplificarse eliminando el término exponencial común y dividiendo la variable de amplitud para formar la relación de rigidez:

$$\frac{F_0}{u_0} = k + ic\mu_i - m\mu_i^2 \qquad (5.6)$$

De esta ecuación se hace evidente que el sistema se comportará de manera significativamente diferente dependiendo del valor de la frecuencia aplicada. Además, cuando la frecuencia es cero, se produce la condición estática y el desplazamiento se convierte simplemente en la división de la fuerza estática aplicada en la rigidez. La relación de fuerza y desplazamiento es la rigidez dinámica y la función de impedancia se construye determinando esta relación para un rango de frecuencias. La serie resultante de rigidez dinámica es la información que conforma la función de impedancia.

Para considerar la formación de impedancias basadas en un sistema con un número arbitrario de grados de libertad, la ecuación de movimiento debe expresarse ahora con notación matricial vectorial: $M\ddot{\vec{\mathbf{u}}} + C\dot{\vec{\mathbf{u}}} + K\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{F}}_0 e^{i\mu_i t}$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \vec{F}_0 e^{i\mu_i t} \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{F}_0 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix} e^{i\mu_i t} = \vec{\mathbf{F}}_0 e^{i\mu_i t} \qquad (5.7)$$

Cada grado de libertad responderá con diferentes amplitudes para la carga especificada. Esto crea un vector de respuesta de desplazamiento compuesto de muchas amplitudes desconocidas de la forma presentada a continuación. La impedancia que es de interés es únicamente la relación entre $\vec{F}_0$ y u_{01}.

$$\vec{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \vec{u}_{01} e^{i\mu_i t} \\ \vec{u}_{02} e^{i\mu_i t} \\ . \\ . \\ . \\ \vec{u}_{0n} e^{i\mu_i t}. \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{u}}_0 e^{i\mu_i t} \qquad (5.8)$$

Realizando la misma sustitución realizada anteriormente, se genera a continuación el sistema lineal. El nuevo vector $\vec{\mathbf{u}}_0$ es un vector de amplitudes desconocidas de desplazamiento y el vector $\vec{F}_0$ es un vector compuesto por la amplitud de la fuerza del primer grado de libertad y subsecuentemente cero para todos los demás grados de libertad.

$$\vec{\mathbf{F}}_0 e^{i\mu_l t} = \left(K + Ci\mu_i - M\mu_i{}^2\right)\vec{\mathbf{u}}_0 e^{i\mu_l t} \qquad (5.9)$$

Para aislar la función de impedancia del primer grado de libertad, la inversa de la rigidez dinámica, la matriz de flexibilidad dinámica, debe formularse a partir de la ecuación anterior, la que se reorganiza y las exponenciales se eliminan produciendo la siguiente ecuación:

$$\left(K + Ci\mu_i - M\mu_i{}^2\right)^{-1}\vec{\mathbf{F}}_0 = \vec{\mathbf{u}}_0 \qquad (5.10)$$

Los términos dentro de los corchetes en esta ecuación, son colectivamente la rigidez dinámica, que como están siendo invertidas, ahora son la flexibilidad dinámica. Reemplazar estos términos en el corchete con términos de componentes de flexibilidad permite que el sistema de ecuaciones se presente de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n,1} & f_{n,2} & \cdot & \cdot & \cdot & f_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{0n} \end{bmatrix} \qquad (5.11)$$

De la ecuación matricial obtenida, la expresión para u_{01} se formula multiplicando la primera fila de la matriz de flexibilidad y el vector de fuerza. Dado que todas las amplitudes de fuerza distintas del primer grado de libertad son cero, solo se requiere el componente de flexibilidad de $f_{1,1}$ en la formulación de impedancia.

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{1,1} \times \mathbf{F}_0 = \mathbf{u}_{01} \\ \dfrac{\mathbf{F}_0}{\mathbf{u}_{01}} = \mathbf{f}_{1,1}{}^{-1} \end{cases} \qquad (5.12)$$

Por lo tanto, el procedimiento para determinar la función de impedancia para un sistema con un único grado de interfase es formular primero la matriz de rigidez dinámica general presente. Al invertir esta matriz se generaría entonces la matriz de flexibilidad dinámica, y para obtener la función de impedancia deseada, se invertiría el término dentro de la matriz de flexibilidad que corresponde al grado de libertad de la interfase.

Para expandir las ideas anteriormente formuladas a un sistema de suelos con múltiples grados de libertad en la interfase de la fundación, se deben implementar una serie de ajustes a las ecuaciones previamente establecidas. En la sección anterior, la fuerza externa se aplicó a un único grado de libertad que corresponde a la interfase. Ahora será considerada una interfase que contiene múltiples grados de libertad y, en consecuencia, la fuerza externa debe aplicarse en cada una de estas direcciones. El nuevo vector de fuerza presentado en la siguiente ecuación, corresponde a un sistema con k número de grados de libertad en la interfase.

$$\vec{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} F_0 e^{i\mu_i t} \\ . \\ . \\ F_0 e^{i\mu_i t} \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \end{bmatrix} \qquad (5.13)$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, el sistema lineal final compuesto en este método tendrá la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} f_{1,1} & \cdot\ \cdot & f_{1,k} & \cdot\ \cdot & f_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ f_{k,1} & \cdot\ \cdot & f_{k,k} & \cdot\ \cdot & f_{1,k} \\ f_{k,1+1.1} & \cdot\ \cdot & f_{k+1.k} & \cdot\ \cdot & f_{1,k+1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ f_{n,1} & \cdot\ \cdot & f_{n,k} & \cdot\ \cdot & f_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_k \\ u_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix} \qquad (5.14)$$

Al expandir la multiplicación de matrices presentada en esta ecuación, sería evidente que las primeras k ecuaciones están acopladas e independientes de las ecuaciones restantes. Los únicos términos de flexibilidad que son relevantes son las primeras k columnas de las primeras k filas que forman una matriz de flexibilidad reducida. Invertir esta matriz y transferirla al lado derecho produciría la siguiente ecuación:

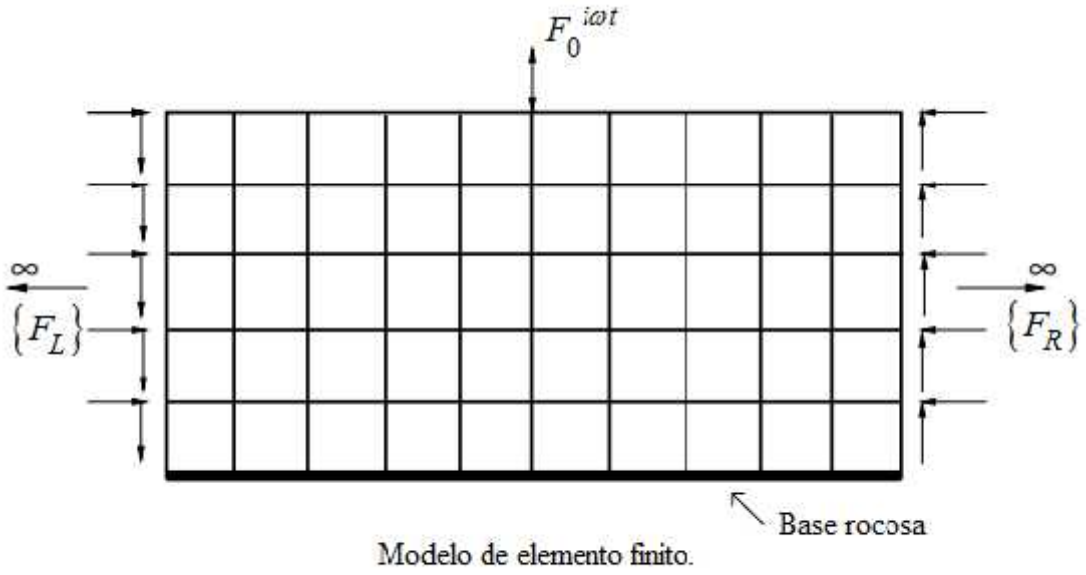
$$\begin{bmatrix} F_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & f_{1,k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ f_{k,1} & \cdot\ \cdot\ \cdot & f_{k,k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_k \end{bmatrix} \qquad (5.15)$$

De hecho, esta matriz de flexibilidad reducida invertida define la familia de funciones de impedancia de la interfase. Como las fuerzas y el desplazamiento de los diversos grados de libertad están acoplados, no son posibles ecuaciones independientes para la relación de fuerza y desplazamiento. En cambio, cada función de impedancia se define como cada componente de la matriz de flexibilidad invertida.

5.3. Determinación de las funciones de impedancia empleando modelos de elemento finito (FEM).

Para cimentaciones con geometría o condiciones de suelo complejas, las impedancias dinámicas del suelo pueden ser determinadas mediante análisis dinámico en dos o tres dimensiones de un modelo continuo para un sistema suelo-fundación. En particular los seis pasos descritos inicialmente para determinar las funciones de impedancia, pueden implementarse empleando método de elemento finito.

En un modelo de elemento finito, solo una parte del suelo (es decir, una isla de suelo) puede ser discretizado Estos modelos deberían ser capaces de reproducir adecuadamente los resultados similares a las funciones de impedancia generadas analíticamente si se utilizan las mismas suposiciones de la elasticidad de semi-espacio, las condiciones de contorno y las configuraciones de cimentación. El mayor desafío que enfrenta el modelado de elementos finitos es captar con precisión la propiedad de disipación de la onda en el medio infinito del suelo. El uso de límites rígidos en el modelo de elementos finitos de suelo dará lugar a reflexiones de onda sísmica fuera de los límites, las que repercuten de nuevo en el sistema de suelo, dando lugar a respuestas de ondas reflejadas con resultados erróneos. Por lo tanto, las condiciones de contorno apropiadas (límites no reflectantes) deben aplicarse cuando el suelo es arbitrariamente truncado. Mientras que los límites efectivos, no reflectantes o transmisores se han desarrollado en la literatura para este propósito, aún no se han implementado en la mayoría de los códigos de computadora utilizados para el análisis estructural. Tales límites son de índole aproximada; sin embargo, los modelos de elemento finito basados en ellos, convergen a la solución teórica de elastodinámica a medida que aumenta el tamaño de la isla del suelo. En general, los resultados dentro de un pequeño porcentaje de las soluciones teóricas se pueden lograr con tamaños de isla de suelo razonables, es decir, pequeñas. [42, 43, 44]



Modelo de elemento finito.

Fuente: Two-Dimensional Numerical Modelling of Wave Propagationin Soil Media. Nawras Hamdan. 2013

Uno de los modelos de elementos finitos para resolver problemas de propagación de ondas en dos dimensiones para régimen estacionario, en los medios de los suelos supra yacentes al basamento rocoso rígido, en condiciones de deformación plana, parten dividir el medio de suelo en tres regiones: el dominio central o irregular, y los dos dominios laterales o regulares.

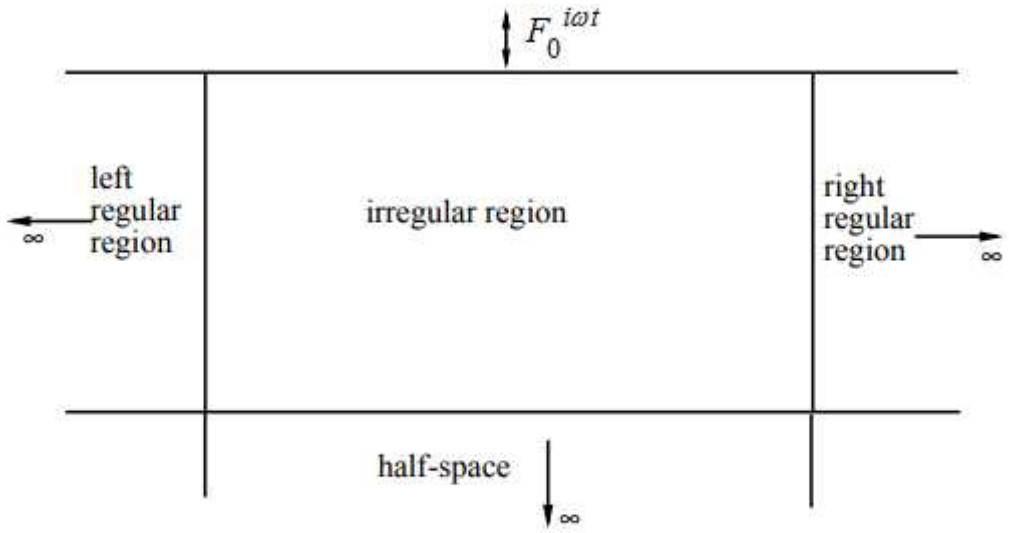
La región, de interés, está engranado mediante retículas de elementos finitos con los dos dominios laterales que se extienden hasta el infinito, los que se reemplazan por fuerzas nodales equivalentes que se aplican en la región central o irregular.

Estas fuerzas nodales se calculan a través de la solución de un problema de eigenvalor de segundo orden, que se reduce a un primer orden con el doble de su tamaño. El modelo FEM obtenido permite el modelado numérico de la propagación de la onda es el medio del suelo sobre el lecho de roca rígido y sometido a cargas armónicas $F_0^{i\mu t}$.

Los desplazamientos nodales, especialmente en la superficie del suelo, se usarán en etapa de postprocesamiento de los resultados para fines de validación y estudio paramétrico.

El modelo basado en la suposición de que el suelo es un medio superpuesto al lecho rocoso rígido, puede representar situaciones reales de ingeniería, en las que el lecho de roca se encuentra en profundidades poco profundas o intermedias. Sin embargo, cuando este no es el caso y el

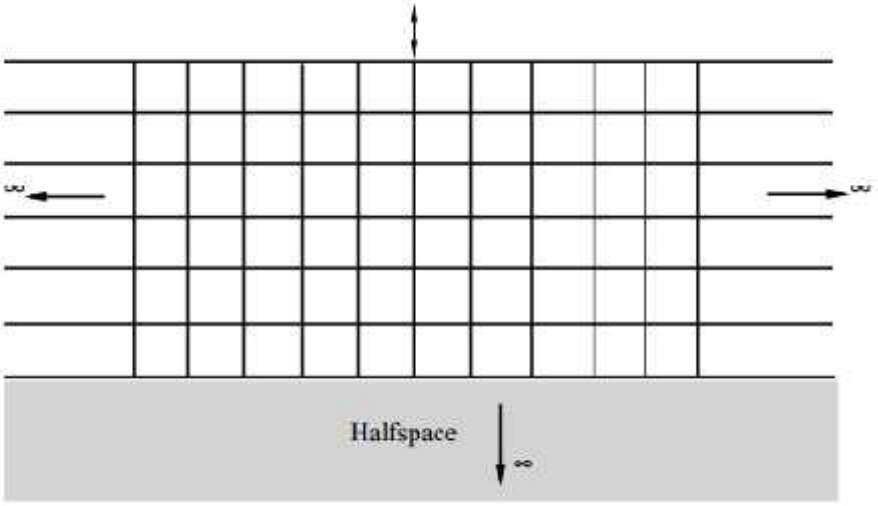
medio del suelo es muy profundo o se extiende hasta el infinito en ambos direcciones laterales y verticales, el modelo alternativo debe ser el modelo del semi- espacio.



Tratamiento del modelo para el semi-espacio.

Fuente: Two-Dimensional Numerical Modelling of Wave Propagationin Soil Media. Nawras Hamdan. 2013

No se dispone de una representación exacta del semi-espacio en el marco del FEM. Un enfoque que representa parte del semi-espacio, debajo de un dominio de interés, como el límite absorbente o paraxial (PBC) combinado con el método de estrato delgado (TLM), sería de uso práctico.



Representacion del semi-espacio bidimensional.

Fuente: Two Dimensional Numerical Modelling of Wave Propagationin Soil Media. Nawras Hamdan. 2013

Una primera idea consistió en extender el enfoque TLM a la base del dominio computacional y formular las matrices apropiadas que representan la contribución del semi-espacio. Tratando el dominio de la base con el mismo procedimiento utilizado para las regiones semi infinitas laterales izquierda y derecha, resulta un modelo computacional muy costoso debido al problema de eigenvalor. Además, seguir el TLM requeriría la fijación de ciertos nodos, por ejemplo, en las dos esquinas inferiores del dominio computacional, para evitar modos rígidos. Como este enfoque parecía poco práctico para las aplicaciones consideradas, se adoptó un método alternativo, consistente en el acoplamiento del TLM con el PBC, a como se muestra esquemáticamente en la figura anterior.

Kausel y Roësset, [45] han realizado formulaciones especiales del PBC para la matriz de impedancia del semi-espacio, las que se explican de la siguiente manera: un semiespacio en capas es truncado en la interfase entre la última capa y el semi-espacio subyacente. Las tracciones en la interfase contribuyen a la parte de trabajo virtual externo. Teniendo en cuenta que la capa inferior está dividida en elementos y aplicando la ecuación del trabajo virtual, ecuación de trabajo para las tensiones en la parte inferior de la última capa, las matrices de rigidez dinámica de los elementos del semi-espacio son deducidas y, por lo tanto, se ensamblan con la rigidez de los elementos finitos del dominio irregular. Los nodos de borde de la última capa también tienen alguna contribución. Para los límites laterales, la contribución del semi-espacio es considerada e implementada en el problema de eigenvalor algebraico. Las fuerzas nodales y las matrices de impedancia de las regiones regulares se calculan y sustituyen de nuevo en la ecuación de la dinámica global.

Se ha llevado a cabo una gran cantidad de investigaciones para crear límites apropiados de absorción de energía y viscosidad y otros elementos límite (Yerli, 2003) que reproducen con precisión este comportamiento de límite infinito del dominio del suelo.

Las funciones de impedancia solo se pueden determinar a partir de modelos de elementos finitos elásticos lineales del dominio del suelo, ya que cualquier no linealidad o degradación del suelo no se puede capturar adecuadamente en una función de dominio de frecuencia. La razón es que durante el análisis no lineal, la respuesta dinámica del suelo no solo depende de la frecuencia de forzamiento sino también de la amplitud de la fuerza aplicada.

En los siguientes comentarios, se expondrán los procedimientos para obtener una función de impedancia a partir de un modelo de elementos finitos que se destina principalmente al análisis de la historia del tiempo. El método de formulación algebraica solo es posible si las matrices estructurales del sistema del suelo están disponibles para su manipulación.

5.4. Evaluación de las funciones de impedancia usando el método de elementos de frontera.

El método de elementos de frontera, también conocido como método de elementos de contorno o de elementos de borde, (BEM) por sus siglas en inglés Boundary Element Method), ha sido desarrollado para el análisis elastodinámico de problemas ondulatorios en sólidos. Sin embargo, la formulación relativamente complicada y el cálculo intensivo para obtener soluciones exactas, restringe su común aplicación a la práctica de ingeniería tradicional. En este enfoque, la condición de energía de radiación hacia el infinito, es tomado en cuenta correctamente por las ecuaciones integrales, y la discretización del espacio se reduce solo al límite de los medios adyacentes. Las contribuciones más importantes fueron publicadas por Domínguez y Roesset [46] basado en el dominio de frecuencia para calcular las funciones de impedancia de cimientos superficiales rectangulares. Además, Veletsos y

Wei [47] y Luco y Westman [48] resolvieron exactamente el problema para valor límite mixto de frontera de un disco rígido que descansa sobre el semi-espacio elástico para vibraciones verticales, deslizante, de cabeceo y movimientos armónicos torsionales. Apsel y Luco [49] obtuvieron las funciones dinámicas de Green, para un semi-espacio estratificado.

Gazetas y Tassouslas [50] investigaron la respuesta dinámica de cimientos rígidos con formas arbitrarias incrustados en un semi-espacio uniforme, para rangos de baja frecuencia. Técnicas de solución integrales que presuponen condiciones de contacto soldadas para cimientos circulares incrustados en un suelo incompresible también se han presentado por Apsel y Luco y Mita y Luco [51]. La mayoría de los resultados numéricos publicados hasta la fecha, corresponden a cimientos rígidos superficiales y embebidos, para frecuencias bajas a moderadas $0 \leq a_0 \leq 4$ y son restringidas para ciertos valores de la relación de Poisson $0.25 \leq \neg \leq 0.45$ y para ciertos tipos de geometría de fundación, debido al costo de cálculo, suposiciones prácticas, y limitaciones de rigurosas técnicas de análisis.

El cálculo de las impedancias dinámicas de cimentaciones mediante el método de los elementos de contorno; implica el resolver para cada frecuencia, tantos sistemas lineales de ecuaciones algebraicas como movimientos del sólido rígido se hayan establecido. Una vez obtenidos los estados de esfuerzo en los elementos en que se discretizó la interfase cimentación-terreno; se determinan los esfuerzos resultantes con respecto al punto de referencia escogido, generalmente el centro de gravedad de la cimentación y en caso de cimentaciones embebida en el terreno, en el fondo del desplante. El cociente de estas resultantes, entre el movimiento correspondiente a cada tipo de perturbación, nos proporciona el valor de la impedancia correspondiente deseada.

Las propiedades de la interacción dinámica recíproca entre los cimientos y el suelo de soporte se pueden investigar utilizando un análisis del estado estacionario en el dominio de la frecuencia, o un enfoque de subestructura en el dominio de tiempo directo. En el análisis en el dominio de la frecuencia, la atención se centra principalmente en la indicación de las impedancias del suelo, y la interpretación de la naturaleza de la frecuencia dependiente de los problemas de interacción suelo-estructura.

La evaluación de las funciones de impedancia definidas por los coeficientes de rigidez-flexibilidad dinámica complejos, en los puntos de la interfase del sistema de fundación del suelo, juega un papel importante en los problemas de interacción suelo-estructura.

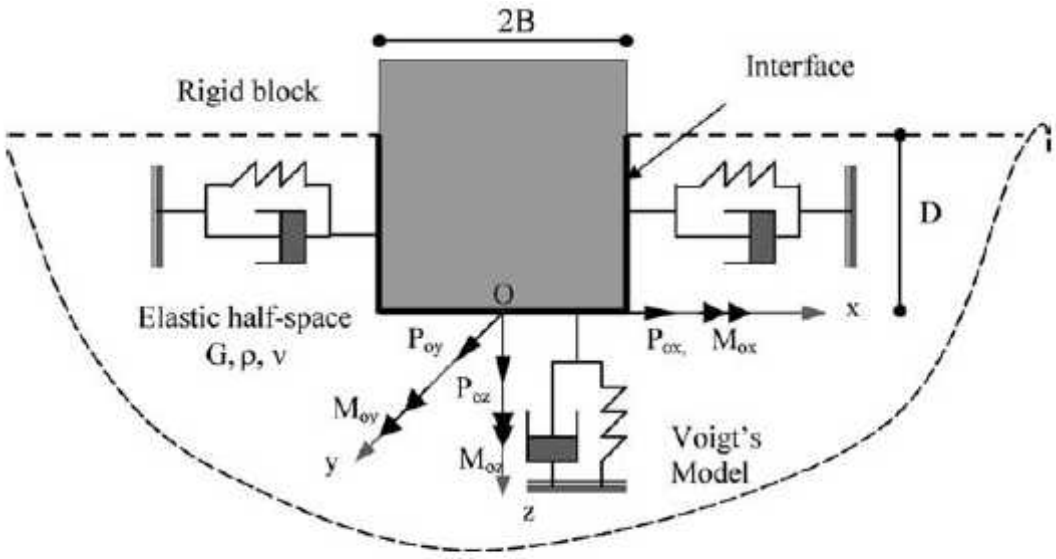
Al usar el método de la subestructura, el sistema suelo-cimentación, se ha dividido en dos subestructuras. Las ecuaciones de gobierno describen la respuesta dinámica de la cimentación finita y el suelo ilimitado se puede analizar independientemente con respecto al grado de libertad de en los nodos comunes en la interfase.

Las condiciones de equilibrio y compatibilidad en todos los puntos de interacción, permiten el ensamble de la estructura completa y se puede realizar la solucion para todo el sistema.

El efecto del suelo ilimitado en el comportamiento de la estructura, está representado por una condición límite asociada a los grados de libertad de los nodos unidos en la interfase de las dos subestructuras. Esta condición límite es de la forma de una relación fuerza-desplazamiento, determinada mediante la solucion fundamental correspondiente a un semi-espacio homogéneo.

La técnica de la subestructura, permite un acoplamiento de la cimentación y el suelo subyacente en los nodos de interacción comunes. La matriz de impedancia del suelo, se define por la matriz de rigidez dinámica de los nodos en la interfase entre la cimentación y el suelo.

Como se muestra en la figura tomada de la referencia [52], la cimentación de bloque rectangular rígido, carente de masa, cuya dimensión 2B corresponde a la dirección x, sujeto a perturbaciones armónicas verticales, horizontales, rotaciones oscilantes y torsionales, y cuyo espesor insignificante se encuentra parcialmente embebido en el suelo de un semi-espacio elástico homogéneo, caracterizado por las propiedades de densidad de masa ρ, relación de Poisson ν y el módulo de rigidez al corte G. Debido a la deformabilidad del medio de fundación, el movimiento de la cimentación se puede describir por los seis grados de libertad, dos de traslaciones horizontales, (u_{0x} u_{0y}), uno de traslación vertical (u_{0z}), dos rotaciones oscilantes (c_{0x} c_{0y}) y uno de rotación torsional (c_{0z}) respecto al punto O de la interfase inferior suelo-estructura.



Rigid block model resting on elastic half-space.
After: E. Çelebi , S. Fırat I. Çankaya. Turkey 2006.

En esta representación, los resortes equivalentes representan la flexibilidad del suelo, mientras que los amortiguadores equivalentes representan el efecto de la disipación de energía por radiación debido a la infinitud de la región del suelo. La rigidez y la amortiguación de la cimentación dependen de la frecuencia de excitación, por lo que es más conveniente relacionar las fuerzas interactivas de corte (P_{0x} P_{0y}), la fuerza vertical (P_{0z}), los momentos interactivos

de vuelco (M_{0x} M_{0y}) y el momento torsional (M_{0z}), a la resultante de las traslaciones y rotaciones de la cimentación, en transformadas de Fourier en el dominio de la frecuencia.

La relación dinámica fuerza-desplazamiento para la fundación puede ser expresada de la siguiente manera (5.16):

$$\begin{Bmatrix} P_{0x} \\ P_{0y} \\ P_{0z} \\ M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0z} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} K_{xx}(\mu) & 0 & 0 & 0 & K_{x,my}(\mu) & 0 \\ 0 & K_{yy}(\mu) & 0 & K_{y,mx}(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{zz}(\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{mx,y}(\mu) & 0 & K_{mx}(\mu) & 0 & 0 \\ K_{my,x}(\mu) & 0 & 0 & 0 & K_{my}(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{mz}(\mu) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_{0x} \\ u_{0y} \\ u_{0z} \\ ¥_{0x} \\ ¥_{0y} \\ ¥_{0z} \end{Bmatrix}$$

Cuando se considera el sistema 3-D, se obtiene la matriz de impedancia **K** de orden 6×6 para una cimentación rígida sin masa, la que expresa la relación entre la fuerza armónica aplicada y el vector de desplazamiento $\bar{\mathbf{u}}$ del centro geométrico de la cimentación.

Los términos diagonales de la matriz son diferentes de cero, y otros términos extra diagonales en la matriz que representan el acoplamiento, entre los grados de libertad son cero.

Si el sistema cimentación- suelo tiene dos planos de simetría, el movimiento vertical y el de torsión también están desacoplados. Solo el balanceo y la rotación están acoplados en cada plano de simetría. Para cimientos superficiales, se puede ignorar el acoplamiento entre rotación y balanceo.

Generalmente, en el caso de vibraciones armónicas, la impedancia y la respuesta resultante son cantidades complejas. Esta relación puede ser reescrita de una manera más general como:

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} \quad (5.17)$$

El significado físico de la rigidez dinámica se puede interpretar mediante la matriz f de flexibilidad determinada en la interfase cimentación-suelo a partir de la inversión de la matriz de

impedancia. La matriz de flexibilidad $[\mathbf{f}]=[\mathbf{K}]^{-1}$ llamada también matriz de desplazamiento, transfiere la carga de entrada como imput, al desplazamiento de salida output, y expresa la deformación elástica de la cimentación y el subsuelo del sistema.

$$\{\mathbf{u}\}=[\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{P}\}=[\mathbf{f}]\{\mathbf{P}\} \quad (5.18)$$

Todas las funciones de impedancia se dan en relación con el factor de frecuencia adimensional previamente definido como $a_0=\frac{\mu B}{V_s}$. En la solución del problema mixto de valores de frontera, mediante el método de los elementos de contorno, las impedancias de la base para las cargas dinámicas, se pueden determinar integrando la correspondiente distribución de los esfuerzos en la interfase suelo-fundación.

Las rigideces dinámicas del sistema se describen en el centro de la cimentación y puede ser expresado en la siguiente forma: $K_{\sim}(\mu)=K_{s\infty\sim}\left[K_{\sim}(a_0)+ia_0c_{\sim}(a_0)\right](1+2i\quad)$ (5.19)

La rigidez estática puede describirse para cada grado de libertad o modo de vibración. La amortiguación interna del suelo también se toma en consideración y se caracteriza por la relación de amortiguación β. Las partes reales de las funciones de impedancia significan componentes de fuerza en fase con los desplazamientos y se pueden denominar como rigidez dinámica para la fundación. Por otro lado, las partes imaginarias son componentes de fuerza en fase con las velocidades y puede interpretarse como la disipación de energía por la radiación de ondas en el suelo lejos de la fundación. Por lo tanto, pueden denominarse coeficientes de amortiguación de la cimentación.

A fin de comparar los resultados de los enfoques analíticos, las cimentaciones rectangulares se reemplazan por una cimentación circular de radio r de modo que el area sea equivalente a la del rectángulo para movimiento traslacional, y el mismo momento de inercia para los movimientos de rotación.

La rigidez estática se calcula usando los valores relacionados con la cimentación circular superficial de superficie circular.

Las impedancias dinámicas de la cimentación se pueden escribir como:

Modo de vibración horizontal $(\sim = xx, yy)$:

$$K_{\sim}(\mu) = \frac{8Gr}{(2-\neg)}\left(k_{\sim} + ia_0 c_{\sim}\right); r = \sqrt{\frac{4BL}{\circledR}} \qquad (5.20)$$

Modo de vibración vertical $(\sim = zz)$:

$$K_{\sim}(\mu) = \frac{4Gr}{(1-\neg)}\left(k_{\sim} + ia_0 c_{\sim}\right); r = \sqrt{\frac{4BL}{\circledR}} \qquad (5.21)$$

Modo de vibración de balanceo $(\sim = mx, my)$:

$$K_{\sim}(\mu) = \frac{8G^3{}_{\sim}}{3(1-\neg)}\left(k_{\sim} + ia_0 c_{\sim}\right); r_{mx} = \sqrt[4]{\frac{16B^3L}{3\circledR}}, r_{my} = \sqrt[4]{\frac{16BL^3}{3\circledR}} \qquad (5.22)$$

Modo de vibración torsional $(\sim = mz)$:

$$K_{\sim}(\mu) = \frac{16Gr^3}{3}\left(k_{\sim} + ia_0 c_{\sim}\right); r = \sqrt[4]{\frac{8BL\left(B^2+L^2\right)}{3\circledR}}, r_{my} = \sqrt[4]{\frac{16BL^3}{3\circledR}} \qquad (5.23)$$

Términos de acoplamiento $(\sim = mx, y, my, x)$:

$$K_{\sim}(\mu) = \frac{8Gr^2}{(2-\neg)}\left(k_{\sim} + ia_0 c_{\sim}\right); r = \sqrt{\frac{4BL}{\circledR}} \qquad (5.24)$$

En estas expresiones $i = \sqrt{-1}$, $k_{\sim}$ es el coeficiente de rigidez elástica adimensional, y $c_{\sim}$ es el correspondiente coeficiente de amortiguación según los valores de la frecuencia adimensional a_0 y de la relación de Poisson ν.

Para los términos de la diagonal principal de la matriz $\mathbf{K}$, $\sim = xx$ corresponde a traslación a lo largo de x, $\sim = yy$ a traslación a lo largo del eje y, $\sim = zz$ traslación a lo largo del eje z; $\sim = mx$ corresponde a balanceo alrededor del eje x, $\sim = my$ a balanceo alrededor del eje y, $\sim = mz$

balanceo alrededor del eje z, y el acoplamiento entre los desplazamientos y las rotaciones se identifican con los índices $\sim = x, my, y, my, mx, y, my, x$

5.5. Elementos de frontera para amortiguación gradual.

Este método utiliza elementos finitos convencionales para modelar un dominio ilimitado. En particular, el dominio infinito se aproxima adjuntando elementos amortiguados artificialmente fuera del área de interés en el análisis. La amortiguación estructural de los elementos agrupados se incrementa gradualmente para modelar la dispersión de la propagación de las ondas en los medios ilimitados. Por ejemplo, en el modelo axisimétrico, el medio no delimitado se trunca arbitrariamente y se divide en interno, transición y regiones gradualmente amortiguadas.

La amortiguación de los elementos en la región amortiguada se incrementa gradualmente desde el conjunto más interno al conjunto al lado del límite finito. En particular, el aumento gradual propuesto está dado por la ecuación: $\P = a_0, ^k$ Donde, $\sim_0$ es la relación de amortiguación para el primer elemento amortiguado, ¸ es un factor constante mayor que uno que controla el crecimiento de amortiguación gradual, y k = 0, 1, 2,..., n-1 con 0 correspondiente al conjunto más interno de elementos amortiguados, y n-1 hasta el último, como se muestra en la figura. Esta función exponencial asegura una tasa gradual de aumento en la amortiguación, evitando un aumento súbito de la amortiguación que, por sí solo, podría provocar el reflejo de las ondas propagadas.

En un código de computadora capaz de realizar análisis en el dominio de la frecuencia, este aumento exponencial de amortiguación se puede incluir fácilmente utilizando el módulo complejo de elasticidad:

$$E_k = E\left(1+i2\sim_0, ^k\right) \quad (5.25)$$

Los límites simples que se aproximan al semi-espacio, se pueden especificar en la forma de resortes elásticos y amortiguadores de frecuencia independientes. Los resortes están diseñados

para modelar la respuesta elástica del medio circundante, mientras que los amortiguadores están destinados para considerar la radiación de las ondas que se propagan hacia el infinito.

Una variedad de problemas dinámicos de interacción suelo-estructura que involucran fundaciones con geometrías complejas o depósitos irregulares de suelo, se analizan mediante el uso de un enfoque de isla de suelo, en que una parte del suelo que rodea la fundación se modela, por lo general de manera discreta, junto con la base y la superestructura. Este conveniente y flexible enfoque requiere de la imposición de algunas condiciones de contorno apropiadas en el límite artificial externo de la isla de suelo, para que la respuesta del modelo de suelo truncado se aproxime a la de un medio ilimitado. Mientras que los límites efectivos, no reflectantes o transmisores, han sido desarrollados para este propósito, típicamente no se usan en las etapas iniciales del desarrollo y análisis del modelo ya que estos límites especiales no se implementan en algunos de los códigos computacionales más comúnmente utilizados.

El uso de los amortiguadores de Lysmer en la frontera artificial, se ha convertido en una manera simple y efectiva de reducir las reflexiones no deseadas desde la frontera y estabilizar el modelo general en el caso dinámico. Sin embargo, pueden generarse bajas frecuencias en el modelo general si no se introducen resortes adicionales en las fronteras.

Debido a la naturaleza local de estos límites, sus capacidades de absorción de energía dependen no solo de las propiedades del material, del material sino también del contenido de frecuencia de la excitación. Estos elementos de resorte-amortiguador están unidos a los nodos de frontera de la isla de suelo. Para definir las propiedades resorte-amortiguador correspondientes a islas de suelo rectangular, [53, 54] que los coeficientes del amortiguador se determinan en términos de las propiedades del material de cada estrato de suelo. En particular, los coeficientes de amortiguamiento normal $C_n = °V_p$ y tangencial $C_t = °V_S$ son una función de la densidad $°$, de la velocidad de onda compresional V_p y la velocidad de onda de corte V_s del estrato de suelo. Mientras que los resortes están determinados en términos de las propiedades del material y la geometría de la isla del suelo. Las constantes de resorte se calculan por el siguiente conjunto de ecuaciones; donde $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, G es el módulo de corte, y ν es el de Poisson.

$$k_{xx}=\frac{2Gx}{R^2}\left[\frac{3x^2+(1-2\neg)R^2}{x^2+(3-4\neg)R^2}\right] \quad k_{xy}=\frac{2Gx}{R^2}\left[\frac{3y^2+(1-2\neg)R^2}{y^2+(3-4\neg)R^2}\right] \quad k_{xz}=\frac{2Gx}{R^2}\left[\frac{3z^2+(1-2\neg)R^2}{z^2+(3-4\neg)R^2}\right]$$

$$k_{yx}=\frac{2Gy}{R^2}\left[\frac{3x^2+(1-2\neg)R^2}{x^2+(3-4\neg)R^2}\right] \quad k_{yy}=\frac{2Gy}{R^2}\left[\frac{3y^2+(1-2\neg)R^2}{y^2+(3-4\neg)R^2}\right] \quad k_{yz}=\frac{2Gy}{R^2}\left[\frac{3z^2+(1-2\neg)R^2}{z^2+(3-4\neg)R^2}\right]$$

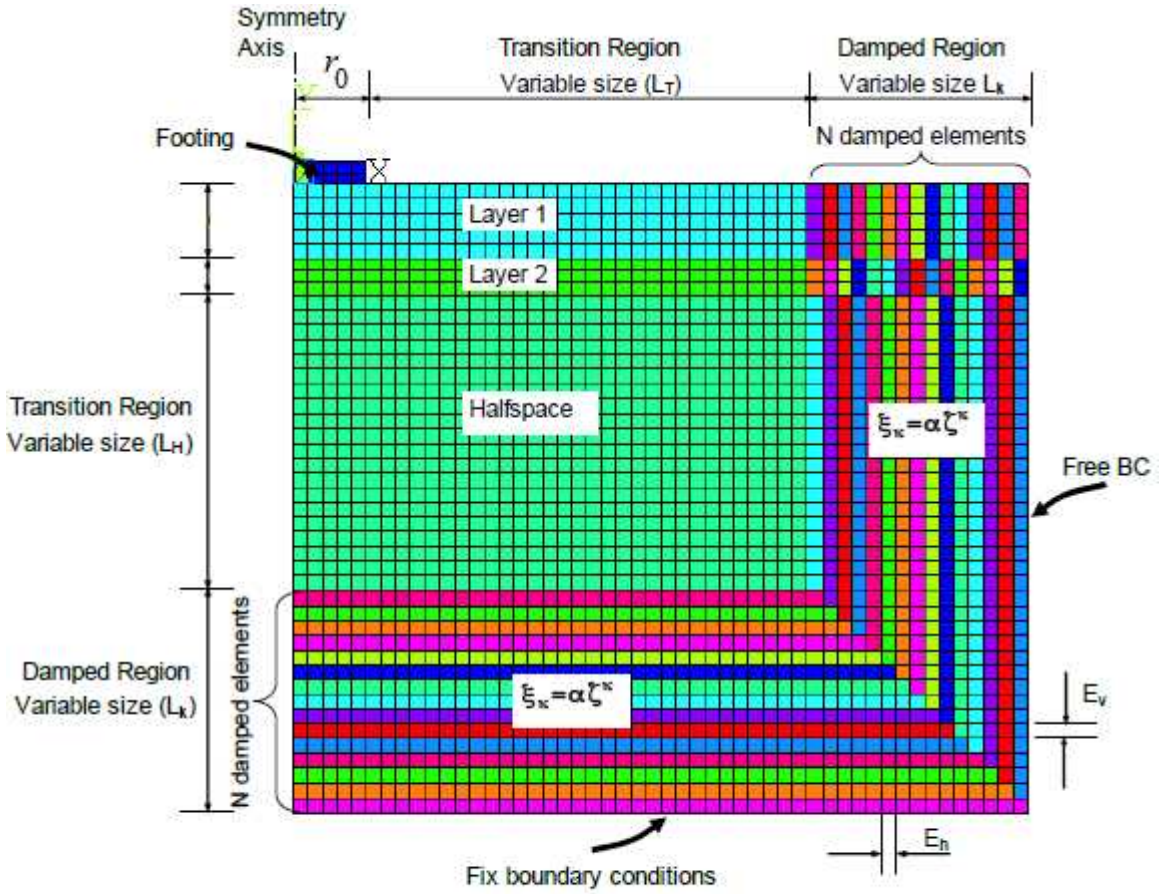
$$k_{zx}=\frac{2Gz}{R^2}\left[\frac{3x^2+(1-2\neg)R^2}{x^2+(3-4\neg)R^2}\right] \quad k_{zy}=\frac{2Gz}{R^2}\left[\frac{3y^2+(1-2\neg)R^2}{y^2+(3-4\neg)R^2}\right] \quad k_{zz}=\frac{2Gz}{R^2}\left[\frac{3z^2+(1-2\neg)R^2}{z^2+(3-4\neg)R^2}\right]$$

Las fronteras simples descritas, se pueden aplicar igualmente en el dominio de frecuencia y tiempo, y para análisis lineales y no lineales.

La precisión de una solución de elementos finitos se ven muy afectados por la calidad de la malla, o sea por el tipo de elemento, tamaño, forma y relación de aspecto, utilizados durante el escenario de modelado.

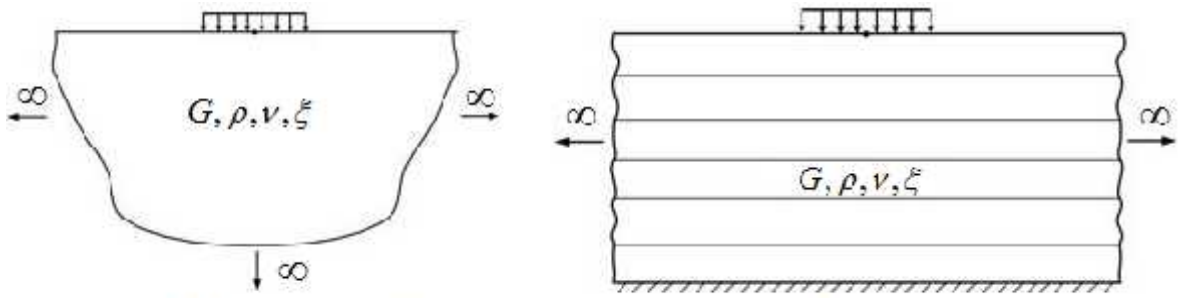
En la literatura disponible sobre el tema, se proporcionan varias recomendaciones respecto al establecimiento del tamaño del elemento para el análisis de propagación de ondas utilizando elementos finitos. El concepto general es que la malla debe ser lo suficientemente fina para resolver la propagación de la onda. En general, las recomendaciones proporcionadas en la literatura varían entre 5 y 20 elementos por longitud de onda (λ = 2πVs / ω). Por supuesto, se deben esperar mejores resultados de modelos altamente refinados; sin embargo, son computacionalmente costosos y pueden ser poco prácticos desde el punto de vista de la ingeniería.

Para definir el tamaño de la isla de suelo, se recomienda utilizar una región de transición $L_T \geq r_0$ y una región de transición $L_H \geq 4r_0$ Alternativamente, la profundidad total (H) se puede ajustar en función de la máxima longitud de onda de Rayleigh $\mathsf{a}_R \sqcup \frac{2\circledR V_s}{\mathfrak{a}_{\min}}$ recomendándose usar $H \succ 2\mathsf{a}_R$ ya que las ondas de Rayleigh casi desaparecen a esta profundidad.



Axisymmetric finite element model of a surface foundation.
Fuente: C. Coronado and N. Gidwani

En los apartados anteriores, hemos expuesto como el suelo estratificado puede ser representado mediante análisis numérico en el dominio de la frecuencia, mediante los métodos de elementos finitos (FEM), y mediante elementos de frontera (BEM), en el que se establecen límites de contorno no reflectantes, de modo que la propagación ondulatoria ocurra sin que haya ondas reflejadas.

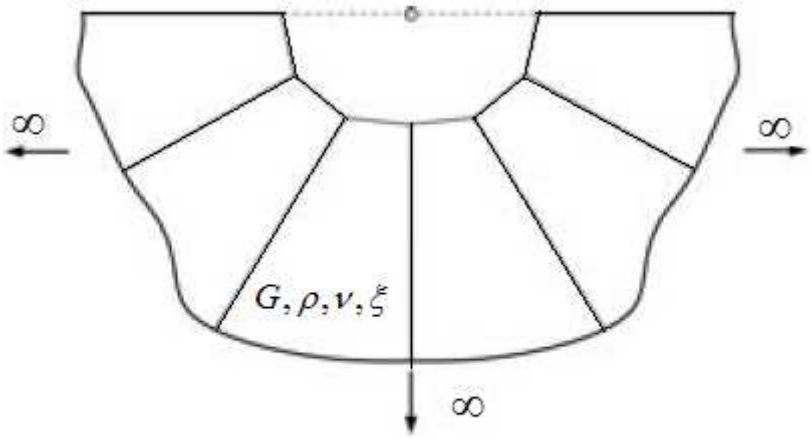


Semi-espacio elástico homogéneo

Suelo estratificado

5.6. Métodos del elemento de borde (BEM) y de elementos finitos de bordes escalados (SBFEM).

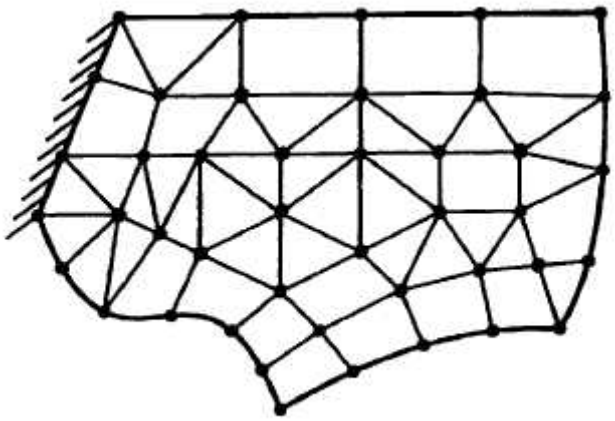
Otra opción es el método de elemento finito de límite escalado (SBFEM) para un semi-espacio elástico en el dominio de la frecuencia o del tiempo. Para este método se dispone del Software ASE / DYNA (2010).



SBFEM para un semi-espacio homogeneo
Fuente: Horst Werkle and Jadranko Volarevic

Una síntesis del método (SBFEM), puede consultarse en el Course 2.092 / 2.093 Fall Semester 2015, Massachusetts Institute of Technology M.I.T., Cambridge USA, impartido por el Dr. Sassan Mohasseb, en donde se hace la comparación de los métodos de elemento finito (FEM), del método de elementos de borde (BEM) y del método de elementos finitos de bordes escalados (SBFEM). Este es un nuevo método desarrollado en los últimos años. Wolf (2003). [55]

No se requieren soluciones fundamentales. Matrices simétricas, matrices dispersas y de bandas. Convergencia al aumentar el número de elementos.



Discretizacion espacial para el (FEM)

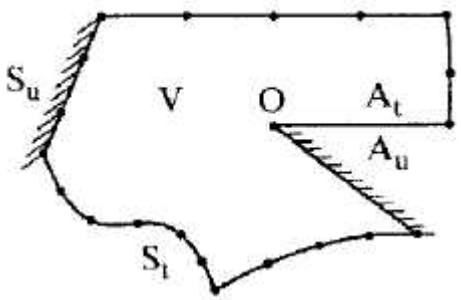
5.6 Método del elemento de frontera (BEM):

Reducción de la dimensión espacial en uno. Reducción de la preparación de datos y esfuerzos computacionales.

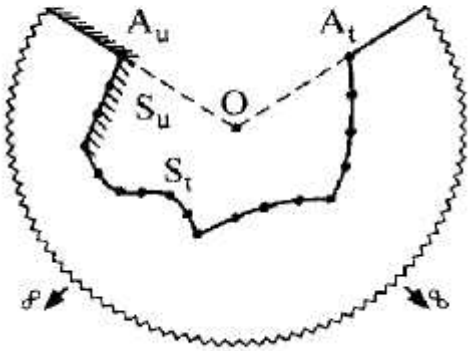
Discretizacion espacial para el (BEM)

3.14 Método del elemento finito del borde escalado (SBFEM):

Este método combina las ventajas del FEM y del BEM y reduce las ecuaciones diferenciales parciales, en ecuaciones diferenciales ordinarias. La solución analítica es en dirección radial.



Medios limitados

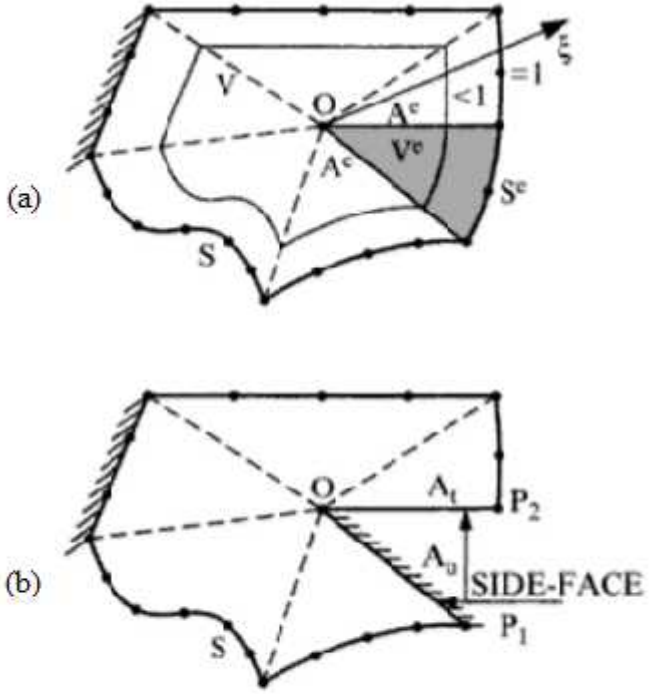


Medios ilimitados

El método (SBFEM), puede aplicarse para bordes limitados o ilimitados, tanto para problemas estáticos como dinámicos en 2D y 3D. Permite soluciones en el dominio del tiempo y de la frecuencia, mediante soluciones desarrolladas por Wolf y Song.

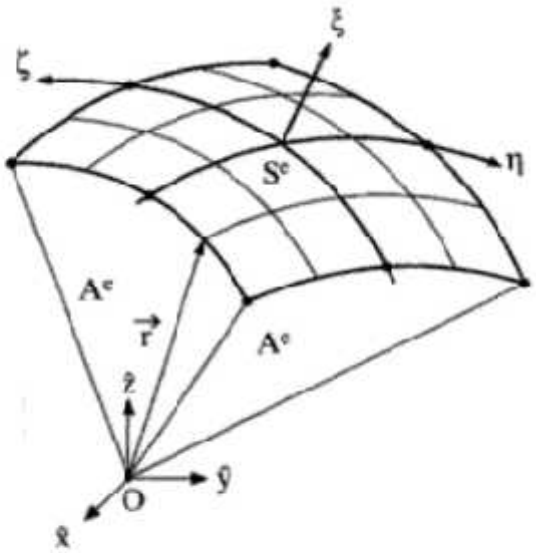
Para explicar la concepción del método del elemento finito de límite escalado, en términos general se considera un elemento tridimensional con una sección mostrada en la figura. El llamado centro de escalado O se elige preferentemente una zona en la que el límite total debe ser visible. Esto siempre se puede lograr subdividiendo el dominio total en subdominios que se pueden considerar como superelementos. Esto siempre se puede lograr subdividiendo el dominio total en subdominios que se pueden considerar como superelementos. Como ejemplo, el dominio se subdivide en dos superelementos, cada uno con su propio centro de escala. El superelemento no tiene que ser convexo. Esto crea un límite adicional común a ambos superelementos que se discretiza análogamente al resto del límite. Para un medio límite, el centro de escalamiento, en general, se ubicará dentro del dominio. Solo el límite se discretiza con elementos finitos de

superficie doblemente curvados con cualquier disposición de nodos. Este elemento finito de superficie también podría llamarse elemento finito límite escalado o elemento límite escalado.



Modelado del medio limite con sección de elementos finitos
Centro de escala: a) dentro del dominio, b) en el límite.
Wolf y Song 2000.

Conectando el borde del elemento finito de la superficie por líneas rectas al centro de la escala O, se forma la cara lateral A^e que corresponde a cualquiera de las $\xi = \pm 1$ o $\eta = \pm 1$. La cara lateral A^e y la superficie S^e definen una pirámide con el vértice en O y con volumen V.



Transformación de límite escalado de la geometría del elemento finito de la superficie que forma la pirámide. Wolf y Song 2000.

5.7. Cálculo de impedancias mediante análisis (SFSI) “Soil-Foundation-Structure-Interaction.”

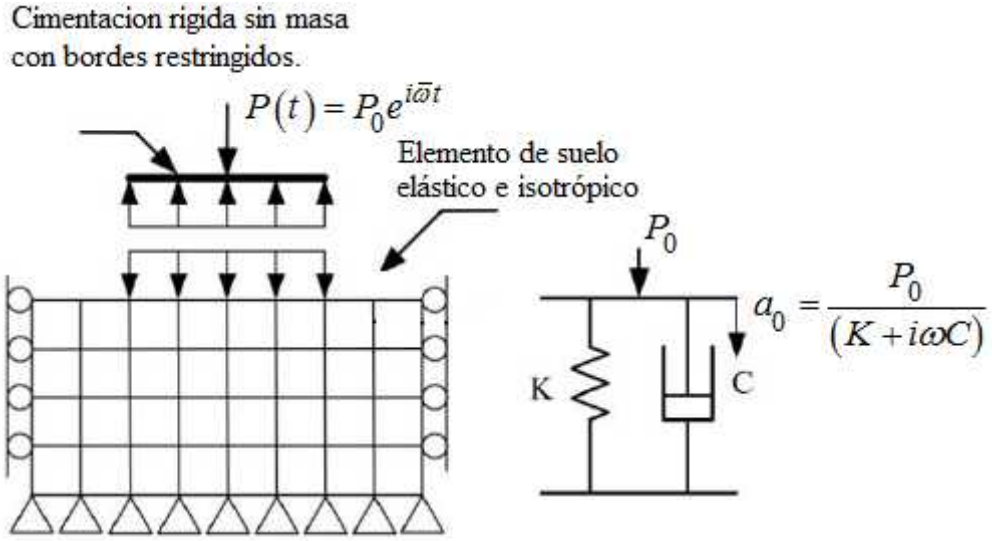
Es ampliamente reconocido que los efectos de interacción suelo-fundación-estructura (SFSI) puede ser un factor importante en la respuesta sísmica de estructuras para cimentaciones de máquinas vibratorias construidas sobre suelos blandos y deformables. Sin embargo, los difíciles procedimientos numéricos implicados en los estudios (SFSI) y una falta general de comprensión de los modelos constitutivos de los suelos son los principales obstáculos para llevar a cabo dichos análisis, tanto para cimientos superficiales como profundos. Aquí se aborda un método simplificado para el análisis (SFSI) que puede reducir considerablemente los esfuerzos de cálculo y diseño, en la determinación de los coeficientes impedancia, idealizando las tres propiedades mecánicas de un continuo mediante un resorte y un amortiguador discreto. Mediante esta idealización, el comportamiento del suelo se puede incorporar en un análisis sin elementos finitos continuos.

La filosofía central del diseño dinámico de cimentaciones, es transmitir las cargas al suelo a través del proceso interactivo suelo- cimentación. Aunque la elección y adecuación de un sistema de cimentación se rige por la deformación del suelo bajo tales cargas, a menudo se supone que dicha deformación es lo suficientemente pequeña como para producir cualquier efecto reconocible sobre la respuesta de una estructura. Esta suposición es válida cuando las estructuras se construyen sobre suelos rígidos y el movimiento de las cimentaciones es de orden insignificante. Pero cuando las estructuras se construyen sobre suelos blandos, el movimiento de las cimentaciones puede tener un efecto profundo en la respuesta de las estructuras, particularmente durante los terremotos. Las condiciones suaves del suelo no solo causan un cambio en el período de vibración natural hacia el extremo flexible del espectro y reducen el efecto de amortiguación de la radiación, sino que grandes deformaciones pueden producir niveles inaceptables de asentamientos totales y diferenciales.

En la dinámica estructural, el concepto subyacente es que cada componente tiene tres propiedades mecánicas: masa, rigidez y amortiguación, que respectivamente dan lugar a fuerzas de inercia, restauración y amortiguación. El análisis SFSI se puede ver simplemente como un análisis estructural extendido donde las tres propiedades mecánicas del suelo se incorporan en forma de elementos estructurales equivalentes. Dado que el suelo es un continuo, una elección

intuitiva para idealizar el suelo será un elemento finito continuo, en cuyo caso, las propiedades mecánicas se incorporan implícitamente a través de la formulación de elementos finitos. Sin embargo, las propiedades mecánicas también se pueden incorporar mediante resortes uniaxiales discretos mucho más simples y amortiguadores con masa agrupada. Aunque el modelado de elementos finitos permite una representación más precisa del comportamiento físico, a menudo resulta prácticamente inviable. Por el contrario, este último enfoque ofrece facilidad y flexibilidad computacional y, por lo tanto, a menudo se adopta en análisis y diseño de ingeniería convencionales.

El primer paso en el (SFSI) simplificado es idealizar las tres propiedades mecánicas de un continuo mediante un resorte discreto y un amortiguador, denominados como la impedancia.



Modelo de elemento finito y disccreto
para obtener funciones de impedancia.
Fuente: S. Das, B. A. Bradley & M. Cubrinovski 2013

Usando impedancias, el comportamiento del suelo se puede incorporar en un análisis sin elementos finitos continuos. Las fórmulas para impedancias están disponibles en la literatura. (Gazetas, 1991; Wolf y Deeks, 2004) para diversas formas de cimientos, empotramientos, perfiles de suelo y profundidad de la frontera del suelo, que cubren casi todos los ámbitos prácticos de interés. Cuando un problema particular no encaja en esos casos, se requiere un procedimiento numérico para derivar la impedancia como se describe a continuación.

Consideremos una placa rígida sin masa que cubre un volumen discreto delimitado de suelo elástico e isótropo de un semi-espacio espacio elástico. La placa está sujeta a una carga armónica transversal $P(t)=P_0 e^{i\mu t}$ de frecuencia μ. La placa es lo suficientemente rígida para no sufrir ninguna deformación por flexión con iguales desplazamientos en los nudos localizados debajo de la misma. Para modelar el suelo con extensiones laterales y verticales semi infinitas, los apoyos o las condiciones de contorno se asignan a una distancia suficiente de la placa para que su desplazamiento no se vea afectado significativamente. La ecuación de movimiento que rige viene dada por la ecuación $[m]\{\ddot{\mathbf{x}}\}+[c]\{\dot{\mathbf{x}}\}+[k]\{\mathbf{x}\}=\{\mathbf{p}\}e^{i\bar{\mu}t}$ (5.26). El vector $\{\mathbf{p}\}$ es el consistente vector de carga nodal obtenido de un esfuerzo uniforme $\pm_0 = P_0 / A$ donde A es el área de la placa. La consideración del estado de esfuerzo uniforme se justifica por la rigidez de la placa.

La solucion de la ecuación para el estado estacionario es $\{\mathbf{x}\}=\{\mathbf{a}\}e^{i\bar{\mu}t}$ cuya primera y segunda derivada permiten reescribir la ecuación de equilibrio en la forma $[K]\{\mathbf{a}\}=\{\mathbf{p}\}$

Donde

$$[K]=[k]-\bar{\mu}^2[m]+i\bar{\mu}[c] \qquad (5.27)$$

La Ec (5.27) es conocida como matriz de impedancia. La amplitud $\{a\}$ es de naturaleza compleja. Si la amplitud en el centro de la placa se puede expresar como $a_0 = G_R + iG_I$ siendo G_R y G_I los coeficientes reales e imaginarios, entonces se puede definir una impedancia escalar como $P_0 / a_0 = \bar{k} + i\bar{\mu}\bar{c}$ dónde $\bar{k}$ es la rigidez de un resorte discreto, y $\bar{c}$ es el coeficiente de amortiguamiento viscoso de un amortiguador discreto. El resorte y el amortiguador también se denominan colectivamente como parámetros agrupados

Por lo tanto, siguiendo el procedimiento anterior, las propiedades dinámicas de un medio continuo se condensan en dos propiedades cuasi cinemáticas. Ambas $\bar{k}$ y $\bar{c}$ dependen del tamaño y la forma de la placa, las propiedades del suelo y la frecuencia de excitación $\bar{\mu}$. Para el análisis numérico, la solución de la ecuación de equilibrio puede considerarse como una

armónica $P(t) = P_0 \sin \bar{\mu} t$, la que es de la forma $x = a_0 \sin(\bar{\mu} t - \ddot{})$ siendo $G_R = a_0 \cos \ddot{}$ y $G_I = a_0 \sin \ddot{}$

La tabla mostrada a continuación, tomada de Gazetas (1991) para modos de vibración vertical, horizontal y oscilante, proporciona un conjunto de fórmulas para obtener impedancias de una cimentación cuadrada en un semi-espacio homogéneo, El parámetro adimensional $\bar{\mu} B / V_s$ controla las funciones que son los factores de modificación dinámica de los términos respectivos; la respuesta dinámica aumenta con este parámetro, ya que el valor cero es equivalente al comportamiento estático y la solución de la ecuación de equilibrio es simple. Una vez que las impedancias se obtienen de forma numérica o de las soluciones analíticas disponibles, el análisis interactivo suelo-cimentación se simplifica enormemente para los propósitos prácticos.

$$G = \circ V_s^2 \quad V_{La} = \frac{3.4}{\circledR (1 - \neg)} V_s \qquad (5.28)$$

$$k_v = \frac{4.54 GB}{(1-\neg)} f_{kv}\left(\frac{L}{B}, \neg, \frac{\bar{\mu} B}{V_s}\right) \quad k_h = \frac{9GB}{(2-\neg)} f_{kh}\left(\frac{L}{B}, \neg, \frac{\bar{\mu} B}{V_s}\right) \quad k_r = \frac{3.6 GB^3}{(2-\neg)} f_{kr}\left(\frac{L}{B}, \neg, \frac{\bar{\mu} B}{V_s}\right) \quad (5.29)$$

$$c_v{}^R = \circ V_{La} A_b f_{cv}\left(\frac{L}{B}, \neg, \frac{\bar{\mu} B}{V_s}\right) \quad c_h{}^R = \circ V_s A_b f_{ch}\left(\frac{L}{B}, \neg, \frac{\bar{\mu} B}{V_s}\right) \quad c_r{}^R = \circ V_{La} I f_{cr}\left(\frac{L}{B}, \neg, \frac{\bar{\mu} B}{V_s}\right) \quad (5.30)$$

$$c_v = c_v{}^R + \frac{2k_v}{\bar{\mu}} \P_h \quad c_h = c_h{}^R + \frac{2k_h}{\bar{\mu}} \P_h \quad c_r = c_r{}^R + \frac{2k_r}{\bar{\mu}} \P_h$$

(5.31)

Table 2.2 Partial List of Journals that Provide Generated Impedance Functions

Reference	Geometry of Foundation and Soil Layers
(Wong & Luco, 1985)	Square Foundations on Layered Media
(Mita & Luco, 1989)	Square Foundation Embedded in an Elastic Half-Space
(Bu, 1998)	Square Foundations Embedded in an Incompressible Half-Space
(Ahmad & Rupani, 1999) (Vrettos, 1999)	Square Foundation in Layered Soil Rigid Rectangular Foundations on Soils with Bounded Non-Homogeneity
(Andersen & Clausen, 2008)	Surface Footings on Layered Ground
(Okyay et al., 2012)	Slab Foundations with Rigid Piles
(Padrón, Aznárez, Maeso, & Santana, 2010)	Deep Foundations with Inclined Piles
(Rajapakse & Shah, 1988)	Embedded Rigid Strip Foundations
(Lin, 1978) (Pradhan, Baidya, & Ghosh, 2003)	Circular Plates Resting on Viscoelastic Half Space Circular Foundation Resting on Layered Soil
(Barros, 2006)	Rigid Cylindrical Foundations Embedded in Transversely Isotropic Soils
(Liou & Chung, 2009)	Circular Foundation Embedded in Layered Medium
(Hatzikonstantinou et al, 1989)	Arbitrarily Shaped Embedded Foundations

6. RESPUESTA DE SISTEMAS SDOF A FUERZAS ARMÓNICAS.

6.1. Introducción.

Cuando un sistema dinámico está sujeto a un régimen de forzamiento armónico simple con frecuencia de forzado ω, inicialmente responden con la combinación de una respuesta transitoria con frecuencia μ_d y una respuesta de estado estacionario con una frecuencia ω. La respuesta del estado transitorio decae con el tiempo, prevaleciendo la respuesta de estado estacionario, cuya frecuencia ω es igual a la frecuencia de la fuente externa de perturbación armónica.

En términos genéricos, el equilibrio dinámico del sistema SDOF masa-resorte-amortiguador, se expresa mediante la Ec. (6.1)

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=f(t) \qquad (6.1)$$

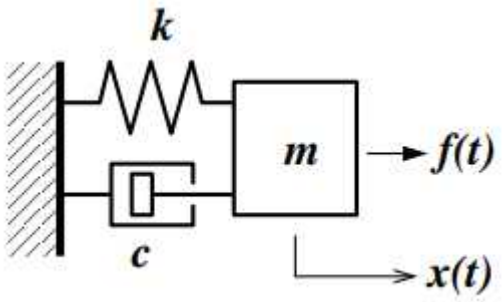
Examinaremos tres posibles maneras de aplicar el forzado:

6.2. Forzado aplicando directamente la fuente de excitación a la masa.

Si la excitación es una fuerza aplicada a la masa del sistema como se muestra en la figura, el resultado se puede expresar en términos de (a) la amplitud del movimiento resultante de la masa o (b) la fracción de la amplitud de la fuerza aplicada que se transmite a través del sistema para el soporte. El primero se denomina la respuesta del movimiento y el último se denomina transmisibilidad de la fuerza. Estos casos son muy frecuentes en la práctica de la ingeniería estructural, en instalaciones civiles e industriales, en las que algunas maquinarias y equipos transmiten vibraciones directamente a las edificaciones o a los soportes.

La ecuación diferencial (6.1) rige el movimiento de un sistema con un grado de libertad con amortiguamiento viscoso, cuando la fuerza de excitación armónica $f(t)=F_0\sin\mu t$ es aplicada directamente a la masa.

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F_0\sin\mu t \qquad (6.1a)$$



Si el sistema SDOF se fuerza dinámicamente con una función de forzado sinusoidal, $F_0\cos\mu t$ o bien $F_0\sin\mu t$ donde ω es la frecuencia del forzamiento en radianes por segundo. Si $F_0\cos\mu t$ es persistente, luego de varios ciclos el sistema responderá solo a la frecuencia del forzamiento externo ω.

Se puede describir una oscilación, $x(t)$ con amplitud $\bar{X}$ y frecuencia ω mediante funciones sinusoidales. Estas funciones sinusoidales pueden ser escritas en términos equivalentes de exponenciales complejas $e^{\pm i\mu t}$ con coeficientes complejos $X=A+iB$ y su conjugado $X^*=A-iB$ Además, la relación b / a proporciona una ecuación para el desfase θ.

$$\tan^{-} = b/a \qquad (6.2)$$

Admitiendo que la respuesta del estado estacionario es descrita por la función (6.3)

$$x(t)=\bar{X}\cos(\mu t+^{-})=a\cos\mu t+b\sin\mu t=Xe^{i\mu t}+X^*e^{-i\mu t} \qquad (6.3)$$

Entonces $$\dot{x}(t) = \mu\left(-a\sin\mu t + b\cos\mu t\right) \qquad (6.4)$$

Y $$\ddot{x}(t) = \mu^2\left(-a\cos\mu t - b\sin\mu t\right) \qquad (6.5)$$

Sustituyendo estas tres ecuaciones en la Ec. (3.1) se obtiene:

$$m\mu^2\left(-a\cos\mu t - b\sin\mu t\right) + c\mu\left(-a\sin\mu t + b\cos\mu t\right) + k\left(a\cos\mu t + b\sin\mu t\right) = F_0\cos\mu t \qquad (6.6)$$

Igualando los términos de senos y cosenos, se obtiene un conjunto de dos ecuaciones para las dos constantes desconocidas a y b.

$$\begin{aligned}\left(-m\mu^2 a + c\mu b + ka\right)\cos\mu t &= F_0\cos\mu t \\ \left(-m\mu^2 b + c\mu a + kb\right)\sin\mu t &= 0\end{aligned} \qquad (6.7)$$

$$\begin{bmatrix} k - m\mu^2 & c\mu \\ -c\mu & k - m\mu^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.8)$$

Cuya solucion es:

$$a(\mu) = \frac{k - m\mu^2}{\left(k - m\mu^2\right)^2 + \left(c\mu\right)^2}F_0 \qquad (6.9)$$

$$b(\mu) = \frac{c\mu}{\left(k - m\mu^2\right)^2 + \left(c\mu\right)^2}F_0 \qquad (6.10)$$

Con estos resultados, las Ecs. (6.2) y (6.3) pueden escribirse de la siguiente manera:

$$x(t) = a(\mu)\cos\mu t + b(\mu)\sin\mu t = \bar{X}(\mu)\cos\left[\mu t + {}^{-}(\mu)\right] \quad (6.11)$$

$$\tan^{-}(\mu) = -\frac{b(\mu)}{a(\mu)} = -\frac{c\mu}{k - m\mu^2} \quad (6.12)$$

Se observa que $-® \prec {}^{-}(\mu) \prec 0$ para todos los valores positivos de ω, lo que significa que la respuesta de desplazamiento $x(t)$ siempre retarda el forzamiento externo $F_0\cos\mu t$ La relación de la amplitud de respuesta $\bar{X}(\mu)$ a la amplitud de forzamiento F_0 es:

$$\frac{\bar{X}(\mu)}{F_0} = \frac{\sqrt{a^2(\mu) + b^2(\mu)}}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(k - m\mu^2\right)^2 + (c\mu)^2}} \quad (6.13)$$

La Ec. (6.13) muestra cómo la amplitud de respuesta $\bar{X}$ depende de la amplitud F_0 y de la frecuencia del forzamiento ω, y tiene unidades de

.

Derivando esta expresión y usando notación exponencial compleja las ecuaciones del movimiento son:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F_0\cos\mu t = F(\mu)e^{i\mu t} + F^*(\mu)e^{-i\mu t} \quad (6.14)$$

En una solución de la forma, $x(t) = X(\mu)e^{i\mu t} + X^*(\mu)e^{-i\mu t}$ $X(\mu)$ corresponde a los exponentes positivos (frecuencias positivas) y $X^*(\mu)$ corresponde a exponentes negativos (frecuencias negativas). Los coeficientes del exponente positivo y los coeficientes del exponente negativo son independientes y pueden encontrarse por separado. Considerando la solución del exponente positivo, el forzamiento se expresa como $F(\mu)\cos\mu t$ y la solucion parcial $X(\mu)e^{i\mu t}$. Sustituyendo estos valores en la Ec. (4.14) del movimiento forzado, se obtiene:

$$\left(-m\mu^2 + ci\mu + k\right)X(\mu)e^{i\mu t} = F(\mu)\cos\mu t \quad (6.15)$$

A partir de la ecuación (6.15) se puede escribir:

$$\frac{X(\mu)}{F(\mu)} = \frac{1}{\sqrt{\left(k - m\mu^2\right) + i\left(c\mu\right)}} \quad (6.16)$$

Que es de valor complejo. Esta función compleja tiene una magnitud:

$$\left|\frac{X(\mu)}{F(\mu)}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(k - m\mu^2\right)^2 + \left(c\mu\right)^2}} \quad (6.17)$$

La ecuación (6.17) es la misma Ec. (13) pero derivada usando $e^{i\mu t}$

La Ec. (6.16) se puede escribir en términos de las variables dinámicas frecuencia natural μ_n y porcentaje de amortiguamiento crítico ζ. Dividiendo el numerador y el denominador de la Ec. (6.13) por k, y teniendo en cuenta que F / k es un desplazamiento estático x_{st} se obtiene:

$$\frac{X(\mu)}{F(\mu)} = \frac{1/k}{\sqrt{\left(k - \frac{m}{k}\mu^2\right)^2 + i\left(\frac{c}{k}\mu\right)^2}} \qquad (6.18)$$

$$X(\mu) = \frac{F(\mu)/k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu_n}\right)^2\right] + i\left(2, \frac{\mu}{\mu_n}\right)}} \qquad (6.19)$$

$$\frac{X(\Omega)}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \Omega^2\right] + i(2, \Omega)}} \qquad (6.20)$$

$$\frac{\bar{X}(\Omega)}{x_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \Omega^2\right)^2 + i(2, \Omega)^2}} \qquad (6.21)$$

Donde Ω es la relación de la frecuencia del forzado a la frecuencia natural $\Omega = \mu / \mu_n$. Esta ecuación se llama factor de amplificación dinámica (DAF). Es el factor por el cual las respuestas de desplazamiento se amplifican debido a que el forzamiento externo es dinámico y no estático.

En resumen, la respuesta de estado estacionario de un oscilador simple directamente excitado por una fuerza armónica, $f(t) = F_0 \cos \mu t$ se puede expresar en la forma de la Ec. (4.3)

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2 + i\left(2,\Omega\right)^2}}\cos\left(\mu t + {}^{-}\right) \\ \tan^{-} &= -\frac{2,\Omega}{1-\Omega^2} \end{aligned}\right\} \qquad (6.22)$$

O bien por su equivalente:

$$x(t) = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\Omega^2\right)^2 + i\left(2,\Omega\right)^2}}\left[\left(1-\Omega^2\right)\cos\mu t + \left(2,\Omega\right)\sin\mu t\right] \qquad (6.23)$$

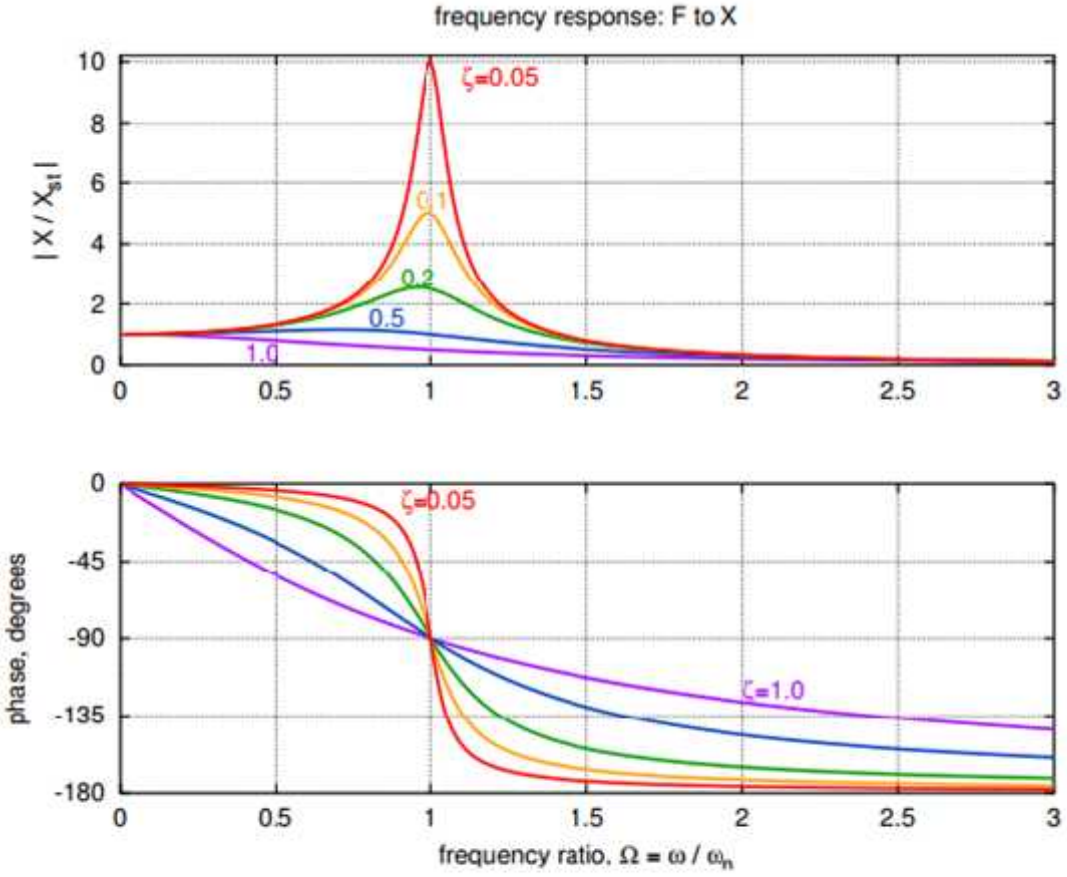


Fig (6.1): The dynamic amplification factor for external forcing, $\bar{X}/x_{\rm st}$, equation (6.20)

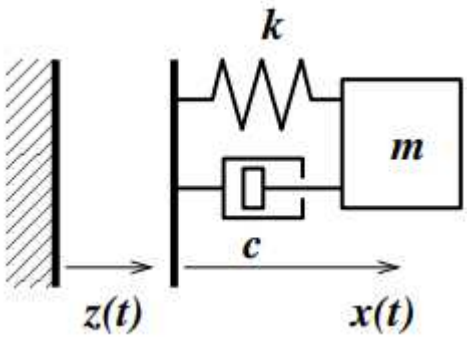
Tomado de: Henri P. Gavin: Vibrations of Single Degree of Freedom Systems. Fall 2016.

6.3. Forzado inercial debido al movimiento del terreno.

Existen casos en donde la cimentación de la estructura por efecto de movimientos sísmicos, explosiones, o vibraciones de maquinarias, está sujeta a movimientos del terreno que varían con el tiempo, los que inducen en la estructura fuerzas de naturaleza inercial. Para tales casos, los movimientos del suelo deben ser considerados en el análisis de la respuesta dinámica. Si la excitación es un movimiento de la base, la respuesta resultante generalmente es expresada en términos de la amplitud del movimiento de la masa relativa a la amplitud del movimiento de la base. Esto se denomina transmisión de movimiento para el sistema.

La fuerza inercial inducida para el caso de movimiento sísmico, de acuerdo con la segunda ley de Newton, es el producto de la masa de la estructura m por la aceleración del terreno $\ddot{z}(t)$:

$$f(t) = -m\ddot{z}(t)$$



$$m\left[\ddot{x}(t) + \ddot{z}(t)\right] + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0 \qquad (6.24)$$

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{z}(t) \qquad (6.25)$$

$$\ddot{x}(t) + 2,\mu_n \dot{x}(t) + \mu_n{}^2 x(t) = -\ddot{z}(t) \qquad (6.26)$$

Se observa que la Ec. (6.26) es independiente de la masa. Sistemas con diferentes masas pero con la misma frecuencia natural μ_n y relación de amortiguación s tienen el mismo comportamiento y responden exactamente de la misma manera al mismo movimiento del soporte.

Si los desplazamientos del suelo son sinusoidales $z(t)=\bar{Z}\cos\mu t$, entonces la aceleración del suelo es $\ddot{z}(t)=-\bar{Z}\mu^2\cos\mu t$, y $f(t)=m\bar{Z}\mu^2\cos\mu t$. Utilizando la formulación exponencial compleja, podemos encontrar la respuesta de estado estacionario como una función de la frecuencia ω del movimiento del suelo.

$$m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=m\bar{Z}\mu^2\cos\mu t=mZ(\mu)\mu^2e^{i\mu t}+mZ^*(\mu)\mu^2e^{-i\mu t} \qquad (6.27)$$

La respuesta de estado estacionario se puede expresar como la suma independiente de las exponenciales complejas $x(t)=X(\mu)e^{i\mu t}+X^*(\mu)e^{-i\mu t}$ Las partes positiva y negativa del exponencial son independientes y pueden analizarse por separado.

Para una excitación persistente e ignorando la respuesta del estado transitorio, la respuesta para el exponencial positivo del estado estacionario será armónica. Considerando la parte de exponencial positivo del forzamiento $mZ(\mu)\mu^2e^{i\mu t}$ la respuesta de estado estacionario tendrá la forma $Xe^{i\mu t}$. Sustituyendo estas expresiones en la ecuación diferencial (4.27), la función de respuesta de frecuencia es:

$$\frac{X(\mu)}{Z(\mu)}=\frac{m\mu^2}{\left(k-m\mu^2\right)+i(c\mu)}=\frac{\Omega^2}{\left(1-\Omega^2\right)+i\left(2,\Omega\right)} \qquad (6.28)$$

Donde $\Omega=\mu/\mu_n$ y

$$\left|\frac{X(\mu)}{Z(\mu)}\right| = \frac{\Omega^2}{\left(1-\Omega^2\right)^2 + i\left(2,\Omega\right)^2} \qquad (6.29)$$

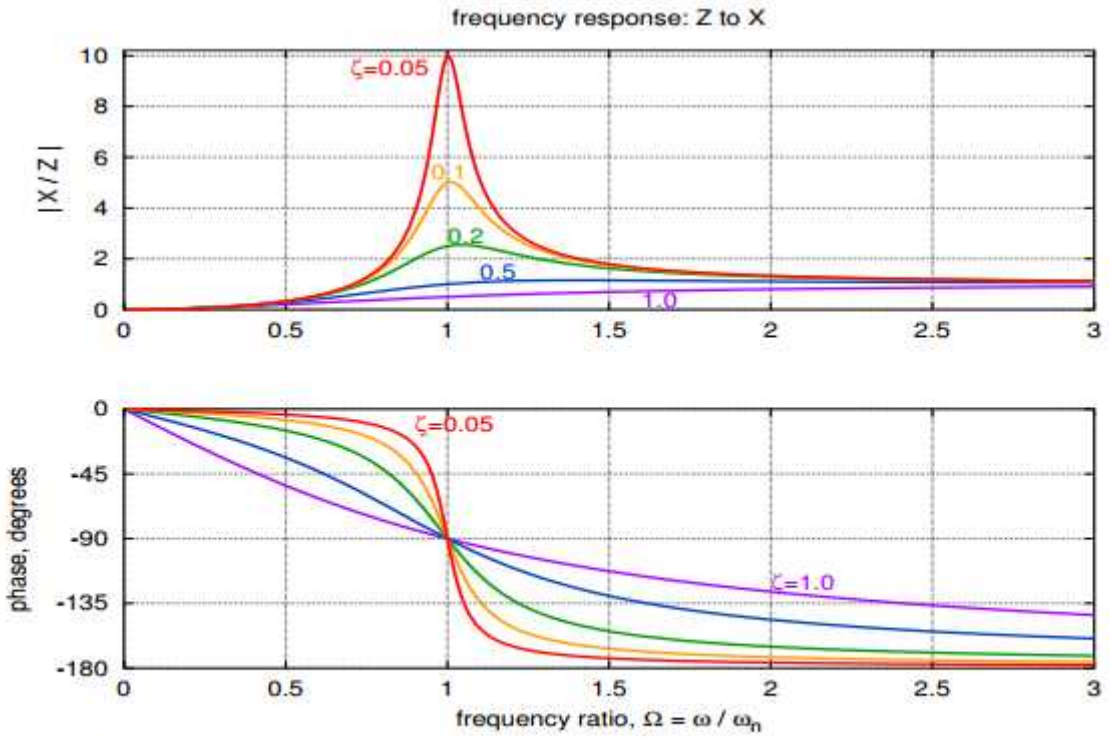


Fig (6.2): The dynamic amplification factor for base-excitation, $\bar{X}/\bar{Z}$, equation (6.28)

Tomado de: Henri P. Gavin: Vibrations of Single Degree of Freedom Systems. Fall 2016.

Finalmente, consideremos el movimiento de la masa con respecto a un punto. Esto se llama movimiento total y es la suma del movimiento de la base más el movimiento relativo a la base $z(t)+x(t)$.

$$\frac{X+Z}{Z} = \frac{X}{Z}+1 = \frac{\left(1-\Omega^2\right)+i\left(2,\Omega\right)+\Omega^2}{\left(1-\Omega^2\right)+i\left(2,\Omega\right)} = \frac{1+\left(2,\Omega\right)}{\left(1-\Omega^2\right)+i\left(2,\Omega\right)} \qquad (6.30)$$

La función expresada mediante la Ec. (6.30) se denomina relación de transmisibilidad, $Tr(\Omega,\zeta)$ y determina la relación entre la amplitud de respuesta total $\overline{X}+\overline{Z}$ y el movimiento de la base $\overline{Z}$.

$$\left|\frac{X+Z}{Z}\right| = \frac{\sqrt{1+(2\zeta\Omega)^2}}{\left(1-\Omega^2\right)^2+i(2\zeta\Omega)^2} = Tr(\Omega,\zeta) \qquad (6.31)$$

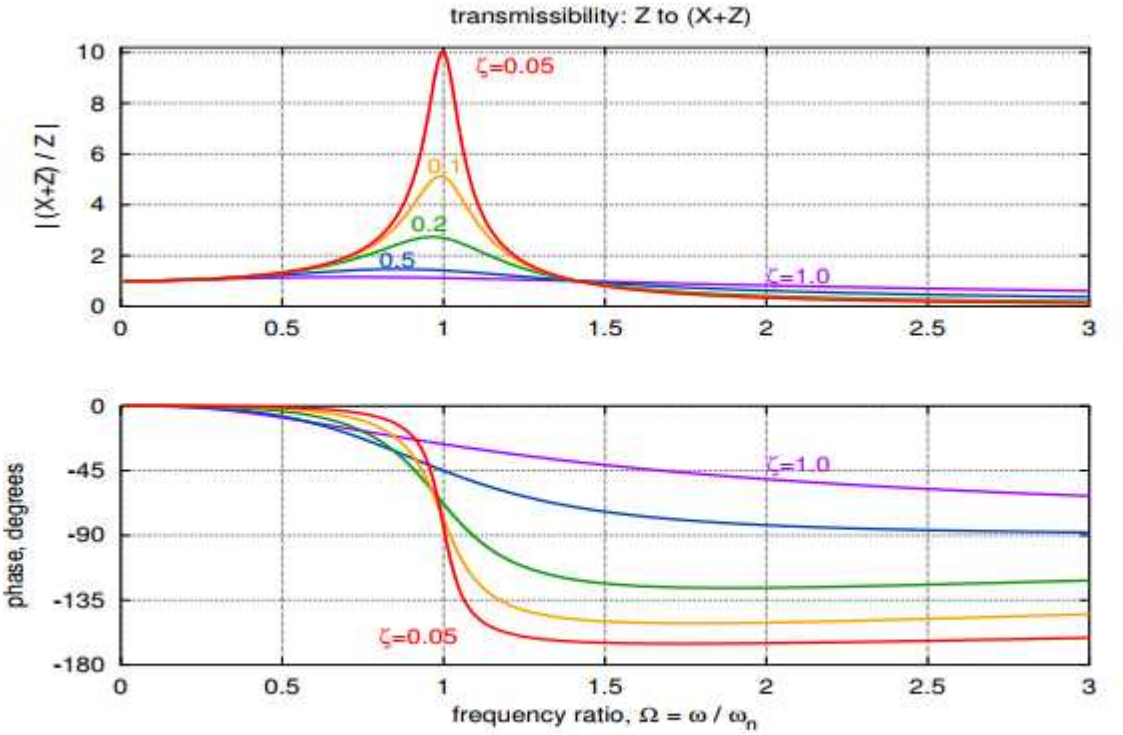


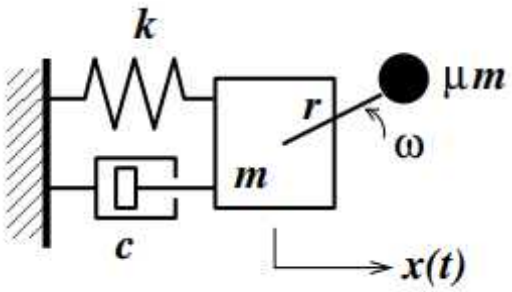
Fig (6.3): The transmissibility ratio $|(X+Z)/Z| = \mathrm{Tr}(\Omega,\zeta)$, equation (6.30)

Tomado de: Henri P. Gavin: Vibrations of Single Degree of Freedom Systems. Fall 2016.

Para sistemas que tienen un período natural más largo que el período del movimiento del soporte, ($\Omega \succ \sqrt{2}$) la relación de transmisibilidad es menor que 1, especialmente para valores bajos de la amortiguación ζ. En tales sistemas el movimiento de la masa es menor que el movimiento de los soportes y se dice que la masa está aislada del movimiento de los soportes.

6.4. Forzado debido a una masa excéntrica giratoria.

Otro tipo de forzamiento sinusoidal que es importante para la vibración inducida por las máquinas se origina en la rotación de una masa excéntrica. Considérese el sistema mostrado en la figura en el que una masa $«m$ está unida a la masa primaria m a través de un enlace rígido de longitud r y gira a una velocidad angular ω. Para el análisis de este sistema simple de un grado de libertad, el movimiento de la masa primaria se ve obligado a permanecer junto a la coordenada x y el forzamiento de interés es el componente x de la fuerza centrífuga reactiva. Este componente es $«mr\mu^2 \cos(\mu t)$ donde μt es el ángulo en sentido anti horario desde la coordenada x.



La ecuación del movimiento para esta fuerza es:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = «mr\mu^2 \cos(\mu t) \qquad (6.32)$$

Esta expresión es simplemente análoga a la ecuación (4.14) en la que $F_0 = «mr\mu^2$ Con algunas sustituciones, se encuentra que la función de respuesta de frecuencia es análoga a la Ec. (6.28):

$$\frac{X}{r} = \frac{«\Omega^2}{\left(1-\Omega^2\right)+i\left(2¸\Omega\right)} \qquad (6.33)$$

El gráfico de la función de respuesta de frecuencia de la Ec. (6.33) es proporcional a la función trazada para la Ec. (6.28). La magnitud de la fuerza dinámica transmitida entre una máquina soportada en resortes amortiguados y la base $\left|fT\right|$ es la suma de las fuerzas en los resortes y en los amortiguadores. La relación de la fuerza transmitida a la fuerza generada por la masa excéntrica, $«mr\mu^2$ es la relación de transmisibilidad (6.30).

$$\frac{\left|fT\right|}{«mr\mu^2} = \Omega^2 Tr\left(\Omega,¸\right) \qquad (6.34)$$

Debe considerarse, que el denominador $«mr\mu^2$ aumenta con μ^2 y la amplitud de la fuerza transmitida aumenta con $«\mu^2 Tr\left(\Omega,¸\right)$. Multiplicando ambos lados de la ecuación (6.34) por Ω^2 obtenemos la relación de transmisión.

$$\frac{\left|fT\right|}{«mr\mu_n^2} = \Omega^2 Tr\left(\Omega,¸\right) \qquad (6.35)$$

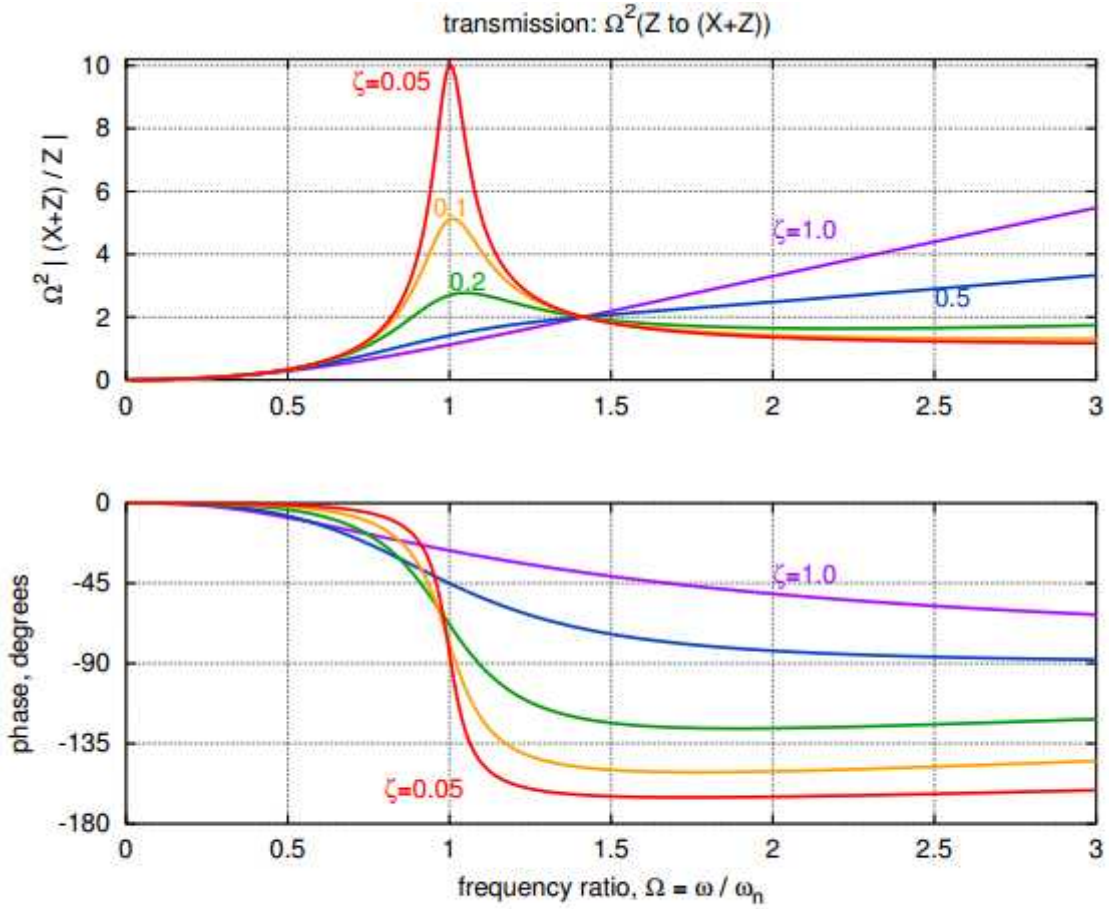


Fig (6.4): The transmission ratio $\Omega^2 Tr(\Omega, \zeta)$, equation (6.35)

Tomado de: Henri P. Gavin: Vibrations of Single Degree of Freedom systems. Fall 2016.

A diferencia de la relación de transmisibilidad, que se acerca asintóticamente a 0 al incrementarse Ω, la fuerza vibratoria transmitida desde una excitación de masa excéntrica es 0 cuando Ω = 0 pero aumenta con Ω para $\Omega \succ \sqrt{2}$ El efecto de este aumento es significativo para ζ > 0.2, como se muestra en el gráfico (4.4) de la ecuación (6.35). Para relaciones de alta frecuencia $\left(\mu_n \prec \mu / 2\right)$ y bajas relaciones de amortiguamiento (ζ < 0.2), la fuerza transmitida por la maquinaria giratoria al piso (| fT |) es menos de la mitad de la fuerza generado por la maquinaria $\left(\ll mr\mu^2\right)$ Además, para ζ ≈ 0.2, el valor de la fuerza transmitida es bruscamente independiente de la frecuencia de forzamiento.

6.5. Efecto resonante.

La forma más simple de describir la resonancia es la amplificación de la vibración. La vibración que se amplifica podría provenir de varias fuentes: desequilibrio, desalineación, o cualquier fuente de vibración que pueda causar resonancia. Toda estructura mecánica resuena a múltiples frecuencias si se excita en sus frecuencias naturales. Toda la maquinaria giratoria y su estructura de soporte tienen estas frecuencias naturales. En un mundo ideal, las frecuencias naturales de la máquina y su estructura de soporte no serían las mismas que las frecuencias generadas por la máquina. Pero ese no es el caso. Puede pensarse que es poco probable que la vibración de la máquina coincida exactamente con estas frecuencias naturales. No es necesario que coincidan exactamente; solo necesitan estar dentro de aproximadamente el 20 por ciento.

Si la fuente de vibración es baja en amplitud, la vibración amplificada resultante no será tan alta como si la vibración de la fuente fuera mayor, y hará menos daño. Cuanto más cerca esté la frecuencia de la vibración de la fuente a la frecuencia natural real, la amplificación será de nuevo más alta. Estos dos hechos son las claves para lidiar con la resonancia.

Las condiciones locales del suelo juegan un papel importante en el desarrollo de las vibraciones del terreno transmitidas por cimentaciones de máquinas vibratorias. Las respuestas dinámicas de un determinado perfil de suelo afectan predominantemente a las frecuencias naturales de las vibraciones de la cimentación. Por ello es necesario estimar la frecuencia natural de vibraciones verticales amortiguadas de cimentaciones que se construirán en un sitio específico para máquinas sujetas a cargas dinámicas y establecer la relación entre las frecuencias de la cimentación y las frecuencias naturales de los perfiles del suelo en los sitios de construcción. Las condiciones del suelo en un sitio son determinantes para la transmisión ondulatoria de excitaciones debidas a máquinas apoyadas sobre fundaciones que inducen vibraciones.

En muchas máquinas, especialmente en las grandes, las condiciones del suelo y la cimentación son fundamentales para determinar un comportamiento dinámico exitoso. Es bien sabido que las frecuencias naturales de una fundación son parámetros dominantes en el diseño y especificación de cimientos para maquinaria sujetas a cargas dinámicas. El conocimiento de los valores confiables de las frecuencias naturales permite cálculos más precisos para determinar las

amplitudes de vibración, y habilita a los ingenieros para evitar las condiciones de resonancia debidas a vibraciones de la cimentación. La frecuencia natural de las cimentaciones se puede calcular en base de las características dinámicas de masa, rigidez y amortiguación del sistema suelo-cimiento. Sobre la naturaleza de estas características no existe una opinión generalizada, sin embargo, han sido realizados muchos enfoques teóricos y experimentales para la determinación de las características del sistema suelo -cimiento, como los debidos a Barkan (1962), Richart et al. (1970) y Gazetas (1994), pero la aplicación de los diversos métodos a menudo no conducen a resultados consistentes.

Los métodos se basan en la relación entre las mediciones de las frecuencias naturales de vibración de la cimentación y las frecuencias naturales del perfil del suelo en los sitios de construcción. [66]

El sistema suelo-cimentación de las máquinas consiste en dos componentes: la cimentación instalada en el suelo y el medio del suelo a través del cual las ondas se propagan desde una fuente de perturbación dinámica. El perfil del suelo en el sitio, afecta considerablemente el régimen vibratorio de las cimentaciones de las máquinas. Por lo tanto, la mayoría de los métodos analíticos actualmente utilizados en la evaluación de las vibraciones de las cimentaciones requieren de resultados de pruebas dinámicas del suelo in situ y / o de laboratorio. Existen diferentes técnicas para la evaluación de las propiedades y el comportamiento dinámico del suelo mediante ensayes de laboratorio y pruebas de campo. Sayes, Woods y Stokoe (1985).

Hasta hace poco, solo se ha dedicado un estudio limitado al comportamiento del suelo bajo influencias dinámicas. Los sismólogos y los geofísicos se preocupan principalmente por los movimientos del terreno relativamente alejado de la fuente de perturbación; para estudiar las vibraciones debidas a perturbaciones inducidas por maquinarias vibratorias, es necesario conocer el comportamiento del suelo en la fuente. De 1928 a 1939 la Degebo: Deutsche Gesellschaft für Bodenmechanik (Sociedad Alemana de Mecánica de Suelos) y la Universidad de Göttingen en Alemania, usando osciladores controlados, examinaron ampliamente la frecuencia natural de vibración peculiar de los sitios correspondientes a diversos tipos de suelo; muchos de sus resultados han sido comprobados desde entonces mediante los estudios realizados por Andrews y Crockett (1945) que descubrieron de forma independiente los mismos fenómenos, a través de la resonancia entre máquinas industriales y el terreno adyacente.

Mediante los trabajos realizados por la Sociedad Alemana de Mecánica de Suelos (Degebo) (1936), Lamb (1904), Leet (1946), Rayleigh (1885), Sezawa y Kanai (1937) ha sido tratado el tema de las auto-frecuencias del suelo; determinándose que éstas son función de las propiedades físicas del material, y del espesor de los estratos inmediatamente adyacentes al lugar de la perturbación. El valor soporte del suelo es también directamente relacionado con la frecuencia natural.

Los estudios de las vibraciones del suelo inducidas por un vibrador instalado en el suelo, revelaron que las vibraciones del suelo tenían varios máximos además del máximo maximorum, correspondiente al máximo en la curva de resonancia de la fuente de la onda, debidas a las vibraciones forzadas, Kijhler (1932) y Barkan (1962). Estos máximos adicionales se explicaron por los fenómenos de interferencia de ondas y coincidencias de la frecuencia natural de las vibraciones del estrato de suelo y la frecuencia de las ondas que se propagan.

El período fundamental del perfil del suelo se usa para resolver problemas geotécnicos de vibración. Observaciones y estudios han indicado que las vibraciones de las cimentaciones inducidas por máquinas, pueden ser aumentadas a frecuencias operativas por debajo de la frecuencia natural del perfil del suelo, Singh y Nagral (1993). Además, se estableció que el daño excesivo debido a los terremotos ocurre cuando la frecuencia fundamental del perfil del suelo es cercana al de las estructuras, Dobry et al. (1976) y Roesset (1977).

Para los efectos del análisis, el sistema máquina-cimentación-suelo, está representado por un modelo matemático con el objetivo básico de que el mismo sea compatible con el prototipo. Para cada representación matemática, se hacen diversas suposiciones y aproximaciones. La extensión de la complejidad introducida en el modelo matemático influye directamente en la fiabilidad de los resultados. En adición, las simplificaciones y aproximaciones también se introducen para cumplir con las limitaciones de las herramientas analíticas. En otras palabras, la representación matemática no solo depende de los parámetros de la máquina, la cimentación, y el suelo, sino también de los recursos disponibles para el análisis. [67]

El diseñador de cimentaciones para cargas dinámicas, debe entender claramente que las suposiciones, aproximaciones y simplificaciones hechas durante el modelado tienen influencia en la respuesta. Es este aspecto el que hace del modelado y el análisis una parte muy importante del diseño.

El esquema de la Fig (6.5), ilustra el proceso de prueba y error que debe seguirse en el proceso de diseño de las cimentaciones para garantizar que las relaciones entre la frecuencia de excitación y las frecuencias naturales no caigan en rango de resonancia: $0.5 \succ \mu_0 / \mu_n \succ 1.5$

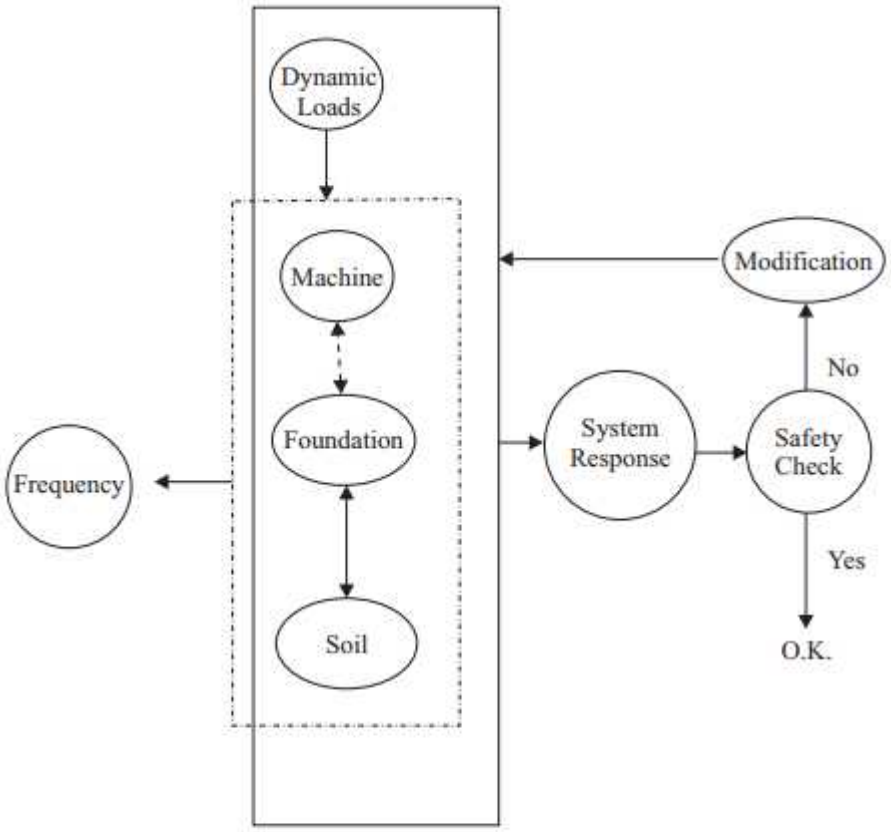


Fig (6.5): Schematic diagram of a machine-foundations system subjected to dynamic loads
Tomado de K.G.Bhatia: Foundations for industrial machines and earthquakes effects.

El principal objetivo propuesto en el diseño dinámico de una cimentación, es cumplir con los estados límite de servicio y de falla para las deformaciones y vibraciones del conjunto máquina-cimentación-suelo, de modo que se garantice la estabilidad, la reserva funcional de resistencia y el buen desempeño operativo para las solicitaciones dinámicas a las que estará sujeta la cimentación durante su vida útil.

Para lograr estos objetivos debe prestarse particular atención a los efectos resonantes, los que ocurren cuando la frecuencia de la fuerza de excitación en una vibración forzada de un cuerpo o un sistema, es igual a una de las frecuencias naturales del cuerpo o del sistema, generándose grandes amplitudes del movimiento. La previsión de los efectos resonantes, es uno de los requisitos básicos del diseño de la cimentación de las máquinas para garantizar que las condiciones de operación estén fuera de este estado crítico. El problema ha sido abordado de varias maneras, evaluándose los resultados de las curvas de amplitud-frecuencia, obtenidas con osciladores experimentales. Se ha demostrado que las relaciones empíricas entre la frecuencia de resonancia y el área de cimentación son consistentes con un análisis basado en la propagación de ondas superficiales en un medio elástico. [68]

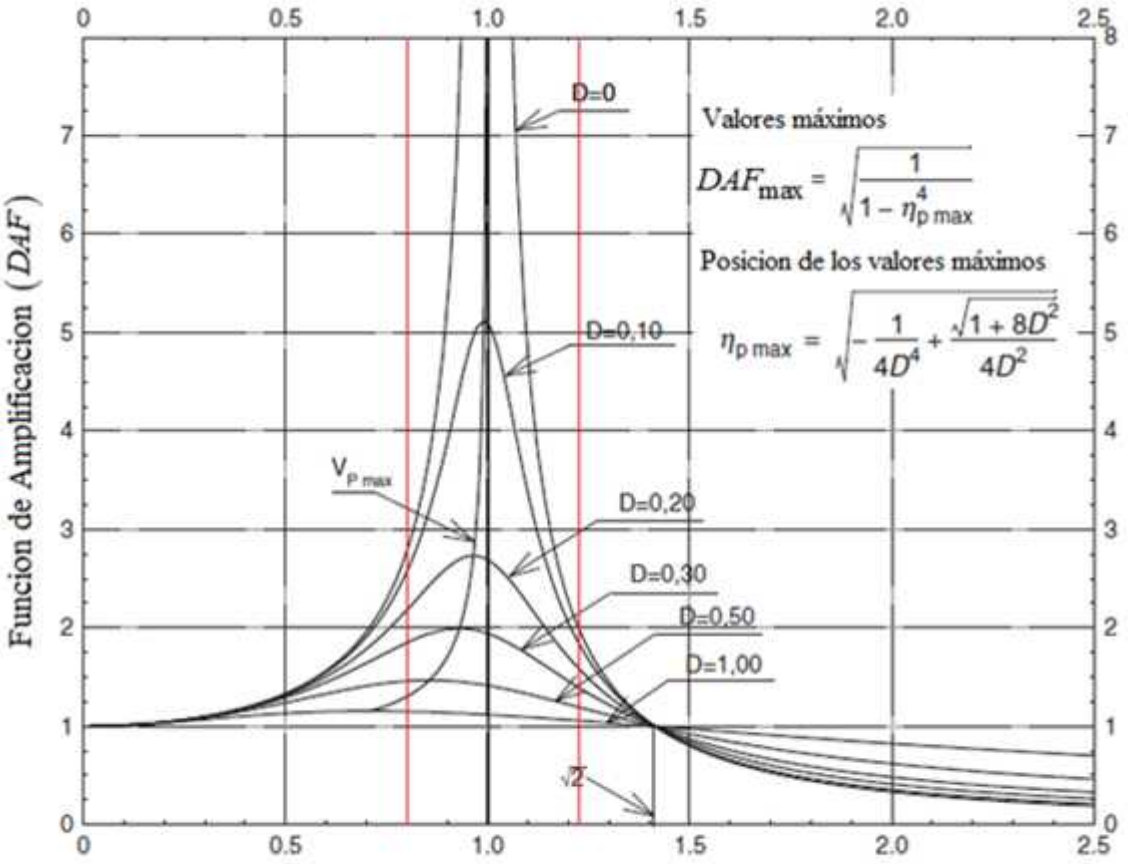


Fig (6.6): Función de amplificación versus relaciones de frecuencias $\eta = \Omega / \omega_n$

El valor particular de la frecuencia de la fuerza de excitación que produce condiciones resonantes se denomina frecuencia de resonancia para ese modo específico de vibración. Dado que la resonancia produce grandes amplitudes, tiene implicaciones peligrosas para cualquier estructura, máquina o sistema, causando severas fallas. Por lo tanto uno de los esfuerzos importantes de un ingeniero que se ocupa del diseño dinámico de fundaciones de máquinas, es evitar las condiciones resonantes.

En este sentido deberán considerarse el control de las amplitudes de vibración debidas a las acciones dinámicas propias del funcionamiento de la maquinaria, evitando que la relación de la frecuencia excitadora con la frecuencia natural del sistema máquina-cimiento-suelo, no esté comprendida en el intervalo del ancho de banda contraindicado, previendo no ocurran las condiciones de resonancia indeseadas en el diseño y construcción de cualquier sistema mecánico. Debido a que generalmente las frecuencias de excitación están predeterminadas por los requerimientos de carácter funcional del equipo, deberán controlarse las frecuencias naturales del sistema máquina-cimiento-suelo, para examinar la posible ocurrencia de amplitudes de resonancia.

Para un rendimiento satisfactorio, las cimentaciones de máquina en régimen dinámico, debe cumplirse con las siguientes condiciones: [69]

No debería haber resonancia; es decir, que la frecuencia natural de la máquina y del sistema cimentación-suelo no debe coincidir con la frecuencia de funcionamiento de la máquina. De hecho, una zona de resonancia generalmente es definida y la frecuencia natural del sistema debe estar fuera de esta zona. La cimentación está bien afinada cuando la frecuencia fundamental es mayor que la velocidad de funcionamiento o bajamente afinada cuando la frecuencia fundamental es menor que la velocidad de funcionamiento. Este concepto de alto o bajo afinamiento de la cimentación se ilustra en la Fig (6.7).

Las amplitudes de movimiento en las frecuencias de operación no deben exceder el límite de las amplitudes, que generalmente son especificadas por los fabricantes de máquinas. Si la amplitud calculada está dentro de los límites tolerables, pero la frecuencia natural calculada está cerca de la frecuencia de operación, es importante evitar esta situación.

La frecuencia natural del sistema cimiento-suelo no debe ser un número entero múltiplo de la frecuencia de funcionamiento de la máquina para evitar la resonancia con el de mayor armónica.

Las vibraciones no deben ser molestas para las personas que trabajan en las proximidades, o que causan daños a las otras máquinas de precisión. La naturaleza de las vibraciones que son perceptibles, molestas o dañinas, dependen de la frecuencia de las vibraciones y la amplitud del movimiento.

El ajuste o afinamiento, es un proceso utilizado para eliminar la amplificación debido a la resonancia, consistente en cambiar en un sistema, o componente del mismo, la frecuencia natural, μ_n de modo que ya no coincida con la frecuencia de una entrada de fuerza específica. [70]. La resonancia de los equipos industriales amplificará la respuesta de vibración, en teoría hasta ∞, dependiendo de las características de amortiguación del sistema. El Factor de amplificación síncrona SAF es una medida de cuánta vibración se amplifica cuando el sistema pasa a través de una resonancia. Los sistemas con una amortiguación efectiva alta tienden a responder con una baja FAS, y los sistemas con baja amortiguación efectiva tienen una FAS alta. El Diagrama de Bode, que se muestra en la Fig. (6.8), indica que los sistemas con una SAF alta (ligeramente amortiguada) tienen un estrecho rango de resonancia con una amplificación alta; los sistemas con bajo SAF (bien amortiguado) tienen un rango relativamente amplio de resonancia con baja amplificación. Deberá tenerse en cuenta que el rango de resonancia indica la cantidad de ajuste (cambio en la frecuencia natural del sistema) requerido para eliminar la resonancia. Las frecuencias resonantes que no son sincrónicas muestran un comportamiento similar, como se muestra en el diagrama de Bode. Antes de intentar afinar un sistema resonante, la frecuencia natural (y las características de amortiguación) deben determinarse experimentalmente, generalmente mediante una prueba de respuesta forzada. Una vez que se evalúa la relación de frecuencia entre la fuerza de entrada y la frecuencia natural del sistema, μ_n se debe tomar una decisión sobre si aumentar o disminuir la frecuencia natural.

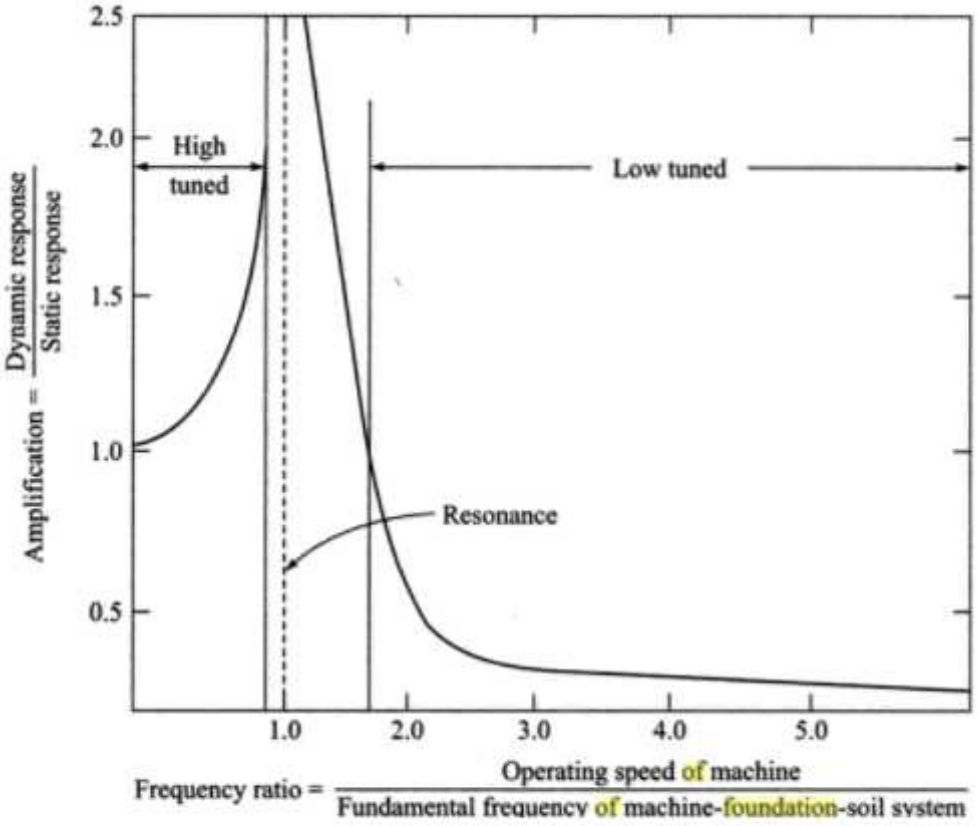


Fig (6.7): Afinamiento de una fundacion

Shashi. K Gulhati. Manoj Datta: Geotechnical Engineering. McGraw- Hill. Delhi 2005

Para un sistema vibratorio simple (SDOF), μ_n es proporcional a la relación rigidez / masa. La ecuación $\mu_n \cong \frac{1}{2®}\sqrt{\frac{K}{m}}$ indica que agregar rigidez aumentará la μ_n, y, por el contrario, agregar masa reducirá la μ_n

Las frecuencias naturales de una estructura están relacionadas con su diseño y se ven muy afectadas por su masa y su rigidez. Si sabemos que tenemos un problema de resonancia, podemos considerar agregar masa para reducir la frecuencia natural o aumentar la rigidez para aumentar la frecuencia natural. El objetivo es cambiar la frecuencia natural para que la máquina ya no la excite.

Este es un proceso muy sofisticado y hay una serie de problemas que deben considerarse. En esencia, esto es lo que se trata de hacer: modificar la estructura para que la vibración generada

por la máquina ya no se amplifique y perjudique la máquina o la estructura o el producto que se está fabricando, o generar ruido que afecte a los trabajadores o hogares ubicados cerca la planta.

Dado que aumentar la masa y / o disminuir la rigidez para disminuir la frecuencia natural puede comprometer la fuerza de una máquina o su estructura de soporte, agregar rigidez para aumentar la μ_η es la aplicación práctica más común para ajustar la afinación.

Para el proceso de afinamiento es necesario determinar las frecuencias naturales del conjunto máquina-cimentación-suelo para los seis modos principales de vibrar, y verificar si alguna de éstas coincide con alguna de las frecuencias de operación de la máquina, en caso haya alguna coincidencia, se presenta el fenómeno de resonancia caracterizado por producir desplazamientos excesivos, que pueden dañar la máquina y causar molestias a los operadores, o daños a obras localizadas en el entorno por lo que el objetivo del diseño de la cimentación es evitar que se presente dicha ocurrencia.

Para el diseño dinámico de maquinaria es recomendable que la relación de la frecuencia de excitación Ω a la frecuencia natural del conjunto máquina-cimentación-suelo μ_η esté comprendida dentro del intervalo $0.8 \geq \Omega / \mu_\eta \geq 1.2$ para evitar el riesgo de amplitudes resonantes, a como se muestra en la Fig (3.6). Cumpliendo con este estado límite, no hay efecto de resonancia, y la cimentación tendrá un desempeño estable. Este es un requisito sustantivo para el diseño dinámico de cualquier sistema de cimentación.

La disposición geométrica de la fundación también puede verse influenciada por los requisitos de funcionamiento de la máquina. Se alcanza la condición de falla de una cimentación de máquina cuando su movimiento excede un valor límite que puede basarse en la aceleración, velocidad o amplitud. Richart (1962) definió los criterios de falla en términos de limitación de las amplitudes de desplazamiento en una frecuencia dada. Las amplitudes limitantes o permisibles pueden establecerse a partir de la figura establecida por Blake, 1964, [71] quien también introdujo el concepto de factor de servicio.

El fenómeno de amplificación dinámica debido a los efectos resonantes, es de suma importancia para la ingeniería sísmica. Diferentes autores han estudiado la propagación y amplificación de ondas sísmicas en estructuras aluviales (Bard 1995, Bouchon 1973, Chavez-García et al., 2000, Sánchez-Sesma et al., 2000, Semblat et al., 2000b, 2005). En tales estructuras geológicas, el movimiento ondulatorio puede ser amplificado debido al contraste de velocidad entre las diversas capas, pero también debido a condiciones de confinamiento de las ondas superficiales. [72]

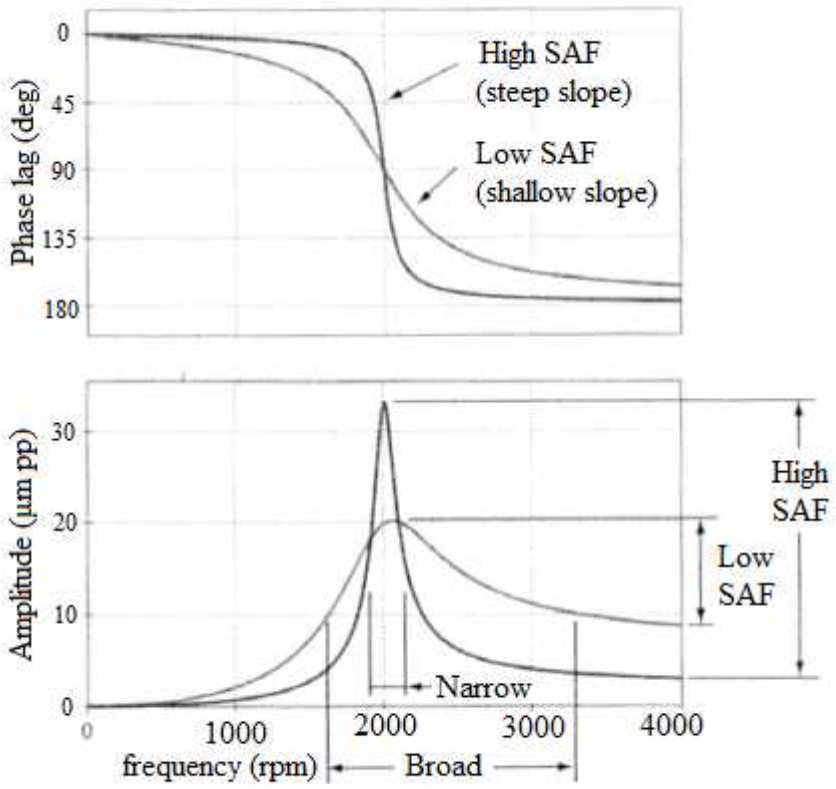


Fig (6.8): Gráfico de Bode para diferentes factores de amplificacion sincrona (SAF).

6.6. Amplificación dinámica del suelo.

La amplificación dinámica del suelo se debe básicamente a las diferencias de impedancias, contrataste de velocidades de las ondas de cuerpo entre los medios en contacto, y a la resonancia originada en la diferencia de frecuencias del depósito sedimentario y de la perturbación ondulatoria incidente. Los factores verticales y horizontales de amplificación dinámica de sitios, basados en el trabajo de Truong (1993, 2009, 2010, 2011a, b), se definen como la relación de la masa dinámica rocosa (DRM) a la masa dinámica del suelo (DSM), de la siguiente manera:

$$F_{Az} = \frac{A_r \sqrt{G_r \rho_r}}{\mu_r s_r} \frac{\mu_s s_s}{A_s \sqrt{G_s \rho_s}} = \frac{A_r}{A_s} \frac{\sqrt{G_r \rho_r}}{\sqrt{G_s \rho_s}} \frac{f_s s_s}{f_r s_r} \quad (6.36)$$

$$F_{Ax} = \frac{A_r \sqrt{G_r \rho_r}}{\mu_r} \frac{\mu_s}{A_s \sqrt{G_s \rho_s}} = \frac{A_r \sqrt{G_r \rho_r}}{A_s \sqrt{G_s \rho_s}} \frac{f_s}{f_r} \quad (6.37)$$

Donde G = módulo de corte, ρ = densidad de masa, A = área bajo vibración, f = frecuencia, ω = frecuencia circular. Los subíndices **r** y **s** designan la roca y el suelo respectivamente. Los subíndices z y x indican las direcciones vertical y horizontales respectivamente. [73]

$$s = \frac{V_s}{V_p} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}} \quad (6.38)$$

Los factores de amplificación dinámicos verticales y horizontales de sitios, también podrían definirse como los factores verticales y horizontales de impedancia. Si la frecuencia circular y el

área de la roca son iguales a los del suelo, las Ecs. (6.36) y (6.37) respectivamente, se transforman en las siguientes ecuaciones:

$$F_{Az} = \frac{\sqrt{G_r \rho_r}}{\sqrt{G_s \rho_s}} \frac{s_s}{s_r} \qquad (6.39)$$

$$F_{Ax} = \frac{\sqrt{G_r \rho_r}}{\sqrt{G_s \rho_s}} \qquad (6.40)$$

La Ec. (6.39) ha sido utilizado por Boore et al. (1997) como el factor de amplificación (AF) en dirección horizontal. Para muchos sitios de suelos blandos, el factor de amplificación seria significativamente mayor que dos, particularmente a frecuencias cercanas a 1Hz. La magnitud de la amplificación a aplicar puede determinarse analíticamente para un perfil de suelo específico o empíricamente basándose en una velocidad media supuesta de onda de corte en los primeros 30 m (Boore et al., 1994). Por la misma energía del terremoto, el espesor de la capa de suelo que podría movilizarse es normalmente menor que la de la capa de roca, debido al principio, cuanto más fuerte sean los materiales, más fuerte son las impedancias dinámicas.

Mardiross (1988) ha definido la relación horizontal de amortiguación por radiación, para depósitos de suelo que descansan sobre una formación rocosa como:

$$D_x = \frac{G_s \rho_s}{G_r \rho_r} \qquad (6.41)$$

Similarmente para amortiguación vertical:

$$D_z = \frac{G_s \circ_s s_r}{G_r \circ_r s_s} \qquad (6.42)$$

La resonancia ocurre cuando los valores pico de las ondas coinciden, resultando incrementos para las amplitudes y una mayor amplitud para el movimiento causado por la propagación ondulatoria.

La edad del depósito, el comportamiento inelástico y la potencia de la columna litológica son factores determinantes en el comportamiento sísmico del suelo.

Los depósitos Cuaternarios de suelos de edad Holocénica amplifican en mayor grado las señales sísmicas incidentes, por ello en los estudios de zonificación sísmica se deben describir detalladamente las propiedades geotécnicas y dinámicas más importantes del depósito de suelo las que dependen de las propiedades físicas del material. Los estudios de respuestas sísmicas también deben contener los perfiles de variación de las velocidades de cortante con la profundidad.

Se ha verificado rigurosamente que el depósito de suelo transforma el contenido frecuencial de las ondas incidentes a tal grado que los efectos superficiales para el proyecto sismo resistente de edificaciones se deben más al movimiento final del suelo que al sismo originado en la corteza basal.

El fenómeno registrado de resonancia triple se debe en primer término al efecto roca-suelo por las similitudes existentes entre los movimientos incidentes lejanos y los movimientos predominantes de depósitos profundos de suelos.

Seguidamente el efecto suelo-suelo originado por las ondas confinadas las cuales interfieren causando amplificación del movimiento y patrones resonantes debido a las diferentes impedancias del suelo y la roca. Finalmente se registra el efecto resonante suelo-estructura debido a la coincidencia entre los periodos predominantes de vibración del suelo y la estructura.

Al respecto debe considerarse que cuando ocurre un sismo varían las condiciones del suelo pudiendo ocurrir degradación de la rigidez de la estructura concluyéndose que no es posible descartar que ocurra el fenómeno de resonancia en sitios donde el periodo predominante del suelo y de la estructura puede variar durante un sismo severo.

El máximo factor de amplificación solo ocurre cuando la frecuencia del estrato de suelo debida a un terremoto se aproxima a su frecuencia fundamental no amortiguada (Dobry et al., 2000). Deberá tenerse en cuenta que la frecuencia fundamental del suelo es el valor más bajo de la frecuencia natural del suelo. Para vibración de un SDOF, la amplitud del factor de ampliación durante la vibración ha sido definido por Richart et al. (1970) mediante la ecuación:

$$DAF(\mu) = \left(\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu_n} \right)^2 \right]^2 + \left(2 \frac{\mu}{\mu_n} \right)^2} \right)^{-1/2} \qquad (6.43)$$

La amplificación dinámica del desplazamiento se define como la relación de la amplitud resultante de la respuesta a la deflexión estática $D(\mu) = \left| \frac{u}{u_S} \right|$

Idealizando el estrato de suelo como el oscilador mostrado en la figura, el cual es excitado por un movimiento armónico del terreno $\ddot{u}_g(t) \sim_0 sen\left(\mu' t\right)$

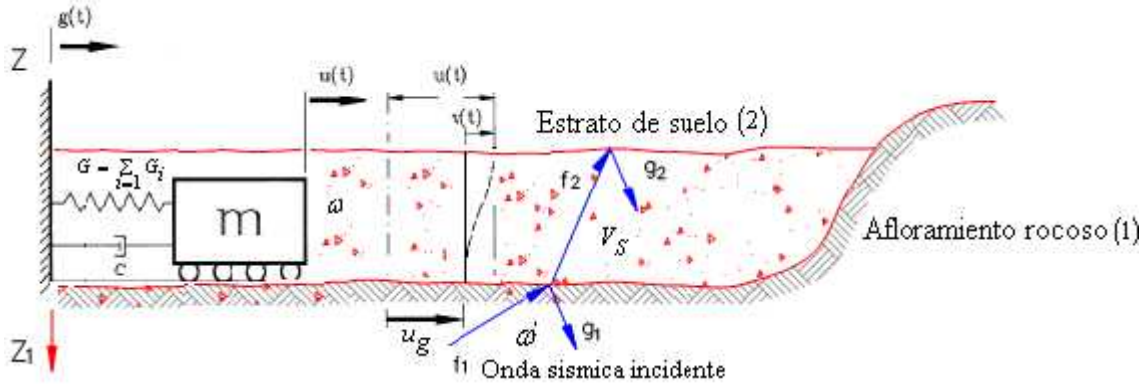


Fig (6.9): Idealizacion del estrato de suelo como un oscilador simple.

Dado que las ondas sísmicas incidentes son irregulares y no sinusoidales, es útil emplear la transformada de Fourier, descomponiendo la onda irregular en una seria trigonométrica compleja.

$$\ddot{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu_n) e^{i\mu t}$$

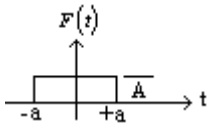
$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mu) e^{i\mu t} d\mu$$

$$g(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\mu t} dt$$

La representación de la integral de un impulso está dada por:

$$g(\mu) = \frac{A}{2\pi} \int_{-a}^{+a} e^{-i\mu t} dt = \frac{A sen\mu a}{\pi\mu}$$

$$F(t) = \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen\mu a}{\mu} e^{i\mu t} d\mu$$



La función $F_k(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{u}(t) e^{-i\mu t} dt$ transformada de Fourier permite obtener la amplitud de la componente armónica de $\ddot{u}_n(t)$ con frecuencia angular μ_n.

Si u_g es el movimiento del terreno por efecto de la perturbación sísmica incidente, entonces la ecuación que define el movimiento del estrato, asumiendo que se comportará como un oscilador elástico, tiene la forma de la Ec. (6.1):

$$m\ddot{u} + C\dot{u} + Gu = - m\ddot{u}_g(t) \qquad (6.44)$$

La solución de esta ecuación es de la siguiente forma:

$$\ddot{u} + 2\ \mu\dot{u} + \mu_n^2 u = - \sim_0 sen(\mu t) \qquad (6.45)$$

Esta solución contiene la solución complementaria que decae rápidamente con el tiempo, y la solución particular Ec. (6.46), que gobierna las vibraciones en estado estacionario, o vibración forzada.

$$u(t) = c_1 sen(\mu t) + c_2 \cos(\mu t) \qquad (6.46)$$

Al sustituir la Ec. (4.46) en la Ec. (4. 45), obtenemos la siguiente expresión:

$$u(t) = -\frac{\sim_0}{\mu_n^2}\left[\left(1-\frac{\mu^2}{\mu_n^2}\right)^2 + \left(2\ \ \frac{\mu}{\mu_n}\right)^2\right]^{-0.5} sen(\mu t - {}^{-}) \qquad (6.47)$$

Una fuerza estática exterior igual a la fuerza interna provoca deformaciones en el sistema

$$u_s = -\frac{\tilde{}_0}{\mu_n{}^2}$$

La relación de la amplitud resultante de la respuesta a la deflexión estática, conduce a la ecuación:

$$D(\mu) = \left|\frac{u}{u_s}\right| = \left[\left(1 - \frac{\mu^2}{\mu_n{}^2}\right)^2 + \left(2 \quad \frac{\mu}{\mu_n}\right)^2\right]^{-0.5} \qquad (6.48)$$

La función de amplificación dinámica del estrato de suelo $D(\mu_n)$, es definida como la relación entre la amplitud del movimiento de un punto localizado en la superficie libre del estrato, respecto a la amplitud del desplazamiento del punto correspondiente localizado en la interfase entre el suelo y la roca.

Tomando en consideración la Ec. (2.104), y la condición de que las amplitudes son iguales en la superficie libre del estrato, como consecuencia directa de las Ecs. (2.97) y (2.98), podemos escribir la función de amplificación dinámica del siguiente modo:

$$A_1 = A_2 = 1$$

$$D(\mu_n) = \frac{A_1 + A'_1}{A_2 + A'_2} = \frac{uz_1(0)}{uz_2(H)} = \frac{2}{e^{i\mu H} + e^{-i\mu H}} = \frac{1}{\cos(\mu H)\sqrt{\frac{\circ}{G}}} \qquad (6.49)$$

La ecuación (3.49), indica que si p es real, en ausencia de amortiguamiento interno del suelo β = 0, y si: $\cos(ph) \to 0$

Entonces D_2 (μ_n) → ∞, y ocurre el fenómeno de resonancia, lo cual es posible cuando la frecuencia circular de una onda incidente ω_s coincide con una de las frecuencias circulares naturales del estrato superficial ω_n, es decir:

$$D(\mu_n) = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\mu_s}{\mu n} \right)^2} \right| \qquad (6.50)$$

La Fig (6.10) contiene las curvas de amplificación dinámica de un estrato único de suelo cimentado sobre roca, para tres valores del porcentaje de amortiguamiento .

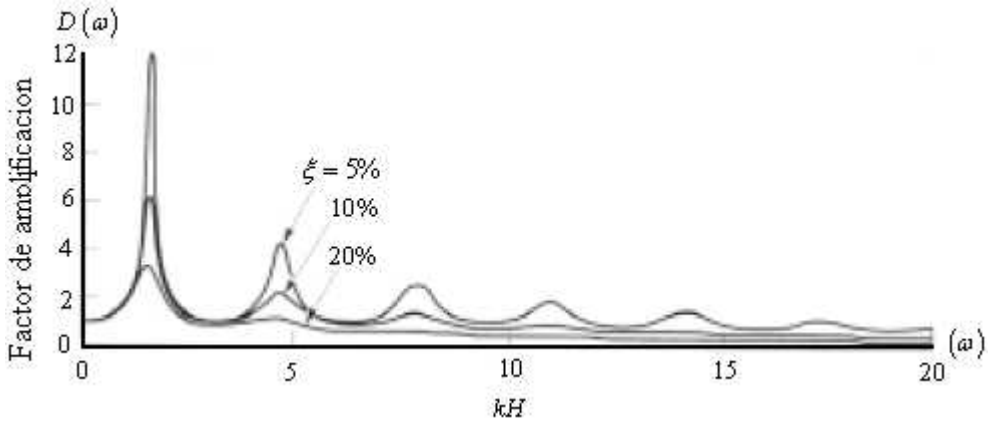


Fig (6.10): Amplificación dinámica de un estrato único de suelo cimentado sobre roca.

6.7. Aislamiento de vibraciones.

En muchas aplicaciones industriales las máquinas vibrantes transmiten fuerzas a la tierra que a su vez hacen vibrar las máquinas vecinas y demás instalaciones del entorno. Entonces en ese

concurso es necesario cuantificar cuánta fuerza se transmite al suelo desde la máquina o desde el suelo a las máquinas vecinas. Cuando la fuerza armónica sinusoidal $F = F_0 \sin \mu t$ se aplica a la masa de un sistema con un grado de libertad con amortiguamiento viscoso, como el mostrado en la Fig. (6.10), dicho movimiento es descrito mediante la Ec (6.1a).

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \mu t \quad (6.1a)$$

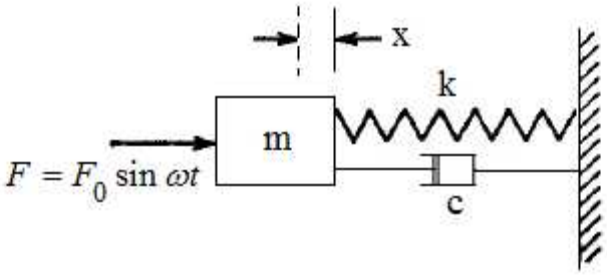


Fig (6.11): Sistema SDOF amortiguado excitado por vibracion forzada actuando en la masa.

Según hemos analizado previamente, la solucion general de esta ecuación es de la forma $x = x_h + x_p$ en donde x_h es la solucion general de $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ y x_p es la solucion particular del estado estacionario de $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \sin \mu t$ es de la forma $x = x_0 sen(\mu t - ¤)$

Fuerza elástica restitutiva: $F_k = kx_0 sin(\mu t - ¤)$

Fuerza debida al amortiguamiento viscoso: $F_c = c\mu x_0 \cos(\mu t - ¤)$

Fuerza inercial: $F_c = -m\mu^2 x_0 \sin(\mu t - ¤)$

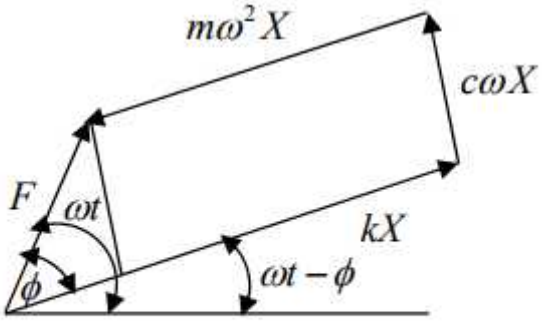


Fig (6.12): Poligono de fuerzas

Las fuerzas debidas al resorte y al amortiguador viscoso F_t serán transmitidas al terreno:

$$F_t = \sqrt{\left(kx_0\right)^2 + \left(c\mu x_0\right)^2} = kx_0\sqrt{1+\left(\frac{2\ \mu}{\mu_n}\right)^2} \quad (6.51)$$

Se sabe que para una fuerza perturbadora $F = F_0 \sin\mu t$ la amplitud de la oscilación resultante es:

$$x_0 = \frac{F_0 / k}{\sqrt{\left(1-\frac{m}{k}\right)^2 \mu^2 + \left(\frac{c\mu}{k}\right)^2}} = \frac{F_0 / k}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\mu}{\mu_n}\right)^2\right] + \left[2\ \ \left(\frac{\mu}{\mu_n}\right)\right]^2}} \quad (6.52)$$

Reemplazando la Ec (6.52) en la Ec (6.51) y definiendo el coeficiente de transmisibilidad como $T = \left|F_t / F_0\right|$ se tiene:

$$T = \left|\frac{F_t}{F_0}\right| = \sqrt{\frac{1+\left(\frac{2\ \mu}{\mu_n}\right)^2}{\left[1-\left(\frac{\mu}{\mu_n}\right)^2\right]+\left[2\ \left(\frac{\mu}{\mu_n}\right)\right]^2}} \qquad (6.53)$$

Donde $= \dfrac{c}{2m\mu_n}$

La Ec (6.53) también se puede usar para calcular la respuesta horizontal de una máquina al desplazamiento vertical.

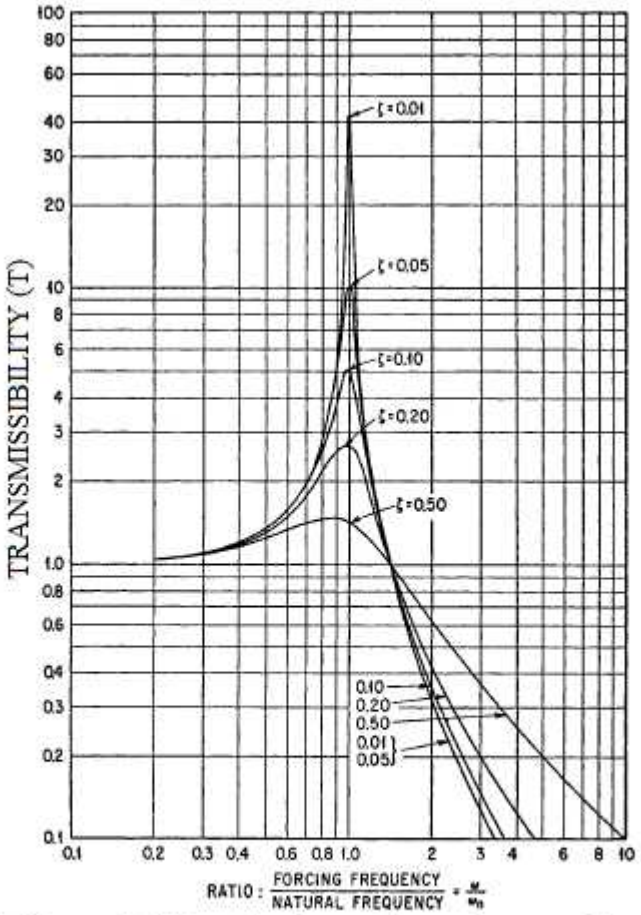


Fig (6.13): Transmissibility of a viscous-damped system. Force transmissibility and motion transmissibility are identical numerically. The fraction of critical damping is denoted by ζ.

(After Ralph E. Blake: Basic vibration theory. Chapter 2, p 2.15)

La Fig. (6.13) muestra la variación de transmisibilidad con la relación de frecuencias μ / μ_n para un sistema SDOF, observándose que la vibración se aislará cuando el sistema funcione con una relación de frecuencia superior a $\sqrt{2}$. [74, 75]

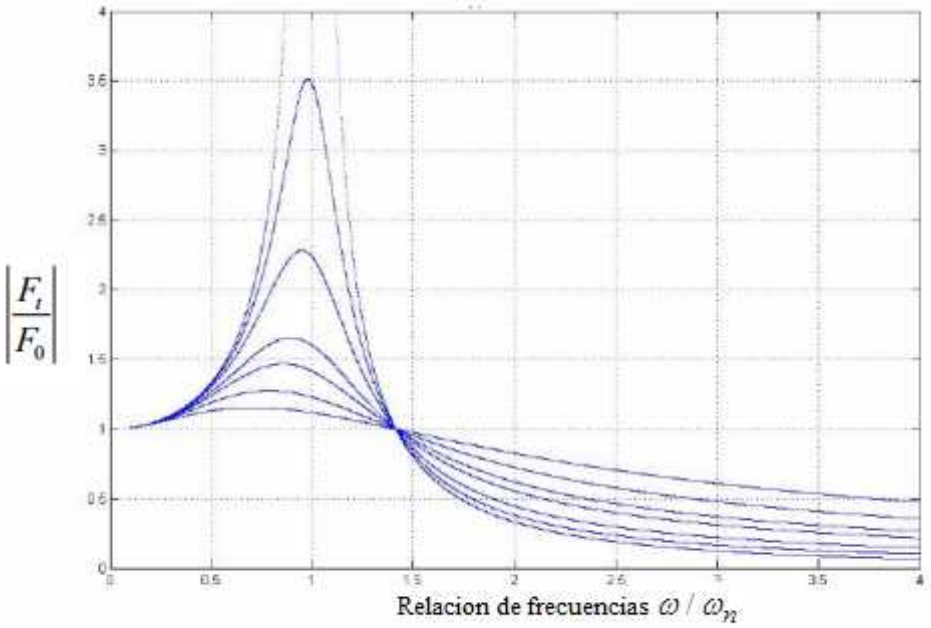


Fig (6.14): Ploteo de transmisibilidad versus relacion de frecuencias.

Para excitación debida amasas rotatorias $F_0 = m_i e \mu^2$ el coeficiente de transmisibilidad es:

$$T = \left|\frac{F_t}{F_0}\right| = \frac{(\mu/\mu_n)^2 \sqrt{1+(2\ \mu/\mu_n)^2}}{\sqrt{\left(1-(\mu/\mu_n)^2\right)^2 + (2\ \mu/\mu_n)^2}} \qquad (6.55)$$

7. DISEÑO DE CIMENTACIONES PARA MÁQUINAS VIBRATORIAS.

7.1. Introducción al diseño de cimentaciones para máquinas industriales.

La dinámica del sistema de fundaciones para máquinas, es una tarea involucrada en sí misma debido a que es necesario hacer una serie de comprobaciones adicionales que tengan en cuenta el carácter dinámico de la carga. Ésta es la diferencia principal entre las cimentaciones para máquinas vibrantes respecto a una cimentación estática, para las cuales basta cumplir con los estados límite de falla y de servicio, lo que requiere conocer las propiedades mecánicas del suelo de apoyo. Para realizar el análisis dinámico es necesario contar con información que permita determinar el comportamiento dinámico del suelo. El objetivo principal del diseño dinámico de una cimentación es garantizar el cumplimiento de los estados límite de servicio y de falla, para la amplitud permisible de las deformaciones y vibraciones del conjunto máquina-cimentación-suelo, la que es gobernada por la relativa importancia del equipo dinámico y la sensibilidad de las estructuras cercanas a la vibración. La cimentación deberá contar la reserva funcional necesaria para resistir los efectos estáticos y dinámicos a los que estará sujeta durante su vida útil. Con la información de la dinámica del suelo, y las cargas de excitación inducidas por las máquinas, la aplicación de las ecuaciones que para determinar el estado de esfuerzos y desplazamientos máximos es relativamente sencilla. Los diversos parámetros para el diseño de fundaciones sujetos a cargas dinámicas, incluyen constante de resorte, factores de enterramiento, frecuencias naturales y de resonancia, velocidades iniciales de las partes constitutivas de la máquina, cálculo de cargas en la fundación. Se deberán establecer los límites que deben tener estos parámetros, para que las amplitudes generadas por las vibraciones no excedan los límites medio ambientales, y se encuentren en un rango seguro para los usuarios, las máquinas y el entorno circundante de influencia de las perturbaciones.

Cuando las especificaciones del equipo dinámico no contiene las amplitudes permisibles, los valores de sugeridos por Richard et al (1970), mostrados en la Fig (7.1) podrían ser adoptados

para diseños preliminares. Barkan ha propuesto los valores para las amplitudes permisibles mostrados en la T (5.1) recomendados para el buen funcionamiento de los equipos.

Si adicionalmente a las cargas dinámicas generadas por las máquinas se agregan los efectos de probables eventos sísmicos, el problema se torna más complejo

El rendimiento, la seguridad y la estabilidad de las máquinas dependen en gran medida de su diseño, fabricación e interacción con el medio ambiente. En principio las fundaciones para las máquinas deben diseñarse de manera que las fuerzas dinámicas generadas, se transmitan al suelo a través del sistema de cimentación, de tal manera que se eliminen todo tipo de efectos dañinos (Barkan, 1962; Bhatia, 1984, 2006, 2008; Mayor, 1980; Prakash y Puri, 1988; Srinivasulu y Vaidyanathan, 1980). Para los efectos de este trabajo serán consideradas únicamente las cimentaciones para máquinas de impacto, reciprocantes y rotativas, someras o embebidas, apoyadas directamente sobre el terreno.

En el pasado, se usaron métodos simples de cálculo, que a menudo implican la multiplicación de cargas estáticas por un factor dinámico estimado y el resultado se trata como una carga estática aumentada sin ningún conocimiento del factor de seguridad real. Debido a esta incertidumbre, el valor del factor dinámico adoptado generalmente era demasiado alto, aunque la práctica mostró que durante la operación las deformaciones dañinas resultaron dañinas a pesar de usar tales factores excesivos. Esto requirió una investigación científica más profunda de la carga dinámica. Un estudio más detallado se hizo urgente debido al desarrollo de máquinas de mayor capacidades (Bhatia, 1984). [76,77]

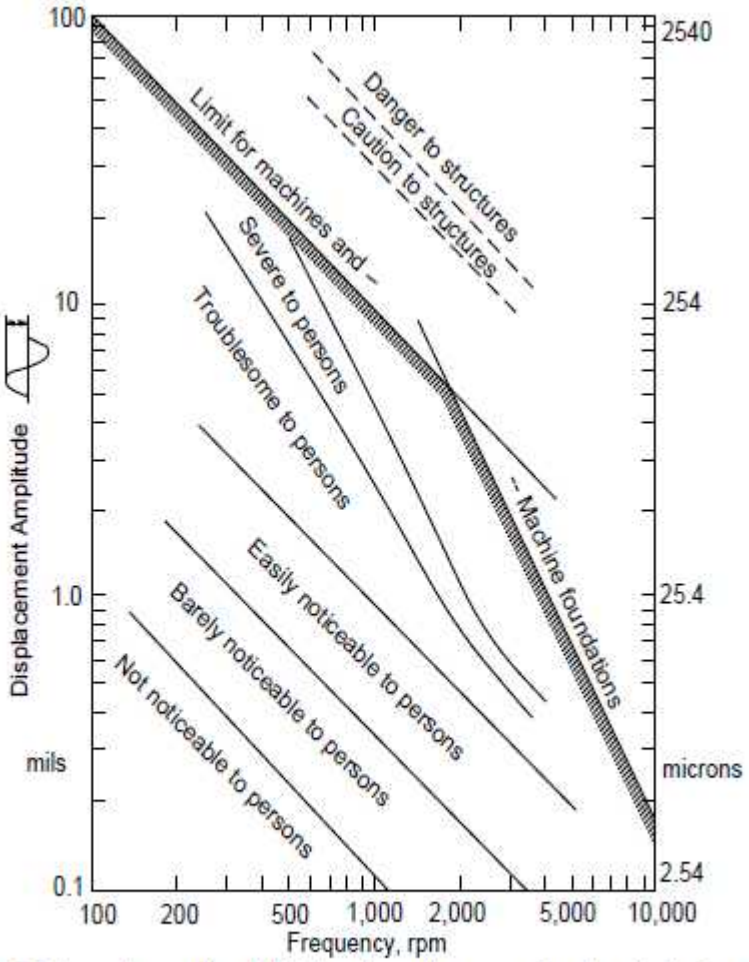


Fig (7.1): Limites de amplitud del desplazamiento en funcion de la frecuencia.
(Richart, Hall y Woods 1970)

Tipo	Amplitudes permisibles (cm)	
1. Equipo de baja velocidad (500 rpm)	0.02	0.025
2. Cimentación para martillos	0.1	0.12
3. Equipo de alta velocidad		
a. 3000 rpm		
i. Vibraciones Verticales	0.002	0.003
ii. Vibraciones Horizontales	0.004	0.005
b. 1500 rpm		
i. Vibraciones Verticales	0.004	0.006
ii. Vibraciones Horizontales	0.007	0.009

Tabla (7.1):D.D. Barkan: Dynamics of bases and foundations, (1960)

Las máquinas de mayor calificación dieron lugar a tensiones considerablemente más altas, lo que plantearía problemas con respecto al rendimiento y la seguridad. Esto requirió del desarrollo en el campo de las técnicas analíticas de las vibraciones y en parte en la mecánica del suelo. Por lo tanto, se desarrollaron nuevos procedimientos teóricos para calcular la respuesta dinámica de fundaciones (Bhatia, 2006). En base a las investigaciones científicas llevadas a cabo en las últimas décadas, se ha establecido que no es suficiente basar el diseño solo en las cargas verticales multiplicadas por un factor dinámico, incluso si este factor introduce una carga dinámica muchas veces mayor que la original. Debe recordarse que el funcionamiento de las máquinas genera no solo fuerzas verticales, sino también fuerzas que actúan perpendicularmente al eje; por lo tanto, no es suficiente tener en cuenta únicamente las cargas verticales y multiplicarlas por una seleccionada factor dinámico (Bhatia, 2006, 2008). También se ha encontrado que la idoneidad de las fundaciones de máquinas depende no solo de las fuerzas a las que serán sometidas, sino también de su comportamiento cuando se exponen a cargas dinámicas, las que dependen de la velocidad de la máquina y la frecuencia natural de la fundación, por lo que se debe de realizar un análisis de vibración

Cada diseño de fundaciones para máquinas requiere de un análisis detallado de la vibración que proporcione información sobre el comportamiento dinámico de la fundación y sus componentes, para un rendimiento satisfactorio de la máquina. El conocimiento completo del mecanismo de la transferencia de carga de la máquina a la cimentación así como también el conocimiento completo de las fuerzas de excitación y las frecuencias asociadas, son imprescindibles para la evaluación correcta del rendimiento de la máquina. Todas las cimentaciones para máquinas, independientemente del tamaño y de su tipo, deben considerarse como se tratan los problemas de ingeniería y sus diseños deben basarse en sólidas prácticas de ingeniería estructural. Las cargas dinámicas de las máquinas que causan vibraciones deben tenerse debidamente en cuenta para proporcionar una solución, que sea técnicamente fiable y económica.

A pesar de que las herramientas computacionales avanzadas están disponibles para la evaluación de las características dinámicas de los sistemas de fundaciones para máquinas, su uso en oficinas de diseño, que fue limitado en el pasado, ahora se ha descubierto que es bastante común. Un sistema de fundación de máquina puede ser modelado ya sea como una estructura bidimensional o como una estructura tridimensional. Para el modelado y análisis matemático, se hacen suposiciones válidas teniendo en cuenta lo siguiente:

Para el modelado y análisis matemático, se hacen suposiciones válidas teniendo en cuenta lo siguiente:

El modelo matemático debe ser compatible con el prototipo de la estructura dentro de un grado razonable de precisión.

El modelo matemático debe de ser tal que se pueda analizar con las herramientas matemáticas disponibles.

La influencia de cada suposición debe conocerse cuantitativamente con respecto a la respuesta de la fundación.

Las técnicas de aislamiento de vibración también se han utilizado para reducir las vibraciones en las máquinas. El aislamiento conduce a la reducción en la transmisibilidad de las fuerzas de excitación de la máquina a la base y viceversa. El uso de dispositivos de aislamiento de vibraciones es uno de los métodos por los cuales uno puede lograr resultados satisfactorios.

Rendimiento, que a su vez puede dar como resultado la minimización de fallas y reducir el tiempo de inactividad debido a la alta vibraciones Sin embargo, para equipos en cimientos elevados, es deseable tener una estructura de soporte rigidez suficientemente más alta que la rigidez general del sistema de aislamiento para obtener el deseado eficiencia de aislamiento (Bhatia, 2008). La estructura de soporte, un sistema estructural elevado 3-D, posee muchas frecuencias naturales. El sistema de aislamiento de vibraciones, que comprende la máquina, el bloque de inercia y el dispositivo de aislamiento, también tiene seis modos de vibración que tienen valores de rigidez específicos correspondientes a cada modo de vibración. Es de interés notar que la rigidez lateral de una estructura elevada es mucho más bajo que su rigidez vertical. Si esta rigidez (lateral) inferior es comparable a la rigidez de los aisladores, sin duda afecta la rigidez general y, por lo tanto, la respuesta del sistema de la máquina base. Por lo tanto, la rigidez lateral de la estructura de soporte también debe ser calculada y considerada al seleccionar la aisladores. Finalmente, puede ser deseable llevar a cabo un análisis dinámico detallado de todo el sistema incluyendo la subestructura.

Los cuatro Capítulos precedentes de este trabajo contienen los fundamentos teóricos conceptuales de la mecánica ondulatoria de solidos elásticos y de la dinámica del suelo, requerido para la realización del adecuado análisis vibracional de las fundaciones para máquinas.

7.2. Tipos de Equipos Dinámicos.

En dependencia de las fuerzas inerciales que actúa sobre las fundaciones, genéricamente las máquinas pueden clasificarse como máquinas con carga dinámica, en las cuales la fuerza de inercia que actúa sobre la cimentación es comparable con el propio peso de la máquinas, en cuyo caso las fundaciones deberán diseñarse mediante un riguroso análisis dinámico que considere las especificaciones técnicas dadas por el fabricante del equipo y las características geodinámicas del suelo. Existen otro tipo de máquinas de acción equilibrada, las que difieren del tipo anterior en cuanto que las fuerzas de inercia no son comparables con su peso, por lo que su diseño requiere de análisis menos rigurosos.

Hay muchos tipos de máquinas que generan diferentes tipos de fuerzas dependientes del tiempo, siendo las tres categorías más importantes las rotativas, las reciprocantes, y las de impacto.

En función de su frecuencia de funcionamiento, las máquinas se pueden dividir en tres categorías:

(a) Máquinas de frecuencia baja a media de hasta 500 rpm: los motores de pistón, compresores y sopladores de gran cilindrada entran en esta categoría. Las frecuencias de funcionamiento habituales oscilan entre 50 y 250 rpm.

(b) Máquinas de frecuencia media a alta: 300 a 1000 rpm. Los motores alternativos de tamaño medio como los motores diésel y de gas pertenecen a esta categoría.

(c) Máquinas de muy alta frecuencia: más de 1000 rpm: los motores de combustión interna de alta velocidad, los motores eléctricos y los turbogeneradores entran dentro de la categoría.

7.3. Equipos rotativos.

Las máquinas rotativas se caracterizan por el movimiento de rotación de los impulsores o rotores y están diseñadas para operar a velocidades constantes por largos períodos de tiempo. La característica principal de estas máquinas es que sus partes móviles describen un desplazamiento de trayectoria circular. A este grupo pertenecen las turbinas a gas y a vapor, compresores axiales, bombas centrífugas, turbogeneradores, ventiladores, desfibradoras y centrifugadoras. A menudo

la causa más común de vibraciones en este tipo de máquinas son las fuerzas desbalanceadas originadas cuando el centro de masas de las partes que giran no coincide con el centro de rotación, lo que genera fuerzas inerciales asociadas con la rotación de la masa, a como se ilustra en la Fig (7.2).

La fuerza dinámica depende de la velocidad de rotación, del eje de masas, y de la magnitud del desplazamiento. La masa total y la frecuencia son propias del sistema y las proporciona el fabricante, así que bastará con determinar la excentricidad para estimar la magnitud de la fuerza de desbalanceo. La frecuencia de operación próxima a la resonancia, los desalineamientos, y otras condiciones indeseables pueden incrementar la fuerza aplicada al rotor pudiéndose generar daños al equipo y transmitir a la cimentación acciones dinámicas severas. Es muy importante garantizar que las vibraciones de operación del equipo no sobrepasen los límites de vibración permitidos para preservar su funcionalidad y evitar transmitir al entorno vibraciones excesivas.

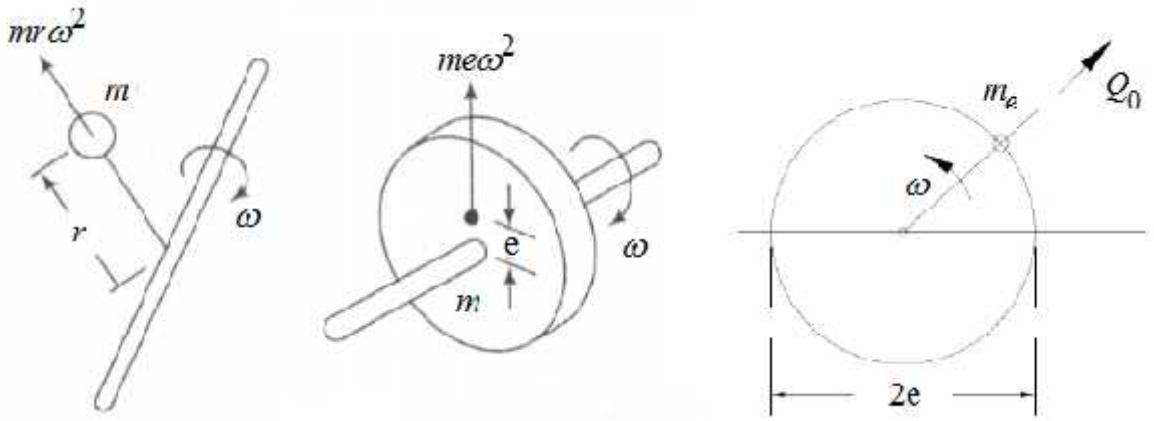


Fig (7.2): Fuerza centrifuga y desbalanceo.

Hay casos en los que el origen de las fuerzas de desbalanceo es complicado por ello el fabricante utiliza instrumentación especial para detectar las causas y medir la magnitud de las fuerzas dinámicas desbalanceadas. Ciertas máquinas y estructuras que desarrollan vibraciones excesivas durante su vida útil requieren del diagnóstico de las vibraciones para evitar una falla inminente de algunos de los componentes. Tales componentes se pueden probar usando excitadores de vibración.

Los diferentes tipos de excitadores de vibración se usan para el desarrollo, la simulación, la producción, el estudio de los efectos de la vibración y para evaluar las propiedades físicas de materiales o estructuras.

Los recursos teóricos analíticos, e instrumentales, casi siempre posibilitan balancear las partes móviles con el fin de evitar fuerzas por desbalanceo. Cada vez que una cierta masa se une a un eje giratorio, ejerce alguna fuerza centrífuga, cuyo efecto es flexionar el eje y producir vibraciones en él. Para evitar el efecto de la fuerza centrífuga, se fija otra masa al lado opuesto del eje, en una posición tal que se equilibra el efecto de la fuerza centrífuga de la primera masa. Esto se hace de tal manera que las fuerzas centrífugas de ambas masas se hacen para ser iguales y opuestas. El proceso de proporcionar la segunda masa para contrarrestar el efecto de la fuerza centrífuga de la primera masa se denomina equilibrio de masas rotatorias. [78]. Para el tema del balanceo, pueden presentarse los casos del equilibrio de una sola masa giratoria que gira en el mismo plano; el equilibrio de diferentes masas girando en el mismo plano y el equilibrio de diferentes masas girando en diferentes planos.

Equilibrar es el proceso de diseño o modificación de maquinaria para que el desequilibrio se reduzca a un nivel aceptable y, de ser posible, se elimine por completo. Una partícula o masa que se mueve en una trayectoria circular experimenta una aceleración centrípeta y se requiere una fuerza para producirla. Una fuerza igual y opuesta que actúa radialmente hacia el exterior actúa sobre el eje de rotación y se conoce como fuerza centrífuga. Esta es una fuerza perturbadora en el eje de rotación, cuya magnitud es constante pero la dirección cambia con la rotación de la masa. En un rotor giratorio, la fuerza centrífuga permanece equilibrada siempre que el centro de la masa del rotor coincida con el centro del eje. Cuando el centro de masa no se encuentra en el eje o hay una excentricidad, se produce una fuerza desequilibrada. Este tipo de desequilibrio es muy común. Por ejemplo, en rotores de turbinas de vapor, cigüeñales de motores, compresores rotativos y bombas centrífugas. El enfoque más común para el equilibrio es mediante la redistribución de la masa que puede lograrse mediante la adición o eliminación de masa de varios miembros de la máquina.

Cada vez que una cierta masa se une a un eje giratorio, ejerce alguna fuerza centrífuga, cuyo efecto es deflexionar el rotor, y producir vibraciones en él. Para evitar el efecto de la fuerza centrífuga, se fija otra masa al lado opuesto del eje, en una posición tal que se equilibra el efecto de la fuerza centrífuga de la primera masa. Esto se hace de tal manera que las fuerzas centrífugas

de ambas masas se hacen para ser iguales y opuestas. El proceso de proporcionar la segunda masa para contrarrestar el efecto de la fuerza centrífuga de la primera masa se denomina equilibrio de masas rotatorias.

Las fuerzas desequilibradas transmitidas a la cimentación son armónicas sinusoidales, las que pueden expresase como:

$$Q = Q_0 \sin \mu t \quad (7.1)$$

Donde la fuerza desbalanceada, puede ser constante o función de la frecuencia de rotación μ

$$Q_0 = m_e e \mu^2 \quad (7.2)$$

Donde:

m_e= masa total desbalanceada

e= excentricidad

μ = frecuencia de excitación

El concepto de vibración forzada con excitación de masa se explica para máquinas rotativas como: bombas centrífugas, turbinas, motor eléctrico, centrifugas etc., presentan alguna cantidad de desequilibrio, incluso después de equilibrar con auxilio de técnicas e instrumentos precisos. Este desequilibrio es una fuente común de vibraciones forzadas. El desequilibrio en las máquinas rotativas es medido en términos de masa una "m" rotando con su centro de gravedad a una distancia "e" del eje de rotación. La fuerza centrífuga debido a la masa de desequilibrio "m" actúa como fuerza de excitación armónica. Considérese una máquina con un desequilibrio rotativo soportado en un en un apoyo elástico compuesto por un resorte y un amortiguador, como se muestra en la Fig (7.3). Se supone que el sistema está obligado a moverse teniendo verticalmente un solo grado de libertad. El desplazamiento vertical de la masa de la máquina excluyendo la masa giratoria desequilibrada es x, y el desplazamiento vertical total de la masa giratoria desequilibrada es $(x + e \sin \mu t)$

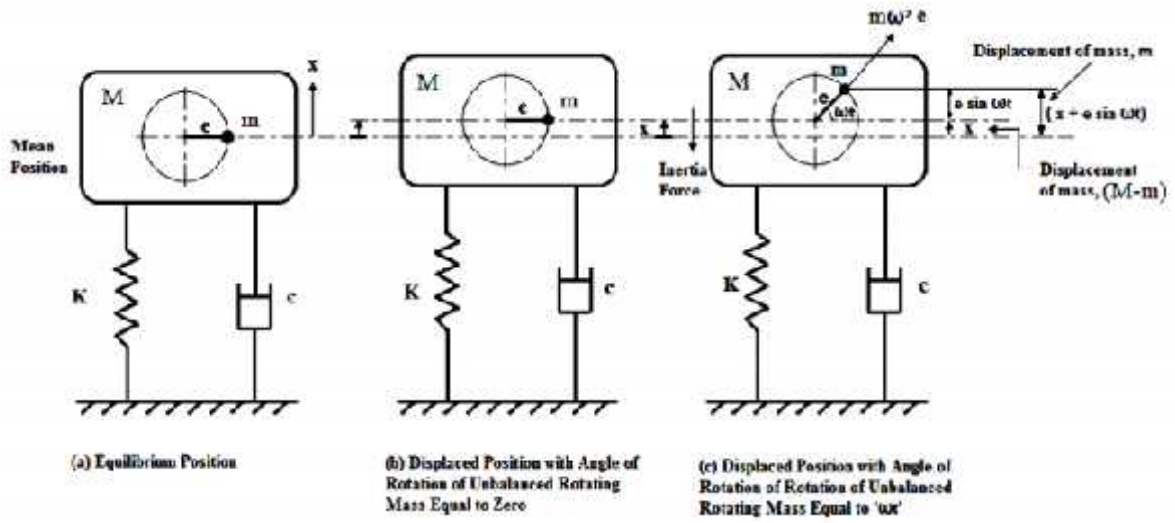


Fig (7.3): Rotating unbalance.

After: Nitinkumar Anekar; V.V. Ruiwale;Shrikant Nimbalkar and Pramod Rao: "DESIGN AND TESTING OF UNBALANCED MASS MECHANICAL VIBRATION EXCITER" International Journal of Research in Engineering and Technology 2014.

Las fuerzas que actúan en el sistema son de naturaleza inercial, elástica y de amortiguamiento:

Fuerza de inercia debida a la masa de la máquina M, excluyendo la masa giratoria desequilibrada m: $(M-m)\ddot{x}$

Fuerza de inercia debida a la masa giratoria desequilibrada "m":

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x+e\sin\mu t)=\left(m\ddot{x}-m\mu^2 e\sin\mu t\right)$$

Fuerza elástica del resorte: Kx

Fuerza de amortiguamiento: $c\dot{x}$

Considerando el diagrama de cuerpo libre mostrado en la Fig (7.4), y aplicando el principio de D´Alembert´s, se establece la ecuación del equilibrio dinámico del sistema: ∑[Fuerzas inerciales + Fuerzas externas] = 0

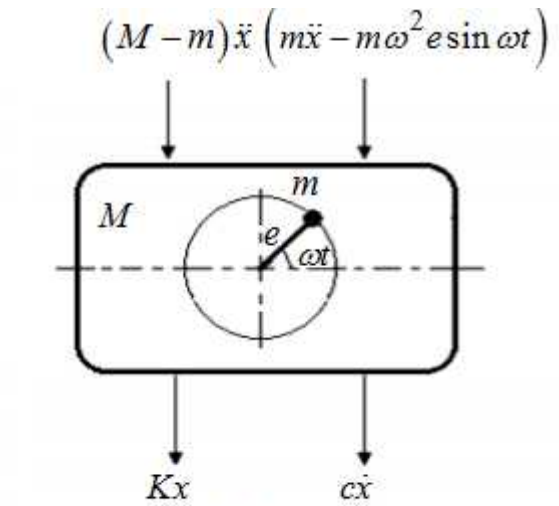


Fig (7.4): Free Body Diagram of Machine

$$\left.\begin{aligned}(M-m)\ddot{x}+\left(m\ddot{x}-\mu^2 e\sin\mu t\right)+c\dot{x}+Kx=0\\ M\ddot{x}+c\dot{x}+Kx=m\mu^2 e\sin\mu t\end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

La Ec (7.3) es lineal; diferencial de segundo orden, expresa el movimiento para una vibración forzada amortiguada debido a desbalance rotativo, con forma semejante a la Ec (6.32).

La solución completa para esta ecuación diferencial está dada por la superposición de una solucion partícula y una solucion general: $X=X_c+X_p$

$$X = X_1{}^{-,\mu_n t}\sin\left(\sqrt{1-,^2}\mu_n t+¤_1\right)+\frac{me\mu^2\sin\left(\mu t-¤\right)}{K\sqrt{\left(1-r^2\right)^2+\left(2,r\right)^2}} \qquad (7.4)$$

Donde $r=\dfrac{\mu}{\mu_n}$ y ¸ el porcentaje del amortiguamiento crítico.

La amplitud de las vibraciones correspondientes al estado estacionario es:

$$\frac{X}{\left(\frac{me}{M}\right)} = \frac{r^2}{\sqrt{\left(1-r^2\right)^2 + \left(2,\ r\right)^2}} \qquad (7.5)$$

Donde $X / \left(\frac{me}{M}\right)$ es la amplitud adimensional generada por el desequilibrio rotativo de la máquina.

La gráfica de la relación amplitud adimensional vs frecuencia está representada en la Fig (7.5) da la información, cuando la velocidad es cero; la amplitud adimensional es también cero. De ahí todas las curvas comienzan desde el origen. En resonancia, la amplitud adimensional está limitado solo por el porcentaje de amortiguación presente en el sistema. Cuando la relación de frecuencia es muy grande, la amplitud adimensional tiende a la unidad.

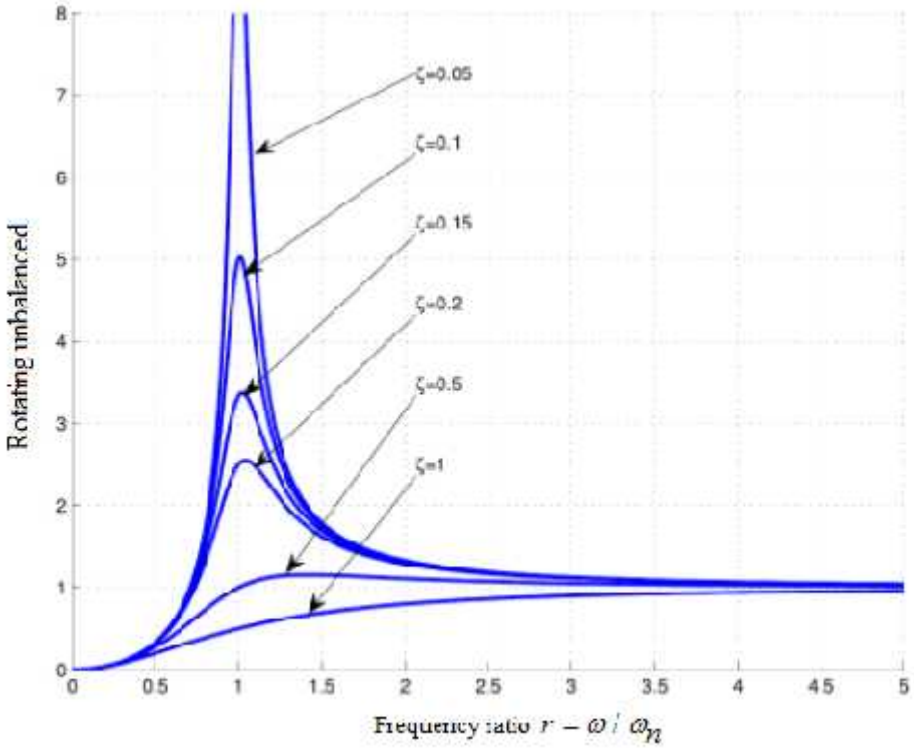


Fig (7.5). Plot of dimensionless amplitude Vs frquency Ratio

7.4. Equipos reciprocantes.

Esencialmente, las máquinas reciprocantes son mecanismos de manivela-pistón que convierten el movimiento giratorio del transmisor de fuerza, en movimiento alternativo oscilante o de balanceo a como se muestra en la Fig (7.6). Los mecanismos generalmente se diseñan y analizan bajo el supuesto de una velocidad de impulso constante. Sin embargo, si el par de entrada, es decir, el par requerido para imponer la velocidad constante, es altamente variable, las fluctuaciones distorsionan el movimiento de las piezas recíprocas y dar lugar a niveles de aceleración más altos, incrementándose la vibración de la máquina. Además, los pares de entrada muy variables pueden excitar la vibración torsional. Las cargas desbalanceadas que se generan en la operación de los equipos reciprocantes estacionarios, se transmiten a la cimentación, y por tanto deben ser considerados en su diseño.

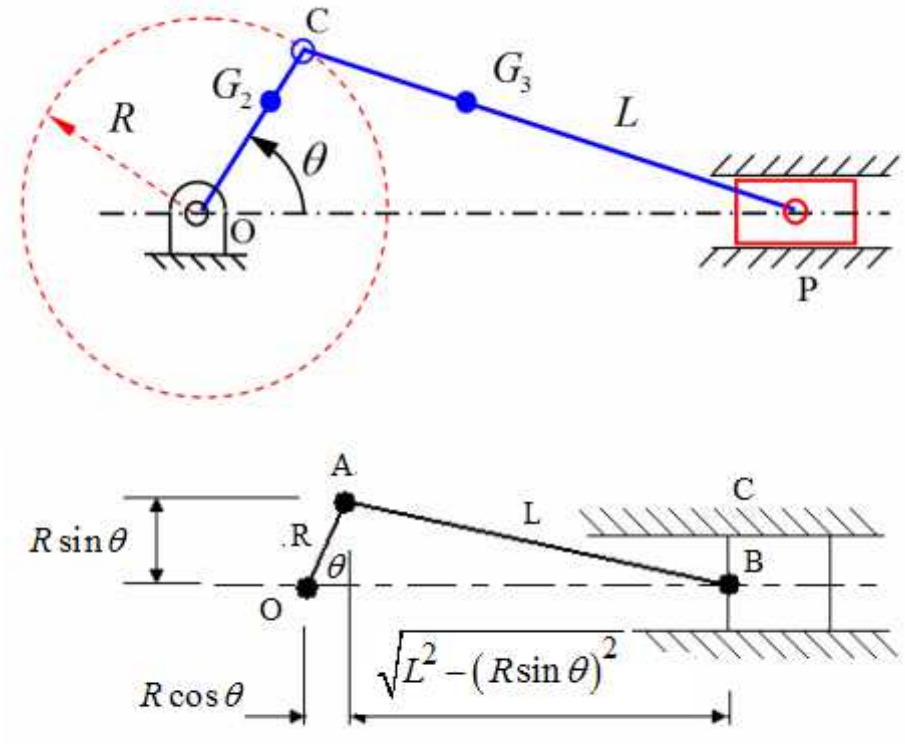


Fig (7.6): Principio fundamental de los sistemas reciprocantes.

Las máquinas que contienen elementos provistos de movimiento alternativo tienen algunos problemas dinámicos característicos. En muchos casos, su solución es bastante difícil y los diseñadores a menudo no pueden garantizar condiciones de trabajo tan manejables como las que se pueden alcanzar con máquinas que solo contienen elementos giratorios. En muchos casos ya es una tarea difícil evitar las fuertes vibraciones, que son incómodas para usuarios y peligrosas para la funcionalidad del equipo y para la seguridad estructural. A menudo es necesario recurrir a vasta experimentación incluso para alcanzar este objetivo limitado.

La mayoría de las máquinas reciprocantes se basan en el mecanismo de manivela, a menudo en la forma de un cigüeñal con varias bielas y elementos recíprocos. Tales dispositivos no pueden, en general, estar exactamente equilibrados: los efectos inerciales que ejercen sobre la estructura constituyen un sistema de fuerzas cuya resultante es variable con el tiempo. La misma configuración geométrica del sistema formada por el cigüeñal, las bielas y los elementos alternativos pueden ser bastante complejos y los cigüeñales no solo no poseen simetría axial sino que a menudo no tiene planos de simetría. En estas condiciones, el desacoplamiento entre los comportamientos axiales, torsionales y flectores, ya no es posible, si no como una aproximación muy grosera, y los modos de vibración se tornan muy complicados.

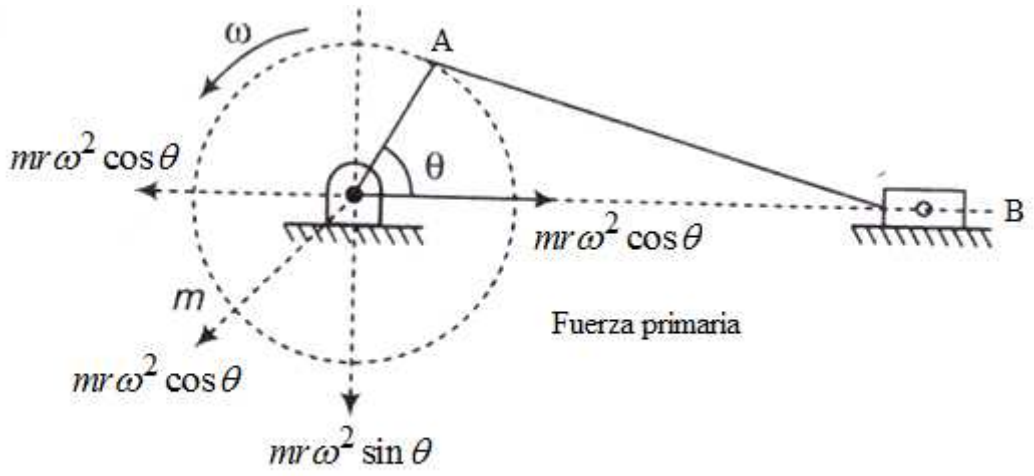


Fig (7.7): Balance de masas reciprocantes

El contrabalanceo, es el recurso empleado para reducir las fuerzas de inercia debido a las masas rotatorias, las que pueden ser reducidas o eliminadas completamente. En la Fig (7.7) se muestran las fuerzas que intervienen en el balance de masas reciprocantes. Normalmente esto se realiza en el diseño de los compresores, en máquinas de combustión interna, y en las bombas.

Además, las fuerzas externas que actúan sobre los elementos de las máquinas recíprocas suelen ser variables en el tiempo, a menudo con leyes periódicas, como, por ejemplo, las fuerzas ejercidas por los gases calientes sobre los pistones de motores de combustión interna reciprocantes. Su tiempo historia periódicos no son armónicos, pero una vez que se ha realizado el análisis armónico, se pueden considerar como la suma de muchos componentes armónicos cuyas frecuencias suelen ser múltiplos, por un número entero, o por una fracción racional de la velocidad de rotación de la máquina. Puede haber muchas posibilidades de resonancia entre estas funciones de forzamiento y las frecuencias naturales del sistema. En la mayoría de los casos, las vibraciones más peligrosas están relacionadas con los modos que son esencialmente torsionales, por tal razón la atención analítica de algunos sistemas reciprocantes se concentra en las vibraciones torsionales vibraciones, ocupándose marginalmente de las vibraciones axiales y compuestas. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que todas las vibraciones de los cigüeñales son vibraciones compuestas, y no hay desacoplamiento estrictamente posible.

Los tipos más comunes de máquinas recíprocas son bombas de pistón, compresores alternativos y motores de combustión interna. En la mayoría de los casos, las vibraciones más peligrosas están relacionadas con modos de vibración que son esencialmente torsionales.

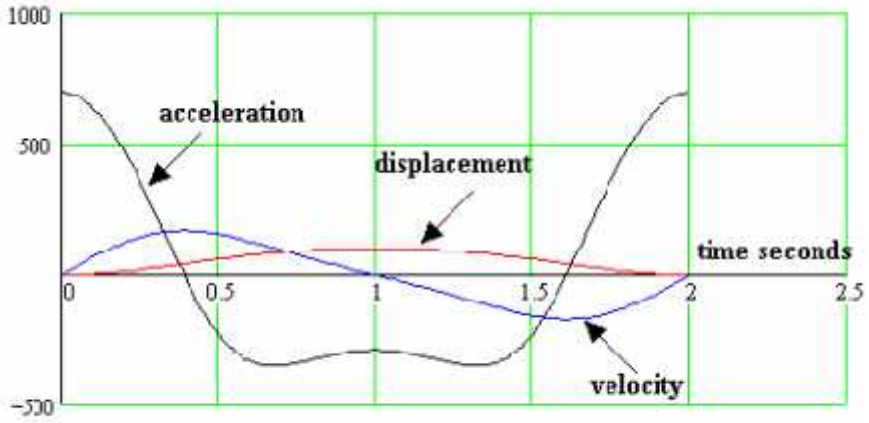


Fig (7.8): Gráficos tipicos de aceleracion, velocidad y desplazamiento en máquinas con movimiento alternativo.

Repetir el movimiento en línea recta se obtiene comúnmente utilizando cilindros neumáticos e hidráulicos, un tornillo estacionario y tuerca de desplazamiento rectilíneo, accionamientos con motores reversibles o engranajes de inversión, así como mecanismos de leva y seguimiento.

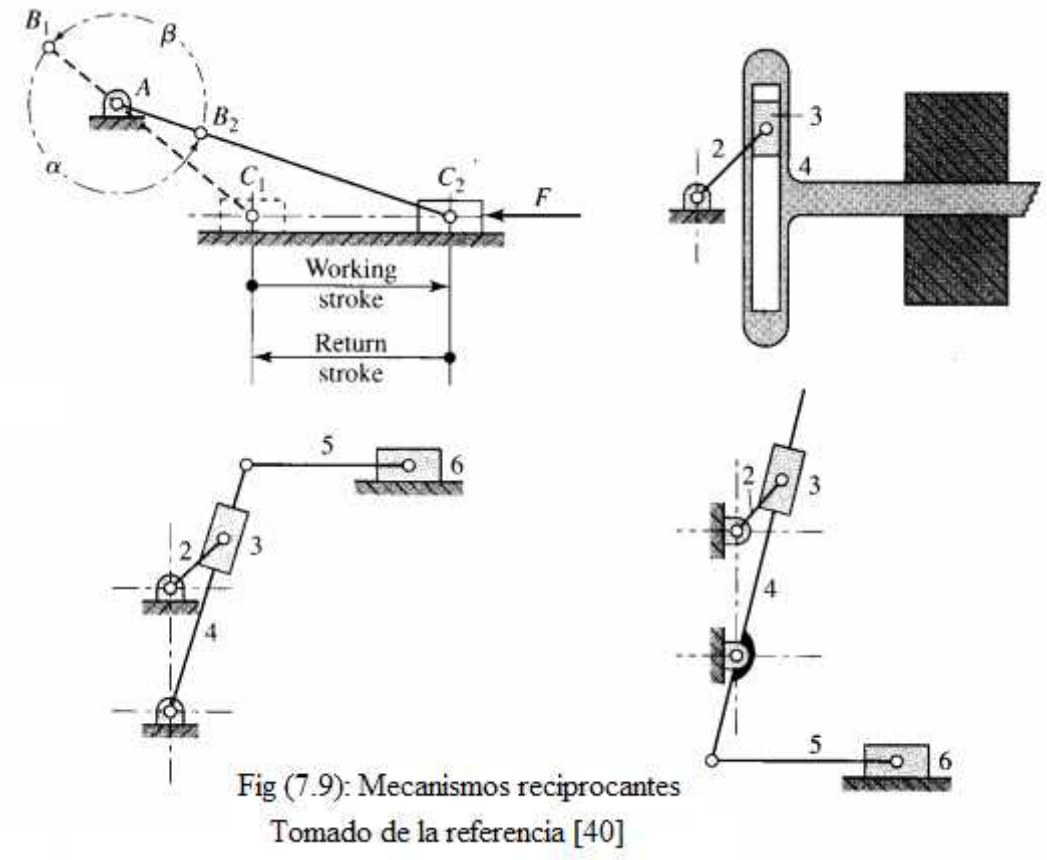


Fig (7.9): Mecanismos reciprocantes
Tomado de la referencia [40]

Una variedad de enlaces típicos para obtener movimiento recíproco se muestran en la Fig (7.9). [79]

Considérese un mecanismo básico de manivela deslizante que gira con una velocidad constante, mostrado en la Fig (7.10), cuyos componentes son: un pistón que se mueve horizontalmente dentro de un cilindro que le sirve de guía, una manivela de longitud R que gira alrededor de eje O y una varilla de longitud L, unida al pistón en el punto B y a la manivela en el punto A. Como puede verse en la figura, mientras el punto B se mueve longitudinalmente el punto A, por consecuencia, se mueve circularmente a una velocidad μ del resultado de este movimiento los puntos intermedios tendrán un movimiento elíptico.

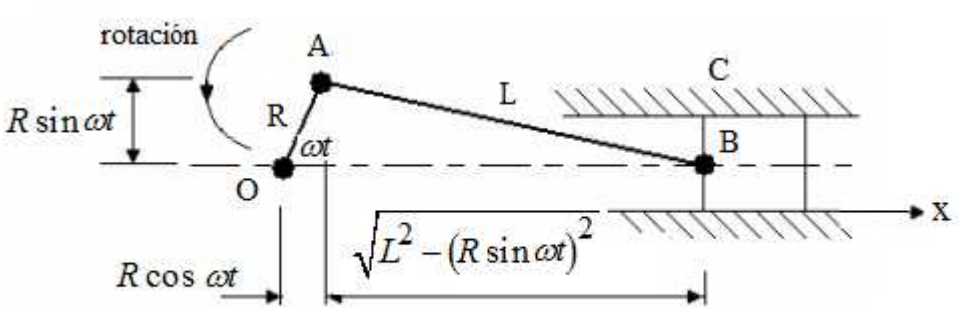


Fig (7.10): Mecanismo básico de manivela.

Sí se conoce velocidad angular μ de la manivela, puede determinarse el desplazamiento del pistón en cualquier instante de tiempo t, lo que permite obtener el desplazamiento, la velocidad y la aceleración del pistón mediante las ecuaciones siguientes:

$$x_p = \left(R + \frac{R^2}{4L}\right) - R\left(\cos\mu t + \frac{R}{4L}\cos 2\mu t\right) \quad (7.6)$$

$$\dot{x}_p = R\mu\left(\sin\mu t + \frac{R}{2L}\sin 2\mu t\right) \quad (7.7)$$

$$\ddot{x}_p = R\mu^2\left(\cos\mu t + \frac{R}{L}\cos 2\mu t\right) \quad (7.8)$$

Las fuerzas de impacto y de inercia producidas por el movimiento del pistón, se obtienen respectivamente multiplicando por la masa las Ecs (7.7) y (7.8).

Se observa que el primer término de las Ecs (7.7) y (7.8), varía con la frecuencia de rotación mientras que el segundo término varía con el doble de dicha frecuencia y su valor depende de la

relación R/L. Al primero de estos términos se le conoce como primario y al segundo como secundario.

En el segundo término, el factor R/L cobra importancia en la interpretación física de dichas ecuaciones. Si la longitud L tiende a infinito, el segundo término desaparece y el pistón se mueve con movimiento armónico simple. En cambio, si la longitud de la varilla L es finita, el movimiento del pistón es periódico pero no armónico.

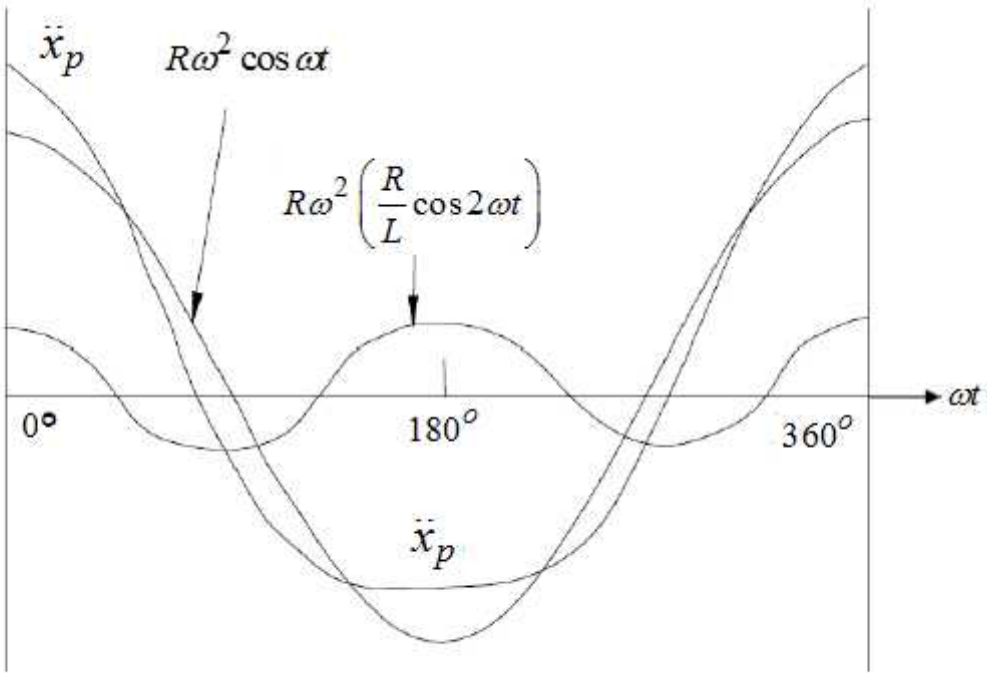


Fig (7.11): Aceleracion del pistón vs el ángulo de rotación de la manivela para $R/L = 0.25$

7.5. Equipos de maquinaria impulsora.

Los cimientos para máquinas con cargas de impacto son fuentes generalizadas y poderosas de vibraciones industriales. Estos cimientos principalmente transmiten cargas dinámicas verticales al suelo y generan vibraciones en que pueden afectar perjudicialmente a los edificios circundantes. Los efectos dinámicos van desde graves perturbaciones de las condiciones de trabajo para dispositivos sensibles y personas, hasta daños estructurales visibles. La frecuencia natural de las

vibraciones verticales de la base de la máquina y los registros de vibración completos de las vibraciones de la tierra y la estructura pueden predecirse antes de la instalación de las bases de la máquina. Se pueden usar diversas medidas para mitigar los efectos dinámicos de las fundaciones de máquinas de impacto.

Equipamiento, como forjar martillos y algunas prensas formadoras de metales, operan con impactos o choques regulados entre diferentes partes del equipo. Esta carga de choque a menudo se transmite al sistema de cimentación del equipo y es un factor en el diseño de la fundación.

Los martillos de forja cerrados generalmente funcionan cayendo un peso sobre el metal caliente, forzándolo a una forma predefinida. Si bien la intención es usar esta energía de impacto para darle forma al material, hay una transmisión de energía significativa, particularmente tarde en el proceso de formación. Por lo tanto, la energía cinética de preimpresión del choque se convierte en energía cinética posterior al impacto de toda la forja del martillo. Como todo el martillo se mueve hacia abajo, se convierte en una simple masa dinámica que oscila sobre su soporte medio. Este sistema debe estar bien amortiguado para que las oscilaciones decaigan suficientemente antes del siguiente golpe. La Fig (7.12) muestra un función de forzado horizontal típica a través de un golpe completo de una prensa de forja.

Las prensas de forjar realizan una función de fabricación similar como los martillos de forja, pero comúnmente son impulsados mecánicamente o hidráulicamente Estas prensas forman el material a bajas velocidades pero con mayores fuerzas. El sistema de impulso mecánico genera fuerzas dinámicas horizontales que el ingeniero debe considerar en el diseño del sistema de soporte. La estabilidad al balanceo del soporte y de la cimentación para estos equipos es muy importante.

Las prensas formadoras de metales mecánicos operan apretando y esquilando el metal entre dos troqueles. Fuerzas dinámicas de la prensa se desarrolla a partir de dos fuentes: el equilibrio mecánico de las partes móviles en el equipo y la respuesta de la presión en el marco a medida que el material se corta. Los desequilibrios en la mecánica del equipo pueden ocurrir tanto horizontal como verticalmente. El equipo de alta velocidad generalmente está bien equilibrado, mientras el de baja velocidad a menudo no está equilibrado porque las fuerzas de inercia a bajas velocidades son pequeñas. Las fuerzas dinámicas generadas por todas estas prensas pueden ser significativas ya que se transmiten a la fundación y propagadas desde allí hacia el suelo.

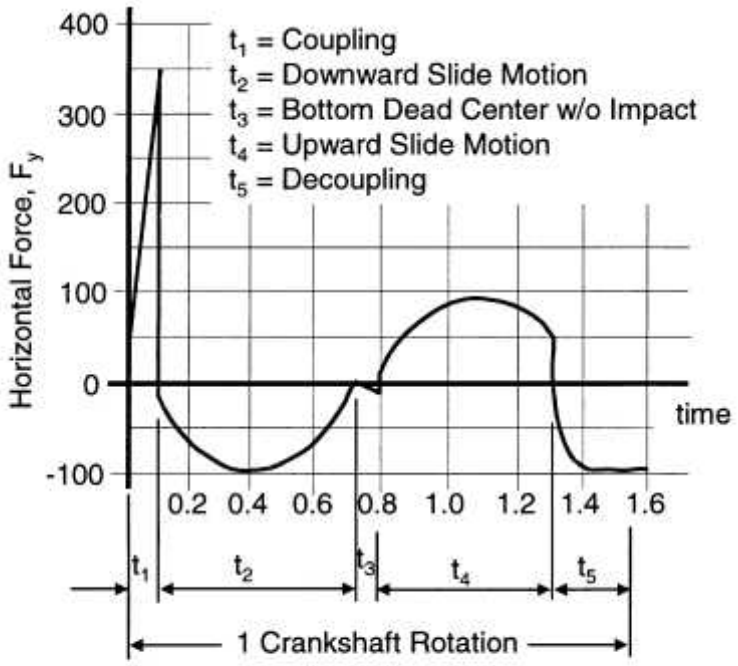


Fig (7.12): *Forcing function for a forging press.*

Source: ACI 351.3R-04 Foundations for Dynamic Equipment

Otras maquinarias que generan acciones dinámicas son las trituradoras de roca y trituradoras de metal. Mientras parte de las acciones dinámicas de este tipo de equipo tienden a basarse en la rotación desbalanceada, existe también un rango característico de indicadores dinámicos que varían de acuerdo a una operación particular. Máquinas que se mueven sobre las estructuras como son: grúas viajeras. Máquinas especiales como: molinos, prensas, trituradoras y rodillos de laminación.

7.6. Sistemas de fundaciones para máquinas sujetas a cargas dinámicas.

Se hará una revisión del estado del arte de los métodos de análisis para los diferentes sistemas de fundaciones para máquinas. Las cimentaciones de máquinas se diseñaron hasta hace poco mediante reglas básicas sin ningún análisis de esperanzas de las amplitudes de vibración. Por

ejemplo, una de esas reglas de diseño exigía un cimiento masivo de concreto reforzado, cuyo peso total fuera igual a por lo menos de tres a cinco veces el peso de la máquina soportada. Este enfoque de hecho ya no se usa porque ignora el efecto en el movimiento de todas las otras variables. Por supuesto, aumentar la masa de la cimentación disminuye la frecuencia de resonancia del sistema, pero quizás lo más importante, es que reduce su amortiguación efectiva. Obviamente, esta implicación no es no es lo que aquellos que aplicaban dicha regla tenían en consideración.

[80, 81]. Tras los estudios experimentales pioneros llevados a cabo por investigadores alemanes a principios de la década de 1930, se desarrollaron un número de procedimientos de análisis empíricos que se utilizaron ampliamente hasta la década de 1950. Estos métodos estaban enfocados en determinar únicamente la frecuencia natural de las fundaciones. A finales de la década de 1950, se introdujeron los conceptos de masa en fase y frecuencia natural reducida. El primero de estos conceptos asume que una cierta masa de suelo situada inmediatamente debajo de la cimentación, se mueve como un cuerpo rígido en fase con la misma. Mientras que la frecuencia natural reducida postula que la frecuencia natural es únicamente una función del área de contacto, del tipo de suelo y de su carga de soporte.

De las pruebas experimentales y los análisis posteriormente realizados, el concepto de masa en fase, m_s debajo de la base, se definió a como se muestra en la Fig (7.13).

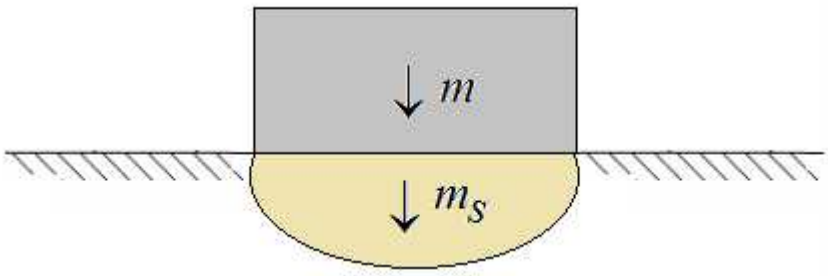


Fig (7.13): Masa en fase del suelo.

After Richart, F.E.Hall, J.R, and Woods, R.O. Vbration of soil and Foundations. 1970.

La teoría de la vibración para los sistemas de resorte-masa-amortiguador considera que el resorte es ingrávido y, en consecuencia, se ha derivado la conocida ecuación para determinar la frecuencia natural del SDF: $\mu_n = (k/m)^{1/2}$

Esta teoría se puede aplicar a vibraciones de cimentación solo si la masa del suelo que participa en la vibración también puede ser incluida. Si se tiene en cuenta el efecto de la masa del suelo, m_s la ecuación para determinar la frecuencia se convierte en (Kameswara Rao, 1998):

$$\mu_n = \left(\frac{k}{m + m_s} \right)^{1/2} \qquad f_n = \frac{1}{2®} \left(\frac{k}{m + m_s} \right)^{1/2} \qquad (7.9)$$

En el caso de los cimientos de máquinas, la masa de suelo, ms, que participa en la vibración debe ser determinado. Se han sugerido varios enfoques para determinar la masa efectiva o masa equivalente de suelo, m_s al calcular la frecuencia natural. Sin embargo, se encontró que la m_s variaba con la carga muerta, la fuerza de excitación, el área de la placa de cimentación, el modo de vibración y el tipo de suelo sobre el cual descansó el oscilador. Por lo tanto, es difícil obtener valores fiables de m_s para propósitos de diseño. Incluso si la masa en fase pudiera determinarse satisfactoriamente, esta información no permitiría evaluar directamente la amplitud de la vibración necesaria para el propósito del diseño. La realidad física contradice el concepto de masa en fase. Ninguna masa del suelo se mueve como un cuerpo rígido con la fundación. En cambio, las ondas de cortante y de dilatación emanan de la interfase suelo-cimentación, causando deformaciones oscilantes en la superficie y arrastrando parte de la energía de entrada. Los factores que tienen una influencia sobre estos fenómenos no pueden ser acomodados a través de un concepto artificial. De hecho, los primeros intentos de obtener valores específicos de la masa en fase fueron frustrados por la sensibilidad de esta masa al peso de la cimentación, al modo de vibración, al tipo de fuerza de salida, al área contacto y a la naturaleza del suelo subyacente.

Para los efectos de diseño, se han propuesto algunos métodos, cuya elección depende de la preferencia del diseñador.

Barkan (1962), Pauw, Ford y Haddow, Converse, Newcomb, Tschebotarioff y Ward, Lorenz, Crockett y Hammond, Rao y Nagaraj (Kameswara Rao, 1998) son algunos de los contribuyentes anteriores para el análisis y el diseño de las fundaciones de máquinas utilizando métodos empíricos y semiempíricos basados en pruebas e idealizaciones simples. Los detalles de estos métodos son discutidos por Richart, Hall y Woods (1970) y Kameswara Rao (1998). Sin

embargo, estos enfoques utilizan principalmente sistemas SDF y la determinación de la masa, (incluida la masa aparente de suelo que participa en vibraciones), la constante de resorte del suelo y la relación de amortiguamiento. Entonces las frecuencias naturales se determinan usando las Ec (7.9) y las respuestas son calculadas utilizando las soluciones disponibles de SDF (Rao, 1986; Kameswara Rao, 1998). En esto contexto algunas observaciones sobre algunos de estos parámetros, es decir, la masa aparente de suelo participando en las vibraciones, las constantes de resorte y los coeficientes de amortiguación necesarios para los cálculos se resumen a continuación.

Si se determina la masa aparente de suelo, m_s que participa en la vibración, la frecuencia natural del suelo se puede obtener fácilmente de la ecuación (5.9). Barkan (1962) ha sugerido que la masa del suelo vibratorio debe estar entre 2/3 y 1.5 multiplicado por la masa total del vibrador y los cimientos. Lorenz (Kameswara Rao, 1998) razonó a partir de sus investigaciones que la masa aparente del suelo no dependía de la presión de contacto de la unidad o del tamaño del área de contacto, sino que parecía aumentar con el incremento de la fuerza vibratoria. También concluyó que la frecuencia natural en sí misma solo se vio ligeramente afectada por el tamaño del área de contacto. Crockett y Hammond (Kameswara Rao, 1998) observaron que la frecuencia natural es una función de la velocidad de la onda de Rayleigh en el medio, que depende de su densidad y módulo elástico. También introdujeron el concepto de que la masa aparente de suelo es equivalente al suelo contenido en un bulbo de presión. Más tarde Rao y Nagaraj (Kameswara Rao, 1998) sugirió que el suelo contenido en el bulbo de presión correspondiente la densidad del suelo $^{\circ}$ es equivalente a la masa aparente del suelo. Esta sugerencia está basada en sus datos experimentales.

Los cálculos de la frecuencia de resonancia, y las respuestas de MFS requieren el uso de un tipo de sistema discreto idealizado de resortes-masas-amortiguador para lo cual es necesaria la determinación de la constante de resorte, de la constante de amortiguación y de la masa de la máquina y la base, así como de masa aparente del suelo que participa en la vibración. Uno de los enfoques importantes se debe a Barkan (1962) y se analiza brevemente a continuación.

7.7. Aproximación de Barkan.

Barkan (1962) utilizó las pruebas de carga de placas cíclicas para obtener las constantes de resorte equivalentes en varios modos de vibración. Se da una presentación detallada de estos resultados y expresiones por Kameswara Rao (1998). Por ejemplo, trazando la deformación recuperable o elástica contra la presión de contacto en la prueba de carga cíclica de una placa cargada en el modo vertical, podemos obtener el coeficiente de compresión elástica uniforme, Cu, como la pendiente de la porción lineal del gráfico. Entonces la constante de resorte, k_v en la dirección vertical puede ser obtenida como:

$$k_v = C_u \cdot A \qquad (7.10)$$

Dónde:

Cu = coeficiente de compresión elástica uniforme en la dirección vertical.

A = al área de la placa / fundación utilizada para la prueba.

Se puede notar que $C_u = k_s$ donde k_s se llama el módulo de reacción de subgrado del suelo.

C_u También está relacionado con las propiedades elásticas del suelo y se puede obtener a partir de la teoría de elasticidad como:

$$C_u = \frac{E}{1-\neg^2}\frac{C}{\sqrt{A}} \qquad (7.11)$$

Dónde

E, ¬ = Módulo de elasticidad de Young y la relación de Poisson del suelo / del semi-espacio, respectivamente.

A = área de la placa / base

C = constante en función de la forma y la flexibilidad de la placa / cimentación.

Los valores de C (c_f para placa flexible, c_r para placa rígida) están dados por Kameswara Rao (1998, 2000). De la ecuación (7.10) se puede observar que C_u es inversamente proporcional al área de contacto del plato. Lo mismo se puede usar para calcular el valor de C_{u2} para una placa de área A_2, conociendo el valor de C_{u1} para la placa del área A_1 como:

$$\frac{C_{u2}}{C_{u1}} = \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{1/2} \qquad (7.12)$$

Expresiones similares para otros modos de prueba (lateral, horizontal, rotacional, etc.) pueden ser obtenidos según lo dado por Barkan (1962) y son resumidos por Kameswara Rao (1998, 2000). Dado que no existe una forma directa de obtener la relación de Poisson, ¬ de la prueba de carga cíclica de la placa, la misma es obtenida de otras pruebas de laboratorio y / o de campo relevantes (Kameswara Rao, 1998, 2000). Dado que generalmente se observa que los valores de respuesta elástica no son muy sensibles a una amplia variación en los valores de la relación de Poisson, generalmente los siguientes valores se toman en la ausencia de resultados de prueba específicos (Richart, Hall y Woods, 1970): ¬ Para suelos no cohesivos = 0:25 a 0:3 ¬ parar suelos cohesivos = 0:35 a 0:45

En consecuencia, un valor promedio de ¬ = 0.3 para suelos sin cohesión y 0.4 para suelos cohesivos podría ser utilizado para fines computacionales en ausencia de datos obtenidos de pruebas.

7.8. Aproximación de Tschebotarioff.

En un intento de mejorar los métodos para evaluar la frecuencia de resonancia de las fundaciones de la máquina apoyada en diferentes suelos, se ha desarrollado una expresión para una frecuencia natural reducida del sistema. A partir de la Ec (7.10) la constante de resorte k fue reemplazada

por $k' A$, donde k' es el módulo dinámico de reacción de sub-grado y A es el área de contacto de la cimentación contra el suelo. Con esta sustitución, la Ec (7.9) toma la siguiente forma:

$$f_n = \frac{1}{2®}\sqrt{\frac{k' A}{m + m_s}} \qquad (7.13)$$

Reorganizando la Ec (5.13), se tiene:

$$f_n = \frac{1}{2®}\sqrt{\frac{A}{W}}\sqrt{\frac{k' g}{1+\frac{m_s}{m}}} = \frac{1}{\sqrt{q_0}}\, f_{nr} \qquad (7.14)$$

En la Ec (7.14), $q_0 = \frac{A}{W}$ y $f_{nr} = \frac{1}{2®}\sqrt{\frac{k' g}{1+\frac{m_s}{m}}} = f_n\sqrt{q_0}$ (7.15)

Donde:

f_n = frecuencia cíclica natural

q_0 = presión de contacto vertical promedio entre la base de la cimentación y el suelo, y el resto de los términos se agrupan y se llaman frecuencia natural reducida f_{nr}

Luego de la evaluación de un número limitado de casos disponibles, Tschebotarioff propuso curvas, que relacionan la frecuencia natural reducida f_{nr} con

El área de la base de la cimentación para varios tipos de suelos. Esta relación aparece como una línea recta en el diagrama que se muestra en la Figura (5.14).

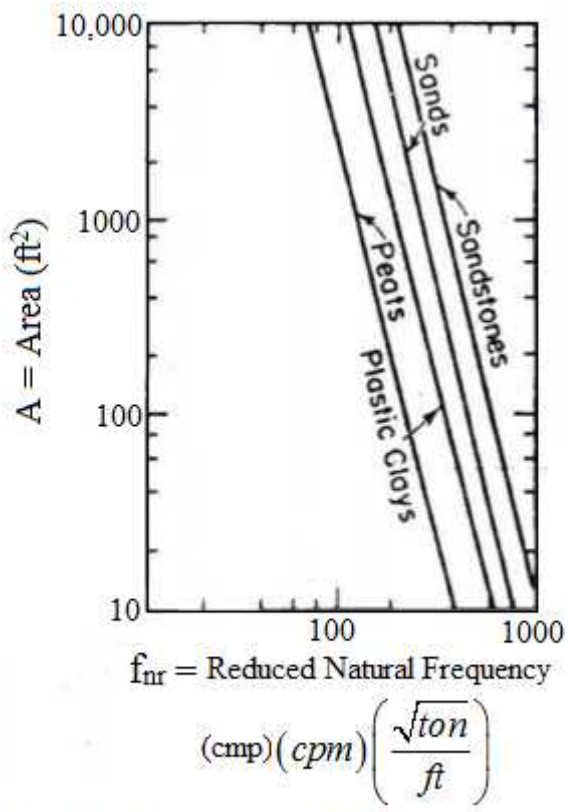


Fig (7.14): Tschebotarioff's "Reduced Natural Frequency

Para calcular la frecuencia de resonancia para un tamaño de cimiento dado, en un suelo particular, la Fig (5.14) da un valor de f_{nr} que luego lleva a f_n mediante el uso de la Ec (7.15) y de los valores de diseño de q_0.

Aunque este método no carecía de mérito, a menudo se interpretaba que el factor más importante en el diseño de la cimentación de la máquina era la presión de contacto en el suelo. Por lo tanto, el diseño se basó en los valores de capacidad de carga del suelo tomados de los códigos de construcción.

Además de los inconvenientes mencionados anteriormente, estas viejas reglas solo se referían a la frecuencia de resonancia, sin brindar información sobre las amplitudes de vibración que son fundamentalmente necesarias para los propósitos de diseño.

7.9. Análisis de Lysmer y Richart.

Ha como hemos visto en la parte 3, en la década de 1960, Lysmer obtuvo una solución para la vibración axisimétrica vertical, discretizando la superficie de contacto en anillos concéntricos con tensiones uniforme verticales pero dependientes de la frecuencia, consistentes con las condiciones de contorno.

Los desarrollos teóricos más importantes de este período fueron el descubrimiento por Hsieh y Lysmer de que el comportamiento dinámico de una cimentación masiva con carga vertical, puede representarse por un oscilados masa-resorte-amortiguador de un solo grado de libertad con rigidez dependiente de la frecuencia y coeficientes de amortiguación. Lysmer dio un paso más al sugerir el uso de los coeficientes de rigidez y amortiguamiento, independientes de la frecuencia, para aproximar la respuesta en el rango de frecuencia baja y media.

$$K_v = \frac{4GR}{1-\neg} \qquad C_v = \frac{3.4R^2}{1-\neg}\sqrt{G^\circ} \qquad (7.16)$$

En el que: K_v = Constante de muelle (rigidez), C_v = Constante de amortiguador (amortiguación), R = Radio de una placa circular rígida. Área de carga, G = módulo de corte del semi-espacio homogéneo, ν = relación de Poisson y ρ = densidad masiva del suelo

El éxito de la aproximación de Lysmer, a menudo llamado analogía de Lysmer, en la reproducción con muy buena precisión, la respuesta real del sistema tuvo un profundo efecto en el desarrollo posterior y aplicación de ingeniería de las teorías del 'medio espacio'. Richart y Whitman extendieron la Analogía de Lysmer demostrando que todos los modos de vibración pueden ser estudiados por medio de sistemas de amortiguadores de masa-resorte de parámetro concentrado que han seleccionado correctamente parámetros independientes de la frecuencia. Las oscilaciones del eje simétrico (vertical y torsional) de un la base cilíndrica se puede representar

mediante un sistema de 1 grado de libertad descrito por la ecuación general del SDF sujeto a vibraciones forzadas.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = p(t) \qquad (7.17)$$

Por otro lado, los dos modos anti simétricos de oscilación, traslación horizontal y balanceo de una fundación cilíndrica están acoplados y pueden ser representados por un sistema de dos grados de libertad caracterizados por la masa efectiva y el momento de inercia de masa, los dos valores efectivos de amortiguación para ondulación y balanceo y los dos valores efectivos de rigidez. Para cada uno de estos cuatro modos de excitación, diferentes valores los parámetros de inercia, rigidez y amortiguación son necesarios. Whitman y Richart sugirieron la elección de la rigidez apropiada para bajas frecuencias, y los valores promedio de amortiguación en el rango de frecuencias en el que la resonancia generalmente ocurre. Con la intención de obtener una mejor concordancia entre las frecuencias resonantes de los parámetros discretos y el sistema real, recomendaron que una masa ficticia, o momento de inercia de masa, se agregará a la masa de cimentación real, o al momento de inercia de la masa. La necesidad de tal recomendación surgió no de la existencia de una masa de suelo identificable moviéndose en fase con la base, sino más bien por el hecho de que en realidad la rigidez disminuye con el aumento de la frecuencia, en lugar de permanecer constante e igual como en las rigideces estáticas como se asume en el modelo. En otras palabras, en lugar de disminuir k, el modelo de parámetro agrupado aumenta m para mantener la frecuencia de resonancia μ_r sin alterar. Recuérdese que μ_r es proporcional a la raíz cuadrada de (k / m).

Whitman y Richart y más tarde, Richart, Woods y Hall y Whitman presentaron expresiones para estos parámetros para cuatro modos de vibraciones. La Tabla (5.2) muestra estas expresiones, que han disfrutado una popularidad significativa durante décadas. Deberá tenerse en cuenta que en dicha tabla, I_x e I_z son momentos de inercia de masa alrededor del eje horizontal y vertical respectivamente y la relación de amortiguamiento = C/C_{cr} donde $C_{cr} = 2\sqrt{km}$ o $C_{cr} = 2\sqrt{kI}$ para modos de vibración de torsión o rotación, con I_x o I_z para balanceo o torsión,

respectivamente. Usando la tabla, se puede calcular la rigidez dinámica aplicando directamente la fórmula, mientras que para calcular la relación de amortiguamiento del suelo de la base, primero se debe determinar la relación de masa y sustituir su valor en la fórmula dada. El valor de la masa ficticia, se agrega con la masa de la base para mantener la frecuencia de resonancia sin cambios.

Mode	Vertical	Horizontal	Rocking	Torsional
Stiffness	$\frac{4GR}{1-\nu}$	$\frac{8GR}{2-\nu}$	$\frac{8GR^3}{3(1-\nu)}$	$\frac{16GR^3}{3}$
Mass ratio $\overline{m}$	$\frac{m(1-\nu)}{4\rho R^3}$	$\frac{m(2-\nu)}{8\rho R^3}$	$\frac{3I_x(1-\nu)}{8\rho R^5}$	$\frac{I_z}{\rho R^5}$
Damping ratio	$\frac{0.425}{\overline{m}^{1/2}}$	$\frac{0.29}{\overline{m}^{1/2}}$	$\frac{0.15}{(1+\overline{m})\overline{m}^{1/2}}$	$\frac{0.5}{1+2\overline{m}}$
Fictitious added mass	$\frac{0.27m}{\overline{m}}$	$\frac{0.095m}{\overline{m}}$	$\frac{0.24Ix}{\overline{m}}$	$\frac{0.24Iz}{\overline{m}}$

Table (7.2): Equivalent lumped parameters for analysis foundation on elastic half space. After Gazetas, G., Analysis of Machine Foundations, State of the Art of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Volume 2, 1983.

Lysmer y Richart en 1966 presentaron en sus análisis un método analógico simplificado para el comportamiento dinámico de zapatas en un semi-espacio elástico que se puede aplicar para todas las frecuencias de movimiento constante. También calcularon la respuesta transitoria causada por una carga arbitraria de pulso, usando las soluciones de estado estacionario. Los componentes de este modelo análogo, consisten en masa, resorte y amortiguador y son independientes de la frecuencia de la fuerza de excitación. Este enfoque facilita la aplicación de métodos clásicos de teoría elástica para el estudio del comportamiento dinámico utilizando modelos más simples de masa, resorte y amortiguador.

Las investigaciones están limitadas al caso de la fuerza vertical dinámica axisimétrica en una zapata circular rígida, aunque puede ser extendido a otros modos. Se ha supuesto que el suelo es elástico, homogéneo e isotrópico y solo las tensiones normales se transfieren al área de contacto entre el suelo y la fundación.

Importantes detalles del método también están dados por Richart, Hall y Woods (1970) y Kameswara Rao (1998). Los componentes del modelo analógico equivalente se obtienen de considerando un SDF que consiste en masa, resorte y un amortiguador como se muestra en la Fig (7.15). [82].

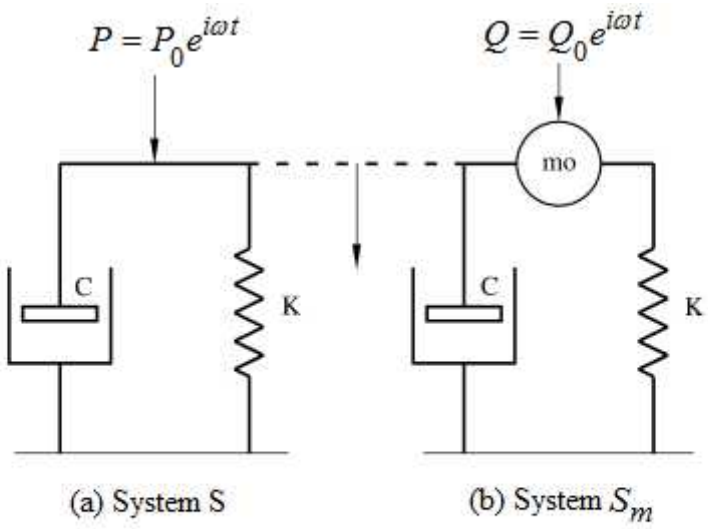


Fig (7.15): Simple damped oscillators.

Foundation Design: Theory and Practice N. S. V. Kameswara Rao 2011.

En el modelo análogo simplificado, m_0 es la masa de la cimentación, $k = \frac{4Gr_0}{1-\neg}$ (7.18) es la constante elástica equivalente y $c = \frac{0.85kr_0}{V_s} = \frac{3.4}{1-\neg} r_0^2 \left(\frac{\circ G}{g}\right)^{1/2}$ (7.19)

Dónde:

G = módulo de cortante del suelo

r_0 = de radio de la base circular

$\circ$ = unidad de peso volumétrico del suelo

g = aceleración debida a la gravedad

V_s = velocidad de la onda de corte en el medio del suelo.

La precisión de los resultados usando el modelo analógico con la elección de m_0, c y k como de conformidad con las Ecs (7.18) y (7.19) se pueden observar claramente comparando estos resultados con los de la teoría de la elasticidad del semi-espacio obtenida por Lysmer (1966). Lysmer y Richart también compararon los resultados con los obtenidos de las pruebas de campo reportados por Fry y otros (Richart, Hall y Woods, 1970) los que resultaron satisfactorios.

Para estos valores de c y k, se puede demostrar que la resonancia ocurre solo cuando la relación de masas $b_0 \geq 0.36$

Dónde:
$$b_0 = \frac{(1-\neg)m_0 g}{4^\circ r_0^{\,3}} \qquad (7.20)$$

En consecuencia, las expresiones aproximadas de frecuencia y amplitud en resonancia pueden ser obtenido como:

$$\mu_{res} = \frac{V_s}{r_0}\left(\frac{b_0 - 0.36}{b_0}\right)^{1/2} \qquad (7.21)$$

Todos los modos de vibración de una zapata circular rígida, o un círculo equivalente para una forma rectangular, que descansa sobre un medio espacio elástico puede expresarse en términos de parámetros analógicos de un sistema equivalente de un solo grado de libertad, en el que los parámetros son independientes de la frecuencia. Hall siguió el enfoque de Lysmer (Richart, Hall y Woods, 1970) y determinó los parámetros analógicos para balanceo, deslizamiento en dirección horizontal, y modos torsionales.

7.10. Análisis general de sistemas máquinas-fundación-suelo usando modelos análogos.

La práctica moderna de la construcción industrial requiere soluciones a muchos problemas relacionados con fundaciones de máquinas. El aspecto más importante que garantiza el rendimiento exitoso de la máquina es el comportamiento dinámico adecuado de los sistemas de cimiento-suelo. Las vibraciones debidas a las máquinas pueden causar daños a las estructuras cercanas o incluso a las máquinas mismas. Por lo tanto un conocimiento del comportamiento dinámico de la cimentación, la energía transmitida a través del suelo y la respuesta del cimiento, es esencial para el diseño adecuado del sistema. Las instalaciones de máquina pueden, en general, ser soportadas por bloques rígidos que descansan directamente en el suelo o en pilotes. La elección del sistema de cimentación depende de la resistencia y la compresibilidad características del suelo y los criterios de rendimiento requeridos.

El análisis dinámico racional de los sistemas cimentación- suelos ha sido llevado a cabo por Sung, Quinlan, Richart, Hall y Woods, Lysmer y Richart, y Lysmer y Kuhlemeyer, Kausel, Luco y Westman, Ahmad y Banerjee y varios otros (Richart, Hall y Woods, 1970; Kameswara Rao, 1998). Además de los métodos que son empíricos o semiempíricos, las metodologías que se utilizan para predecir el comportamiento dinámico del suelo de la cimentación de la máquina para sistema (MFS) son: (1) enfoque teórico del semi- espacio y (2) métodos que utilizan la representación de un sistema discreto utilizando parámetros analógicos equivalentes. Se han obtenido soluciones de forma cerrada para cimientos que descansan en un semi-espacio elástico homogéneo bajo diferentes modos de vibración para cimientos de forma regular (circular, rectangular) sujetos a cargas armónicas (Richart, Hall y Woods, 1970; Kameswara Rao, 1998). Basado en los resultados del semi-espacio elástico y el uso de métodos de elementos finitos con límites absorbentes de ondas y métodos de elementos de contorno, se han desarrollado algunos modelos analógicos simplificados que esencialmente se basan en representación discreta del sistema.

En general, las máquinas transmiten cargas dinámicas desbalanceadas y momentos de naturaleza general que consiste en varias frecuencias de diferentes amplitudes generadas en varios lugares. Las fuerzas pueden estar presentes en los seis modos de vibración y, por lo tanto, el análisis de respuesta completa de un sistema cimiento-suelo-maquina MFS requiere la formulación de

ecuaciones de movimiento que generalmente están acopladas y proporcionan una solución en los seis modos (Kameswara Rao, 1998). Las ecuaciones de movimiento acopladas de un sistema cimiento-suelo-maquina MFS serán considerados en la siguiente sección.

El análisis de Fourier se usa para problemas que involucran excitaciones arbitrarias de naturaleza periódica. Para fuerzas excitantes de naturaleza general, soluciones que usan técnicas de integración numérica pueden ser utilizadas (Venugopala Rao, 1995). Estos métodos dan la solución total a las ecuaciones acopladas de movimiento con funciones de forzado arbitrarias y se puede aplicar a cualquier sistema de ingeniería con cualquier número de grados de libertad (finitos), incluidos los sistemas continuos. Sin embargo, el método es ilustrado para sistemas de sistemas máquina -fundación -suelo con seis grados de libertad (tomando el bloque de base como un cuerpo rígido, como normalmente se hace, sometido a fuerzas dinámicas de naturaleza general en términos de amplitudes, direcciones, ubicaciones y dependencia del tiempo Se pueden obtener soluciones totales con muy poco esfuerzo de computación y, por lo tanto, son fácilmente adaptables para analizar una amplia variedad de problemas de interés práctico. Estos métodos son particularmente adecuados para el diseño y análisis generales de cimentaciones de máquinas. Los parámetros analógicos de Lysmer (Richart, Hall y Woods, 1970) se usan para modelar el medio del suelo, sin embargo, otros parámetros modificados también se pueden usar si el modelado físico así lo requiere como los obtenidos por Wolf (1988), Mita y Luco (1989), Kameswara Rao (1998).

7.11. Requerimientos generales para cimentaciones de máquinas.

El diseño de los cimientos de las máquinas sujetas a cargas dinámicas es más complejo que el de los cimientos que soportan solamente cargas estáticas. Las cargas de naturaleza dinámica pueden ser el resultado de varias causas tales como movimiento vibratorio de máquinas, movimiento de vehículos, impacto de martillos, terremotos, olas de viento, explosiones nucleares, explosiones de minas, hincado de pilotes, etc. Por lo tanto, es necesario entender los efectos de las fuerzas dinámicas en el suelo de la fundación. En general, una cimentación de máquina pesa varias veces más que la máquina que soporta. También la carga dinámica asociada con las partes móviles de una máquina es generalmente pequeña en comparación con su carga estática. Sin embargo, en las

cimentaciones de máquinas, las cargas dinámicas actúan repetitivamente durante un período de tiempo muy largo, por lo tanto, es necesario que el suelo sea elástico, o de lo contrario la deformación aumentará con cada ciclo de carga hasta que la amplitud de la deformación se hace más grande y fuera del límite aceptable. La amplitud de movimiento de una máquina y su frecuencia de operación son los parámetros más importantes que deben ser determinados en el diseño de una cimentación de máquina, además deberá determinarse la frecuencia natural del sistema MFS.

Algunos de los requisitos importantes de un sistema máquina-cimiento-suelo (MFS) se pueden enumerar de la siguiente manera (Richart, Hall y Woods, 1970; Srinivasulu y Vaidyanathan, 1976; Kameswara Rao, 1998):

La cimentación debe soportar las cargas superpuestas sin causar fallas por cizalladura o aplastamiento del suelo subyacente.

El asentamiento debe estar comprendido dentro de los límites permisibles.

El centro de gravedad combinado de la máquina y la cimentación debe estar en la línea vertical que pasa a través del centro de gravedad del plano base.

No debería ocurrir resonancia; para lo cual la frecuencia natural del sistema de fundación-suelo debe ser ya sea demasiado grande o demasiado pequeño en comparación con la frecuencia de funcionamiento de las máquinas. Para máquina de baja velocidad, la frecuencia natural debe ser alta y viceversa.

La amplitud del movimiento en las frecuencias de operación no debe exceder la amplitud límite, que es generalmente especificado por los fabricantes de máquinas. Si la amplitud calculada está dentro del límite tolerable, pero es cerca de la resonancia, es importante evitar esta situación.

Cuando sea posible, la cimentación debe planificarse de tal manera que permita una posterior modificación de la frecuencia natural al cambiar el área o la masa de la base, según sea posteriormente necesario.

Desde el punto de vista práctico, es recomendable que el nivel del agua subterránea debe ser lo más bajo posible, esto limita las propagaciones de las vibraciones, el agua subterránea es un buen conductor de la propagación ondulatoria, particularmente de las ondas P. Las cimentaciones de las máquinas deben separarse de los componentes de construcción adyacentes mediante articulaciones de expansión, y aislar las tuberías de vapor o aire caliente incrustadas en la cimentación. También deberá preverse que el desplante de la cimentación de las máquinas debe tomarse a un nivel inferior respecto al nivel de desplante de los cimientos de edificios cercanos.

Los datos específicos requeridos para el diseño de las cimentaciones sujetas a régimen dinámico varían según el tipo de máquina. Sin embargo, los requisitos de datos para el diseño son básicamente los diagramas de cargas estáticas y dinámicas ejercidas por la máquina en su fundación, los que deben mostrar la magnitud y posición de las mismas. También deberán conocerse la potencia del motor y su velocidad de operación, así como diagramas que muestren las partes incrustadas, las aberturas, las ranuras para los pernos de cimentación, etc.

La naturaleza del suelo y sus propiedades estáticas y dinámicas, son de suma importancia.

Las amplitudes de desplazamiento o velocidad o aceleración del MFS deben estar dentro de límites permisibles. Estos son generalmente prescritos por los fabricantes de la máquina.

Algunos criterios generales de diseño (IS: 2974-1966, 1966) se muestran en la Fig (7.16).

Los niveles tolerables de vibración están referidos a la percepción humana; problemas de mantenimiento; daño potencial a máquinas o instrumentos; daño potencial de los componentes estructurales; y las dimensiones de la cimentación de la máquina.

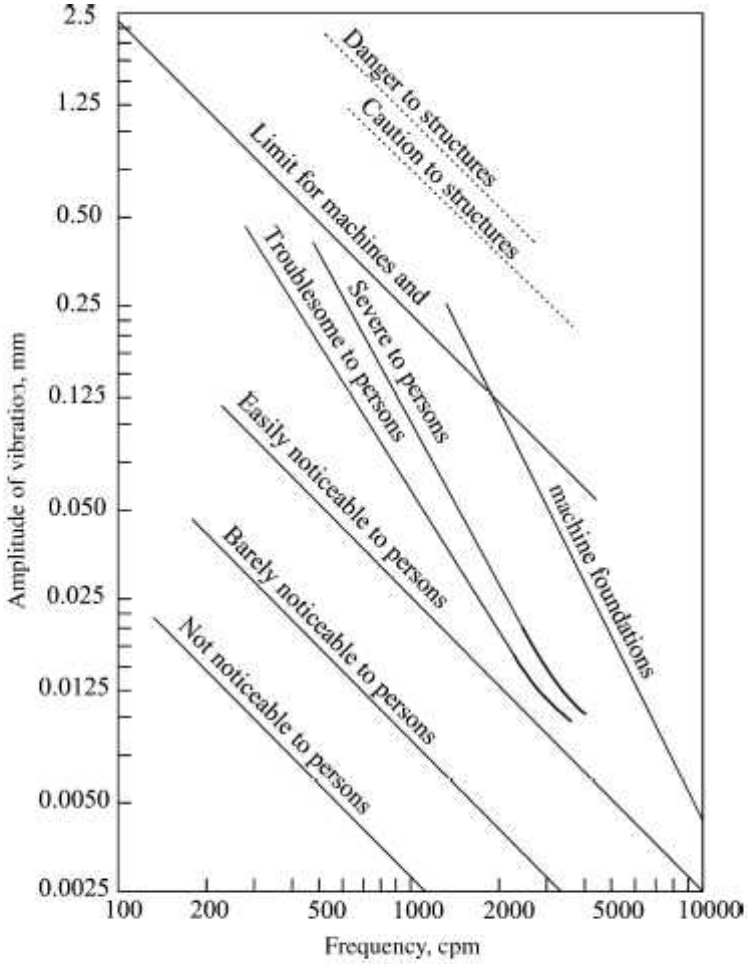


Fig (7.16): Limiting amplitudes for vertical vibration. (Richart, F.E./Hall, J.R./Woods, R.D., *Vibrations of Soils and Foundations*, 1st Edition, © 1970, p. 311. Printed and electronically reproduced by permission of Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.)

La selección del tipo de fundación apropiada para máquinas vibratorias, dependerá de las acciones permanentes, dinámicas operativas, o eventuales a las que estará sujeta, y que deberá resistir durante su vida útil. Las acciones que se generan sobre las cimentaciones de maquinarias varían según sean máquinas rotativas, máquinas reciprocantes, máquinas de impacto; y fundamentalmente la selección del tipo de cimentación más conveniente depende de la velocidad de operación del equipo, y de las condiciones del suelo.

Las fuerzas dinámicas generadas durante la operación de la máquina, generalmente proporcionadas por el fabricante del equipo, representan los valores de algún desbalanceo de sus fuerzas internas. Estas fuerzas se originan por diversas causas, las cuales dependen del tipo, potencia, velocidad de operación, modelo, instalaciones y mantenimiento de la máquina.

En dependencia de su construcción, las fundaciones someras para máquinas con cargas dinámicas suelen clasificarse genéricamente en los siguientes grandes tipos: fundaciones macizas tipo bloques, fundaciones tipo cajones o caissons, fundaciones tipo marco con un deck superior de vigas y losa apoyado sobre miembros verticales que forman marcos con las vigas del deck y fundaciones tipo muro. Fig (7.17).

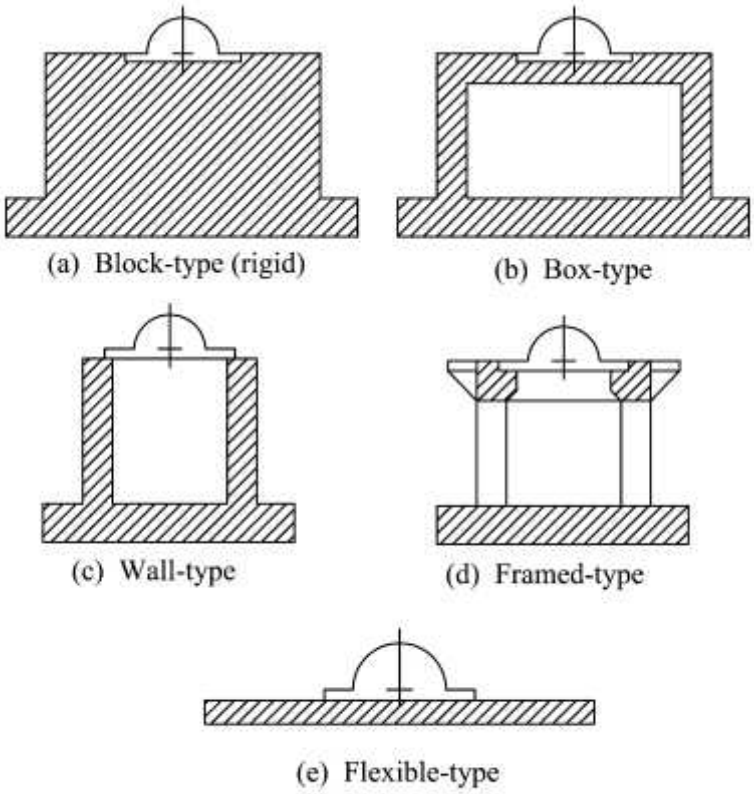


Fig (7.17): Tipos comunes de fundaciones para máquinas.

7.12. Fundaciones del tipo bloque rígido.

Un bloque de cimentación es una masa sólida rígida de concreto reforzado, apoyada en un medio elástico, generalmente con aberturas requeridas, depresiones, pedestales elevados, recortes, nichos de perno y proyecciones en voladizo extendidas. Las cimentaciones de bloque se consideran rígidas en comparación con el suelo sobre el que directamente se desplantan, por lo

tanto se supondrá que bajo la acción de fuerzas desequilibradas, solo sufren movimientos de desplazamientos y rotaciones, a como se muestra en la Fig (7.18). El sistema de bloque rígido posee seis grados de libertad, cuyo movimiento se puede resolver en tres componentes de desplazamientos a lo largo de los tres ejes, y tres de rotaciones a su alrededor. De los seis componentes del movimiento, la traslación y la rotación sobre el eje z ocurre independientemente de cualquier otro componente.

Sin embargo, la traslación a lo largo del eje x y la rotación alrededor del eje y así como la traslación a lo largo del eje **y** y la rotación alrededor del eje x son movimientos acoplados. El uso de este tipo de cimentación depende principalmente de la calidad del suelo, y se diseñan casi siempre como estructuras rígidas, adoptando como criterio de diseño normalmente aceptado la respuesta dinámica de la cimentación, la que depende de la carga dinámica actuando en la misma, de la masa, las dimensiones, y las características del suelo.

Los parámetros que influyen en el diseño de una cimentación para equipo dinámico son: el centro de gravedad; el momento de inercia de la base; el momento de inercia de masas; la rigidez y el amortiguamiento del suelo de fundación. Los tres primeros son las propiedades geométricas del sistema de cimentación del equipo dinámico, mientras que los dos últimos son propiedades físicas del suelo.

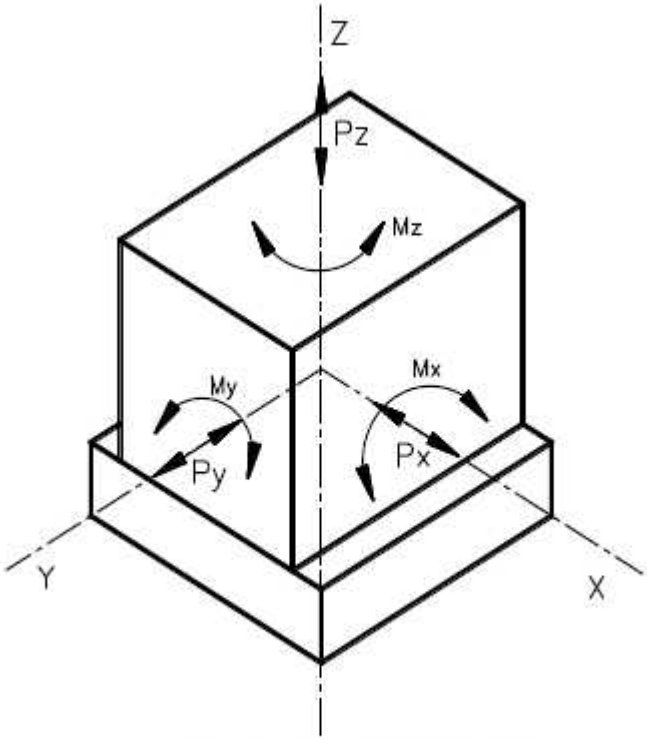


Fig (7.18): Grados de libertad de una cimentación del tipo bloque rígido

Es necesario determinar el módulo de corte G y el coeficiente de Poisson υ preferiblemente in situ por evaluación dinámica. En la teoría propuesta por Barkan [83] se considera el suelo como un resorte equivalente lineal no amortiguado, lo que requiere conocer el coeficiente de compresión elástico uniforme C_z, conocido como módulo de reacción de subgrado, definido como la relación del esfuerzo de compresión, entre el asentamiento elástico; el coeficiente de corte elástico uniforme C_x; el coeficiente de compresión elástico no uniforme C_ϕ; el coeficiente de corte elástico no uniforme C_ψ los que intervienen en la determinación de la rigidez del suelo para los diferentes modos de vibración.

El coeficiente de compresión elástico uniforme es función del tipo de suelo y de la geometría y forma de la cimentación. No obstante, para propósitos prácticos se asume a menudo sólo en función del tipo de suelo.

Para las máquinas sobre cimientos de bloques, es suficiente usar formulaciones simples que son ecuaciones de movimiento considerando el bloque como un cuerpo rígido soportado en un medio elástico, es decir, suelo. Mientras que la mayoría de los aspectos concernientes a la máquina y la cimentación son satisfactoriamente atendidos por estos procedimientos, hay algunos aspectos, como se detalla a continuación, que no pueden ser completamente manejados por estos métodos computacionales manuales. Uno de estos aspectos es la excentricidad de la cimentación, la que en caso resulte mayor que el valor permitido, el modo de vibración vertical ya no quedará desacoplado de los modos lateral y rotatorio (Barkan, 1962; Bhatia, 2008). Sin duda, es fácil escribir ecuaciones de movimiento para estos modos desacoplados, pero obtener soluciones cerradas para esas ecuaciones no es tan simple, y los cálculos pueden resultar complejos. Además, obtener un historial de respuesta transitoria puede ser una tarea tediosa, aunque es posible evaluar la respuesta transitoria en cualquiera de las frecuencias definidas.

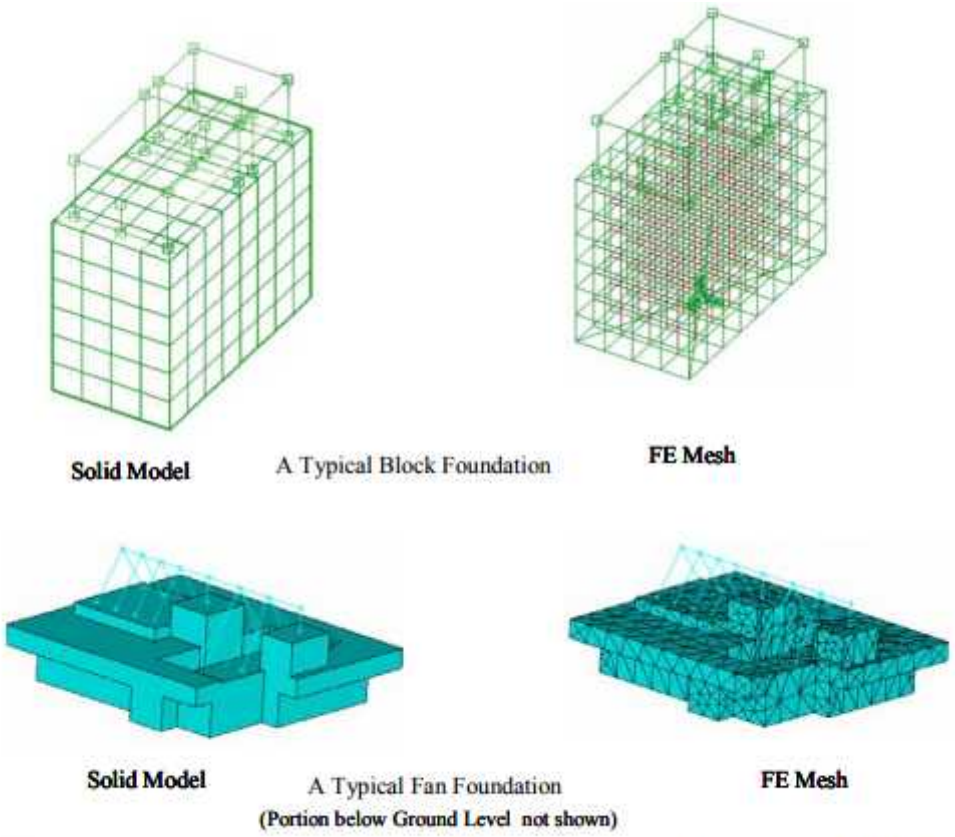


Fig (7.19): Foundations block solid model FE mesh. After Bhatia 2008.

Por lo tanto, se recomienda utilizar análisis de elementos finitos (FE), siempre que sea posible, para incluir todos estos aspectos. Además, esto proporciona una fiabilidad mejorada debido al menor número de aproximaciones / suposiciones.

Este recurso analítico también permite la visualización de formas animadas de los modos y la visualización de la acumulación de amplitud de respuesta y ubicaciones de concentraciones de esfuerzos.

Por tal razón, un recurso analítico apropiado para este tipo de cimientos, consiste en modelarlos con redes de FE, considerándose suficiente una malla gruesa para el bloque y una malla relativamente más fina en las proximidades de las aberturas, los nichos y los recortes.

El modelo de un bloque solido de cimientos típico y la malla se muestran en la Fig (7.19) tomada de la Ref [67]. En términos generales, el modelado del bloque de cimentación con elementos de

bloques de 8 nudos o elementos tetraédricos de 10 nudos funciona razonablemente bien y se considera lo suficientemente bueno. Un elemento sólido de orden superior aumentaría el tamaño del modelo, lo que requeriría más tiempo y potencia computacional, mientras que la mejora en los resultados solo podría ser marginal. La elección del tamaño del elemento es bastante subjetiva ya que depende del problema. Por lo tanto, no es posible especificar pautas firmes con respecto a la elección del tamaño del elemento correcto que se aplicará a todos los tipos de problemas. Sin embargo, el juicio de densidad de malla óptima surgiría después de la experiencia.

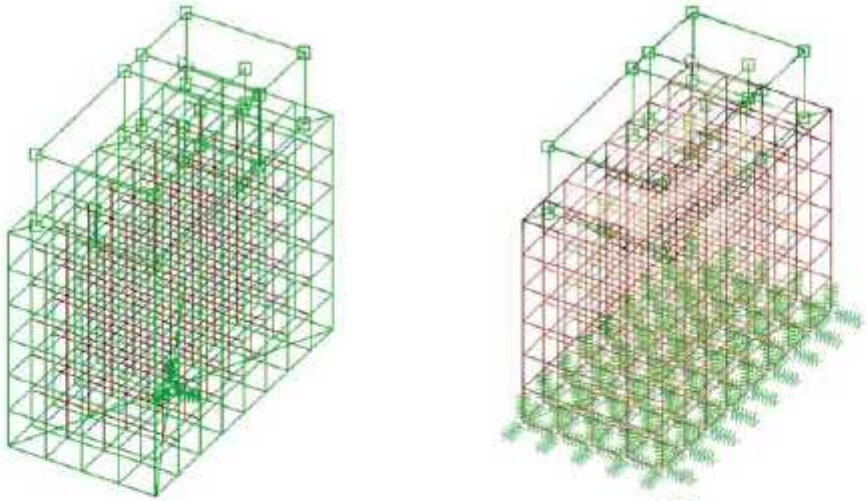


Fig (7.20): Various methods of soil representation for FE modeling:
(a) soil represented by a set of three translational springs, k_x, k_y, k_z, and three rotational springs, k_θ, k_ψ, k_ϕ, applied at the CG of the base of the foundation;
(b) soil represented by a set of three translational springs, k_x, k_y, k_z, applied at each node in contact with the soil at the foundation base

After Ref [37]: K.G. Bhatia. Foundations for Industrial Machines and Earthquakes Effects. 2008.

El uso del análisis FE se ha convertido en el estado del arte para el diseño de las cimentaciones de máquinas. Hay muchas formas para la representación matemática del suelo. Aquí limitamos nuestra discusión solo a dos formas que son comunes en las prácticas de gabinete para el análisis y el diseño de las fundaciones con FE. El suelo representado por un conjunto de muelles equivalentes: dos tipos de representaciones se utilizan comúnmente en el modelado FE de la cimentación: a) El suelo está representado por un conjunto de tres muelles traslacionales y tres muelles rotacionales, unidos al CG de la cimentación, a como se muestra en la Figura (7.20a).

Este tipo de representación arroja resultados para las frecuencias y amplitudes que se encuentran de acuerdo con los cálculos manuales (Barkan, 1962; Bhatia, 1981, 2006, 2008; Prakash y Puri, 1988). b) El suelo está representado por un conjunto de tres resortes traslacionales, unidos a cada nodo en la base de la cimentación en contacto con el suelo, como se muestra en la Figura (7.20b). Este tipo de representación proporciona un límite superior a la rigidez rotacional general ofrecida por el suelo sobre los ejes X, Y y Z (Bhatia, 2008). El suelo es representado como contínuo: el dominio del suelo en el verdadero sentido es un dominio infinito, y para fines de análisis, se hace necesario confinarlo a un dominio finito (Bhatia, 2008; Prakash, 1981). Las cuestiones generales que deben abordarse son la extensión del dominio del suelo que se considerará para la modelización; y si se debe considerar el dominio del suelo solo debajo de la base de la cimentación, en cuyo caso la cimentación no está incrustada, o si bien si se considera incrustada en el dominio del suelo.

Para el modelado con FE, es bien sabido que un dominio estrecho con límites fijos no es probable que representen un comportamiento realista del suelo, mientras que un dominio muy grande daría lugar a un problema de mayor tamaño. Por lo tanto, es necesario encontrar un valor óptimo que refleje el comportamiento realista del suelo sin pérdida significativa de precisión. Diferentes diseñadores adoptan sus propias prácticas basadas en la regla de pulgar, al decidir sobre la extensión del dominio del suelo que se modelará con la cimentación. Se ha encontrado que el dominio de la extensión del suelo varía de tres a ocho veces el ancho de la cimentación que debe proporcionarse. Cabe señalar que tal consideración es lo suficientemente buena únicamente para propósitos académicos. En una situación industrial real, ninguna fundación podría permanecer aislada de otras fundaciones de equipos / estructuras dentro de este dominio de suelo finito. En otras palabras, muchas otras cimentaciones de equipos y estructuras, existirían dentro del rango

de tres a ocho veces la dimensión de la fundación en cada dirección X, Y y Z. Por lo tanto, el comportamiento calculado de una cimentación como independiente, es probable que difiera con la cimentación real. También es cierto que no es factible modelar todos los fundamentos de equipos y estructuras de un proyecto de una sola vez, ni es necesario (Bhatia, 2008). Aquí también, una malla que consista de los elementos sólidos es lo suficientemente buena. Como el dominio del suelo es muy grande en comparación con la cimentación, se considera que una malla relativamente más gruesa del suelo puede ser adecuada. Se puede adoptar un refinamiento del tamaño de la malla, si se considera necesario, para casos específicos. La elección del tamaño del elemento sigue siendo subjetiva.

También la decisión precisa sobre el alcance del dominio del suelo sigue siendo un signo de interrogación. Incluso los académicos no han brindado una respuesta definitiva a este problema. También es cierto que un ingeniero en ejercicio, en vista de su horario apretado, no puede darse el lujo de buscar el tamaño de dominio óptimo ni ignorarlo en el problema. Existen criterios que consideran el dominio del suelo igual de tres a cinco veces las dimensiones laterales en el plano de cada lado de la cimentación y cinco veces a lo largo de la profundidad, los que deberían ser razonablemente buenos. El dominio de suelo finito se modela junto con el bloque de cimentación usando la idealización de FE. Las propiedades apropiadas del suelo en términos del módulo elástico, módulo de corte y la relación de Poisson están asignados al suelo. Si el perfil del suelo indica la presencia de medios de suelos estratificados, las propiedades apropiadas se asignan a los respectivos estratos de suelo, con una variación en las propiedades a lo largo de la longitud, ancho y profundidad del dominio del suelo.

Todas las fundaciones de la máquina están invariablemente incrustadas en parte en el suelo. Muchos autores han estudiado este efecto y han realizado diversas observaciones (Barkan, 1962; Bhatia, 2008; Prakash, 1981; Richart y otros, 1970; Srinivasulu y Vaidyanathan, 1980; Swami, 1999). Algunos han informado que el empotramiento provoca un aumento en la frecuencia natural, y algunos han informado que causa una reducción en las amplitudes. En general, se ha acordado que la inserción tiende a reducir las amplitudes dinámicas. La reducción de las amplitudes podría deberse a cambios en la rigidez, cambios en la amortiguación, cambios en la participación de la masa del suelo o sus combinaciones. Aquí nuevamente, este aspecto del suelo no es cuantificable desde el punto de vista del diseño de la base de máquina para todos los tipos

de suelos. Con fines de diseño, es recomendable que ignorar el efecto de incrustación al calcular la respuesta dinámica.

La amortiguación es una propiedad inherente del suelo y su influencia en la respuesta a la vibración forzada es significativa durante las condiciones de resonancia o casi resonancia (Barkan, 1962; Bhatia, 2008; Richart et al., 1970). Diferentes suelos exhiben diferentes propiedades de amortiguación, dependiendo de su composición del suelo y otros parámetros característicos. En el caso de las bases incrustadas, la profundidad de la incrustación también influye en las propiedades de amortiguación. La amortiguación del suelo comprende la amortiguación geométrica, y la amortiguación del material. Mientras que la amortiguación geométrica representa la energía irradiada desde la base, la amortiguación del material representa la energía perdida dentro del suelo debido a los efectos de la histéresis. En el contexto del diseño de la cimentación de la máquina, se ha informado que la contribución de la amortiguación geométrica a los modos de vibración oscilantes es de bajo orden en comparación con los modos de vibración de traslación y torsión. Se ha observado que la amortiguación en el suelo es tanto dependiente de la tensión como de la frecuencia. El mismo suelo exhibe diferentes características de amortiguación a diferentes niveles de deformación y similar es la variación con la frecuencia de excitación. En otras palabras, la amortiguación del suelo no solo depende del esfuerzo, la tensión o la distribución de la presión de contacto, sino también de la frecuencia de vibración. La representación de la amortiguación del suelo dependiente de la frecuencia no ha encontrado un lugar apropiado en la industria del diseño para los problemas de diseño de la vida real (Bhatia, 2008). Por otro lado, la representación en forma de amortiguamiento viscoso equivalente ha encontrado mayor aceptabilidad. Debe recordarse que la amortiguación desempeña un papel solo durante la resonancia. Si se puede evitar la resonancia de la base con las frecuencias de excitación de la máquina en la etapa de diseño en sí, la importancia de la amortiguación solo se puede sentir durante la resonancia transitoria. La consideración de la amortiguación de la radiación geométrica o dependiente de la frecuencia en las prácticas de la oficina de diseño no solo es difícil sino también inconveniente. Las herramientas matemáticas comúnmente disponibles con la industria, en general, no están diseñadas para adaptarse a este tipo de amortiguación.

Además, el uso de herramientas analíticas de alta gama no se recomienda para fines de diseño en vista de los apretados cronogramas del proyecto. En ausencia de datos especificados para el valor

de amortiguación de un sitio, el coeficiente de amortiguación igual a 8% a 10%, es decir, $\zeta = 0.08$ a 0.1 podría considerarse de forma segura para calcular la respuesta en resonancia. Existen incertidumbres asociadas con el uso del módulo elástico estático o el módulo elástico dinámico del concreto para el diseño. Algunos autores y códigos de prácticas recomiendan el uso de módulos elásticos dinámicos, mientras que algunos sugieren el uso del módulo elástico estático. La diferencia es del orden de alrededor del 20%. Como el módulo elástico dinámico depende de la deformación, y dado que las tensiones desarrolladas en la cimentación durante las condiciones de funcionamiento normales son relativamente de menor orden de magnitud, es recomendable el uso del módulo elástico estático para análisis y diseño dinámicos (Bhatia, 2008). A veces se encuentran juntas y panales fríos en la superestructura de una cimentación porticada. Además, también se han observado grietas en la interfase viga-columna. Tales grietas tienen una tendencia a dar como resultado una rigidez menor y, por lo tanto, frecuencias más bajas. La lechada epóxica o cemento se usa para la reparación de tales grietas. La pérdida de rigidez a causa de este fenómeno es bien conocida, pero esto sigue siendo incuantificable. En vista de esta incertidumbre, se recomienda mantener márgenes ligeramente más altos para las bases sobre ajustadas. Las incertidumbres asociadas con los parámetros de la máquina dependen de las fuerzas dinámicas proporcionadas por los proveedores, a veces, contienen un factor multiplicador ficticio que da como resultado fuerzas dinámicas muy grandes (Barkan, 1962; Bhatia, 2006, 2008). Esto también afecta adversamente la confiabilidad del diseño. Por lo tanto, es deseable que el diseñador evalúe las fuerzas dinámicas en línea con el grado de calidad del equilibrio del rotor y realice una verificación cruzada con los datos dados para la máquina. También, deberá considerarse el ángulo de fase de las fuerzas dinámicas pertenecientes a diferentes rotores. Además, las fuerzas de desequilibrio darán lugar a dos pares con referencia al momento en cualquier punto. Este fenómeno es común a prácticamente la mayoría de las máquinas, por lo tanto, los modos de rotación de vibración de la cimentación se excitan y pueden contribuir significativamente a la respuesta mejorada. Por lo tanto, está claro que aunque las fuerzas de desequilibrio generadas tienen componentes solo en las direcciones X e Y, también generarán momentos sobre los ejes Y y X. Por lo tanto, resulta obvio que no es suficiente calcular amplitudes para los modos de vibración en las traslaciones Y y X; las amplitudes también se deben calcular para el balanceo sobre el eje X así como también para los modos de torsión alrededor del eje Y para los momentos así generados.

7.13. Métodos clásicos racionales para análisis de cimentaciones de máquinas.

Serán expuestos los métodos clásicos racionales para determinar las fuerzas y los momentos, correspondientes a cada uno de los seis grados de libertad dinámicos debidos a excitaciones armónicas de estado estacionario. La elección de oscilaciones armónicas se hace porque muchas máquinas generalmente producen fuerzas desequilibradas que de hecho varían armónicamente con el tiempo, como las generadas por motores rotatorios o reciprocantes, pero también porque existen excitaciones que no son armónicas tales como las producidas por punzonadora y martillos de forja, las que pueden descomponerse en componentes sinusoides mediante el análisis de Fourier.

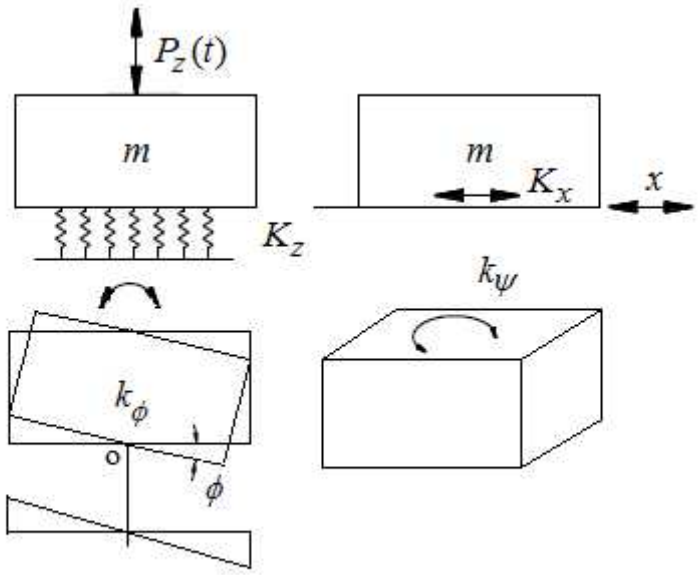


Fig (7.21): Vibraciones en cimentaciones tipo bloque rigido.

Para determinar las acciones correspondientes a traslación horizontal, excitación vertical, cabeceo o giro y torsión, se asume que el suelo es elástico, homogéneo e isótropo, y dependiendo de la acción que se considere, estará representado por su correspondiente constante elástica de resorte: K_z en vibración vertical, K_x en traslación dirección X, $K_{¤}$ en vibración por cabeceo y $K_{.}$ en vibración por torsión. Fig (7.21).

7.14. Vibración vertical en el bloque de cimentación.

Considérese el bloque de cimentación de área A, mostrado en la Fig (7.22), sobre el que actúa una carga dinámica vertical P_z aplicada en su centro de gravedad. Los efectos del desplante del bloque de cimentación reducen las amplitudes de vibración, no obstante para los propósitos de este análisis dicho efecto será despreciado, a como se aprecia en la figura (7.22b). El suelo se representa por su rigidez vertical K_z figura (7.22c), la idealización del sistema completo se representa en la figura (7.22d). Los efectos del desplante y del amortiguamiento suelen ser pequeños, por lo que serán despreciados. Para tales condiciones la ecuación de movimiento del sistema es la siguiente:

$$m\ddot{z} + K_z z = P_0 \sin \mu t \qquad (7.22)$$

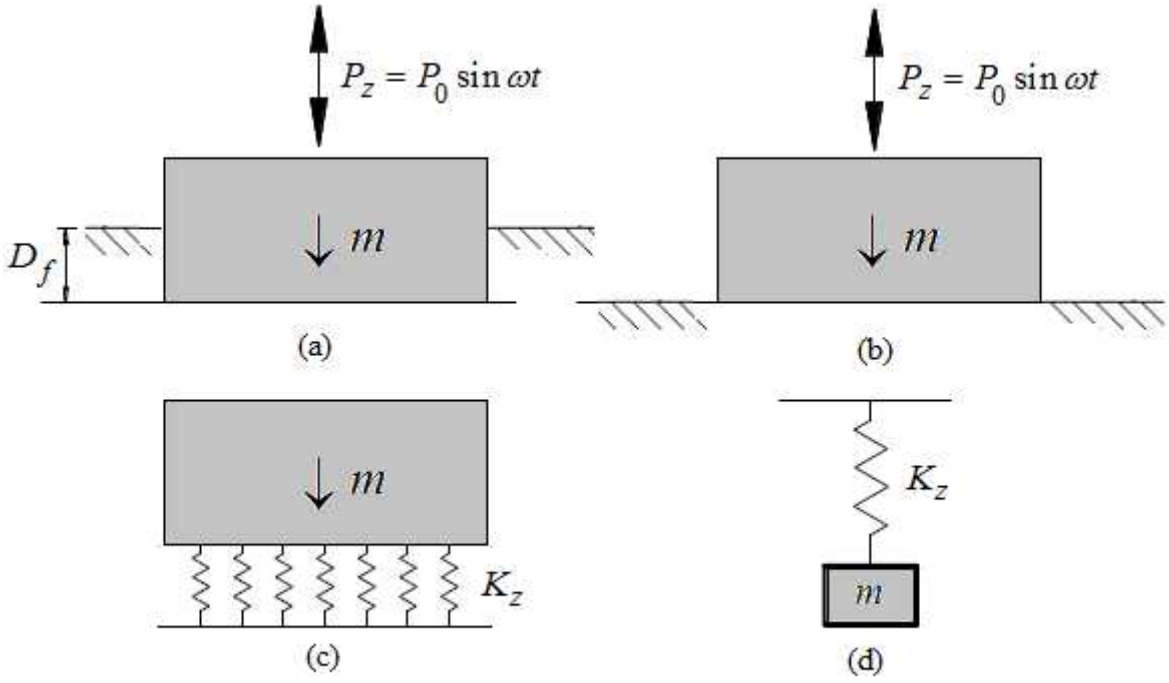


Fig (7.22): Bloque de cimentacion excitado verticalmente.

La rigidez vertical del suelo puede expresarse en función del módulo de reacción de subgrado, como:

$$K_z = C_z A \qquad (7.23)$$

De modo que la frecuencia natural del sistema es entonces la siguiente:

$$\mu_{nz} = \sqrt{\frac{K_z}{m}} = \sqrt{\frac{C_z A}{m}} \quad (7.24)$$

Y la amplitud del movimiento es:

$$A_z = \frac{P_0 \sin \mu t}{C_z A - m\mu^2} \quad (7.25)$$

De acuerdo con la Ec (7.24), la Ec (7.25) puede escribirse como del modo siguiente:

$$A_z = \frac{P_0 \sin \mu t}{m\left(\mu^2{}_{nz} - \mu^2\right)} \quad (7.26)$$

Donde:

A_z: Amplitud máxima de la vibración.

P_0: Fuerza dinámica máxima.

μ_{nz}: Frecuencia natural circular del sistema en vibración vertical (rad/seg)

μ: Frecuencia circular de la máquina (rad/seg)

La amplitud máxima ocurre cuando $\sin \mu t = 1$ y pude expresarse como:

$$A_z = \frac{P_0}{m\left(\mu^2{}_{nz} - \mu^2\right)} \quad (7.27)$$

7.15. Vibración horizontal en el bloque de cimentación.

El cabeceo y el deslizamiento horizontal suelen ocurrir simultáneamente. El desplazamiento horizontal en una cimentación de área A ocurre cuando sobre ella actúa una fuerza dinámica horizontal $P_x = P_0 \sin \mu t$, a como se muestra en la Fig (7.24).

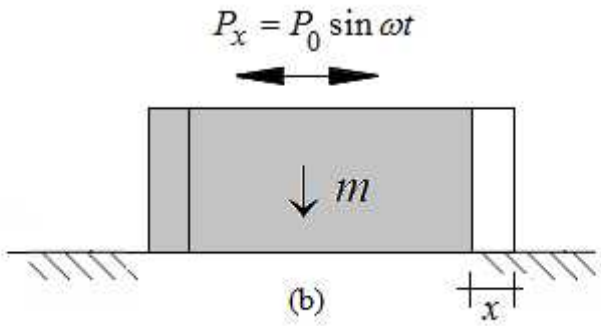


Fig (7.23): Bloque de cimentación sujeto a vibracion horizontal.

La vibración de la cimentación en este caso es análoga a la vibración vertical, siendo la constante del resorte horizontal del suelo la siguiente:

$$K_x = C_2 A \quad (7.28)$$

La ecuación de movimiento del bloque es:

$$m\ddot{x} + K_x x = P_0 \sin \mu t \quad (7.29)$$

La frecuencia natural del sistema es entonces la siguiente:

$$\mu_{nx} = \sqrt{\frac{K_x}{m}} = \sqrt{\frac{C_x A}{m}} \quad (7.30)$$

La amplitud del movimiento es:

$$A_x = \frac{P_0 \sin \mu t}{m\left(\mu^2{}_{nx} - \mu^2\right)} \quad (7.31)$$

La amplitud máxima ocurre cuando $\sin \mu t = 1$ y pude expresarse como:

$$A_x = \frac{P_0}{m\left(\mu^2{}_{nx} - \mu^2\right)} \quad (7.32)$$

Donde:

A_x: Amplitud máxima de la vibración horizontal.

P_x: Fuerza dinámica máxima horizontal.

μ_{nx}: Frecuencia natural circular del sistema en vibración horizontal (rad/seg)

μ : Frecuencia de la máquina (rad/seg)

x: Desplazamiento horizontal de la cimentación

$\ddot{x}$: Aceleración de la cimentación

7.16. Vibración por cabeceo en el bloque de cimentación.

Considerando un bloque de cimentación de área A, apoyado directamente sobre el suelo, excitado por un momento dinámico $M_y = M_0 \sin \mu t$ actuando alrededor del eje y, en el plano XZ, a como se muestra en la Fig (7.24). Se asume que la cimentación es simétrica respecto al eje y, el centro de gravedad de la máquina y la cimentación coincide con el centroide de la base, el cual se ubica en el punto O centro de vibraciones por cabeceo.

Si no ocurre deslizamiento únicamente habrá rotación ¤ del bloque alrededor del eje Y que pasa por 0 y es perpendicular al plano de vibraciones, entonces el sistema posee un solo grado de libertad en giro. Los momentos que actúan en la cimentación, alrededor del centro de rotación, son: momento por reacción del suelo M_R, momento por excentricidad del peso del bloque de cimentación M_wy el momento externo aplicado M_y.

Momento por reacción del suelo M_R:

$$M_R = -\int_A dR \cdot dA \cdot l = -\int_A \left(C_¤ l¤ \cdot dA \right) \cdot l = -C_¤ \cdot ¤ \int_A dA \cdot l^2 = -C_¤ I¤ \qquad (7.33)$$

El signo negativo indica que este momento actúa en dirección anti horaria.

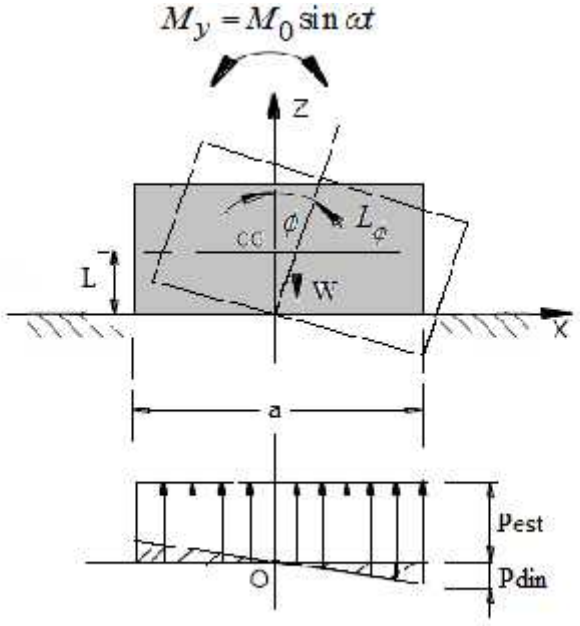


Fig (7.24): Bloque de cimentación excitado por vibraciones de cabeceo

Las variables que interviene en la Ec (7.33) son:

dR : Reacción del suelo actuando en una pequeña área dA

l: Distancia desde dA hasta el centro de rotación 0.

¤: Desplazamiento angular del bloque en radianes

I: momento de inercia del área de contacto alrededor del eje y que pasa por el centroide de la base 0.

$C_{¤}$: Coeficiente elástico no uniforme a compresión.

Momento por excentricidad del peso del bloque de cimentación M_w

$$M_w = W \cdot L¤ \qquad (7.34)$$

Este momento actúa en sentido horario.

Momento externo aplicado M_y

$$M_y = M_0 \sin \mu t \qquad (7.35)$$

La ecuación de movimiento alrededor del centro de rotación es de la siguiente forma:

$$M_{m0}\ddot{¤} = \sum M \qquad (7.36)$$

Donde:

M_{m0}: Momento de inercia de la masa de la máquina y de la cimentación alrededor del eje rotación Y perpendicular al plano de vibración que pasa a través del área de contacto de la base

$\ddot{¤}$: Aceleración angular del bloque de cimentación

Sustituyendo estos valores en la Ec (7.36) tenemos:

$$M_0 \sin \mu t - C_¤ I¤ + WL¤ = M_{m0}\ddot{¤} \qquad (7.37)$$

Reagrupando términos se tiene:

$$M_{m0}\ddot{¤} + ¤\left(C_¤ I - WL\right) = M_0 \sin \mu t \qquad (7.38)$$

La frecuencia angular es:

$$\mu_{n¤} = \sqrt{\frac{C_¤ I - WL}{M_{m0}}} \qquad (7.39)$$

Y el giro máximo por cabeceo está dado por:

$$A_{\square} = \frac{M_0}{M_{m0}\left(\mu^2{}_{n\square} - \mu^2\right)} \qquad (7.40)$$

Donde:

$A_{\square}$: Amplitud máxima de la vibración por cabeceo, en radianes.

M_0: Momento máximo.

$\mu_{n\square}$: Frecuencia natural circular del sistema en vibración por cabeceo.

μ: Frecuencia de la máquina (rad/seg)

Si se compa la Ec (7.39) con la Ec (7.24) se infiere por analogía que la constante del resorte no uniforme a compresión es:

$$K_{\square} = C_{\square} I \qquad (7.41)$$

Donde:

$K_{\square}$: Rigidez del suelo en vibración por cabeceo.

$C_{\square}$: Coeficiente elástico no uniforme a compresión.

I: Momento de inercia de la planta del bloque de cimentación

7.17. Vibración por torsión en el bloque de cimentación.

Ahora será considerado el bloque de cimentación mostrado en la Fig (7.25) sujeto a un momento torsionante aplicado en la cara superior.

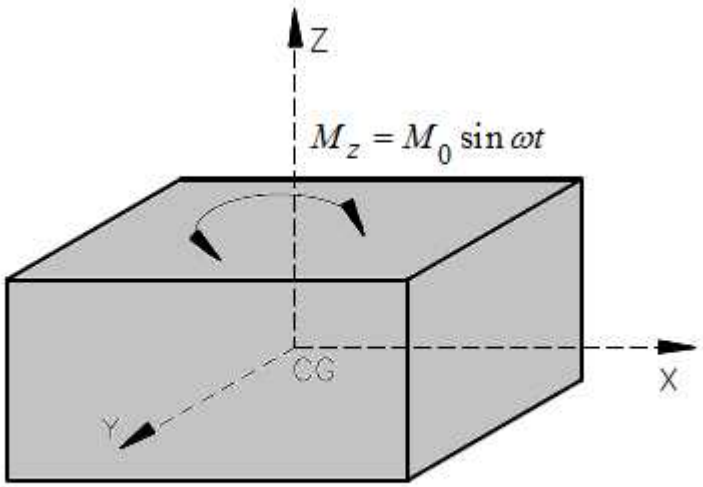


Fig (7.25): Bloque de cimentacion excitado por un momento de torsión.

Despreciando los efectos de amortiguamiento, la ecuación de movimiento es:

$$M_{mz}\ddot{\cdot} + C.\ J_z\cdot = M_{0z}\sin \mu t \quad (7.42)$$

En donde:

M_{mz} : Momento de inercia de la masa de la máquina y la cimentación alrededor del eje de rotación Z.

J_z: Momento polar de inercia de la base de la cimentación.

$\cdot$: Ángulo de torsión de la cimentación en rad.

$C_{\cdot}$: Coeficiente elástico no uniforme de cortante.

La frecuencia natural de vibración es:

$$\mu_{n\cdot} = \sqrt{\frac{C_{\cdot}\, J_z}{M_{mz}}} \qquad (7.43)$$

En la Ec (7.43) la constante del resorte no uniforme del suelo al cortante es:

$$K_{\cdot} = C_{\cdot}\, J_z \qquad (7.44)$$

El máximo desplazamiento angular por torsión es:

$$\cdot_{\max} = \frac{M_z}{M_{mz}\left(\mu^2{}_{n\cdot} - \mu^2\right)} \qquad (7.45)$$

7.18. Cimentaciones porticadas.

Las cimentaciones porticadas se utilizan para máquinas de alta velocidad y tienen la particularidad de tener la parte superior no rígida y comprenden una cimentación de losa, un conjunto de columnas que es igual al número de retículas y una plataforma superior que consiste en vigas y losas longitudinales y transversales. La plataforma superior está hecha de concreto reforzado con aberturas requeridas, depresiones, pedestales elevados, recortes, nichos para pernos y proyecciones extendidas en voladizo. En ciertos casos, también pueden proporcionarse cartelas entre las columnas y la plataforma superior. Hay muchas maneras de representar el modelo de una cimentación de marco, el que se puede modelar utilizando los elementos de viga, elementos de cáscara, elementos sólidos o una combinación de todos ellos. Los modelos con los elementos sólidos, así como los elementos de viga y cáscara se muestran en las Figuras (7.26a) y (7.26b), respectivamente. Cada estilo de modelado, sin embargo, tendrá limitaciones asociadas. Por ejemplo, al modelar utilizando los elementos sólidos, es posible que no se puedan obtener los momentos de flexión y las fuerzas de corte en las columnas, vigas y losas, que son necesarios para el diseño estructural de estos miembros. Cuando es posible obtener los momentos de flexión y las fuerzas de cortante en los miembros de flexión como vigas, columnas, losas, etc., el modelado no permitiría la inclusión de los efectos, como cartelas, depresiones, recortes, bloques levantados, proyecciones, etc..., como se muestra en la Figura (7.26c). Se puede observar que una malla FE de cimentación de marco con todas las aberturas, nichos, recortes, muescas, etc., aunque es factible, es básicamente indeseable debido a que puede aumentar innecesariamente el tamaño del problema y, por lo tanto, el tiempo computacional sin ninguna ganancia significativa en los resultados. Solo los elementos que contribuyen significativamente a la rigidez y la masa, como las grandes aberturas, las depresiones importantes, etc., deben tenerse en cuenta y modelarse en detalle, mientras que los elementos como nichos, muescas pequeñas, etc. podrían ignorarse fácilmente durante el modelado. Dado que el deck superior y la losa de la cimentación, son modelados con elementos de cáscara, refiriendo sus ubicaciones en el centro de sus espesores, lo que por lo general da como resultado un aumento de la altura de las columnas, haciendo que el sistema sea más flexible que el prototipo. Por lo tanto, es necesario hacer modificaciones para superar esta deficiencia. Similar es el caso al modelar la máquina. Se recomienda el uso de enlaces rígidos para cubrir tales deficiencias. Aquí nuevamente, una malla

gruesa para la base en general, y una malla relativamente más fina en la vecindad de aberturas, depresiones, pedestales elevados, huecos y recortes se considera adecuada. Sin embargo, el juicio de la densidad de malla óptima solo surgiría después de la experiencia.

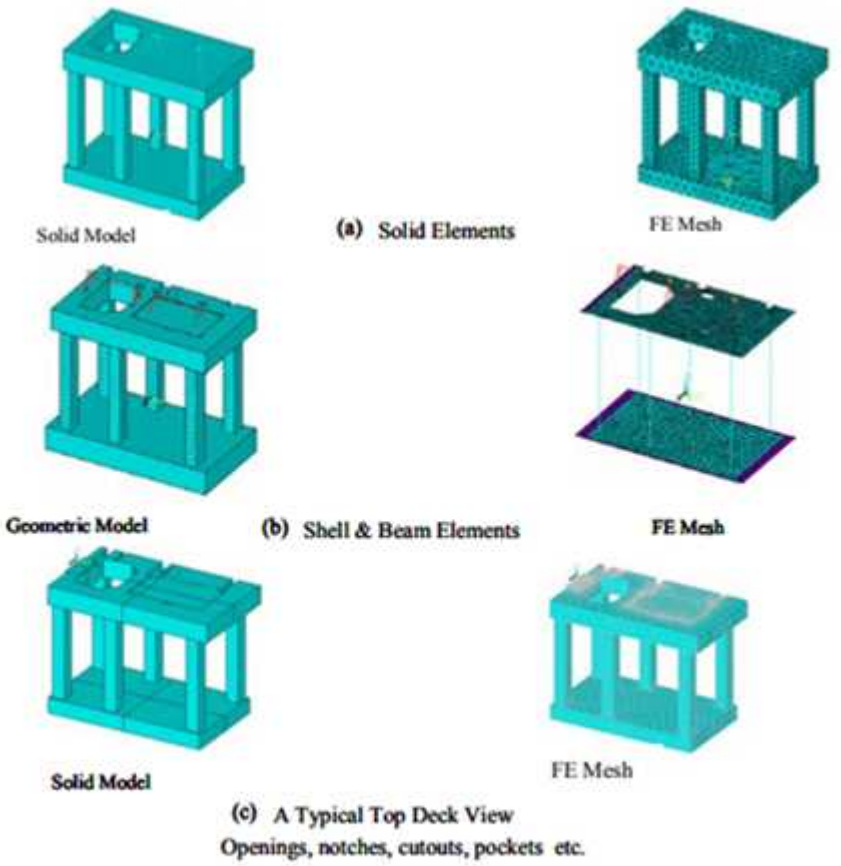


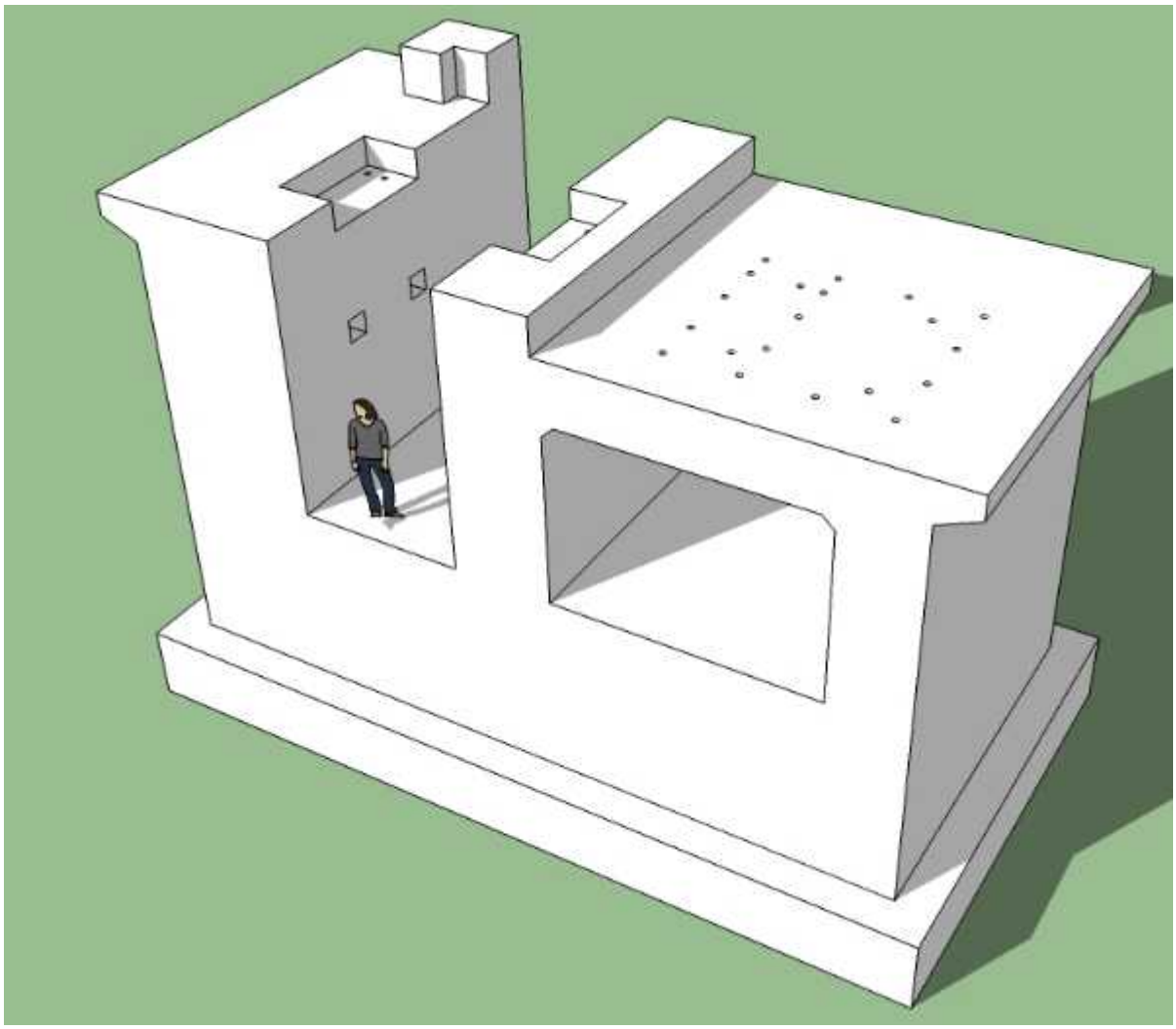
Fig (7.26): Frame foundation—solid element model and shell-beam model

After Ref [37]: K.G.Bhatia. Foundations for Industrial Machines and Earthquake Effects. 2008.

8. EJEMPLO DE APLICACIÓN DE UNA CIMENTACIÓN TIPO BLOQUE PARA DESFIBRADORA DE CAÑA.

ANALISIS ESTRUCTURAL DE CIMIENTO PARA DESFIBRADORA SIMISA TIPO COPS 5 PARA INGENIO CASUR

Gilberto Lacayo Bermúdez



Granada Nicaragua mayo 2015.

8.1. Introducción.

Mediante el presente análisis, será dimensionado el sistema de cimentación apropiado para la desfibradora de caña Simisa tipo Cops 5, para el Ingenio azucarero Casur, en Rivas Nicaragua. Este análisis ha considerado la información geométrica, las características dinámicas del motor y la desfibradora, así como las condiciones geotécnicas del sitio donde serán emplazadas las maquinarias. Por tratarse de una desfibradora con rotación angular de $66 rad / seg$ accionada por un motor de 1500 HP con rotación de $62.86 rad / seg$

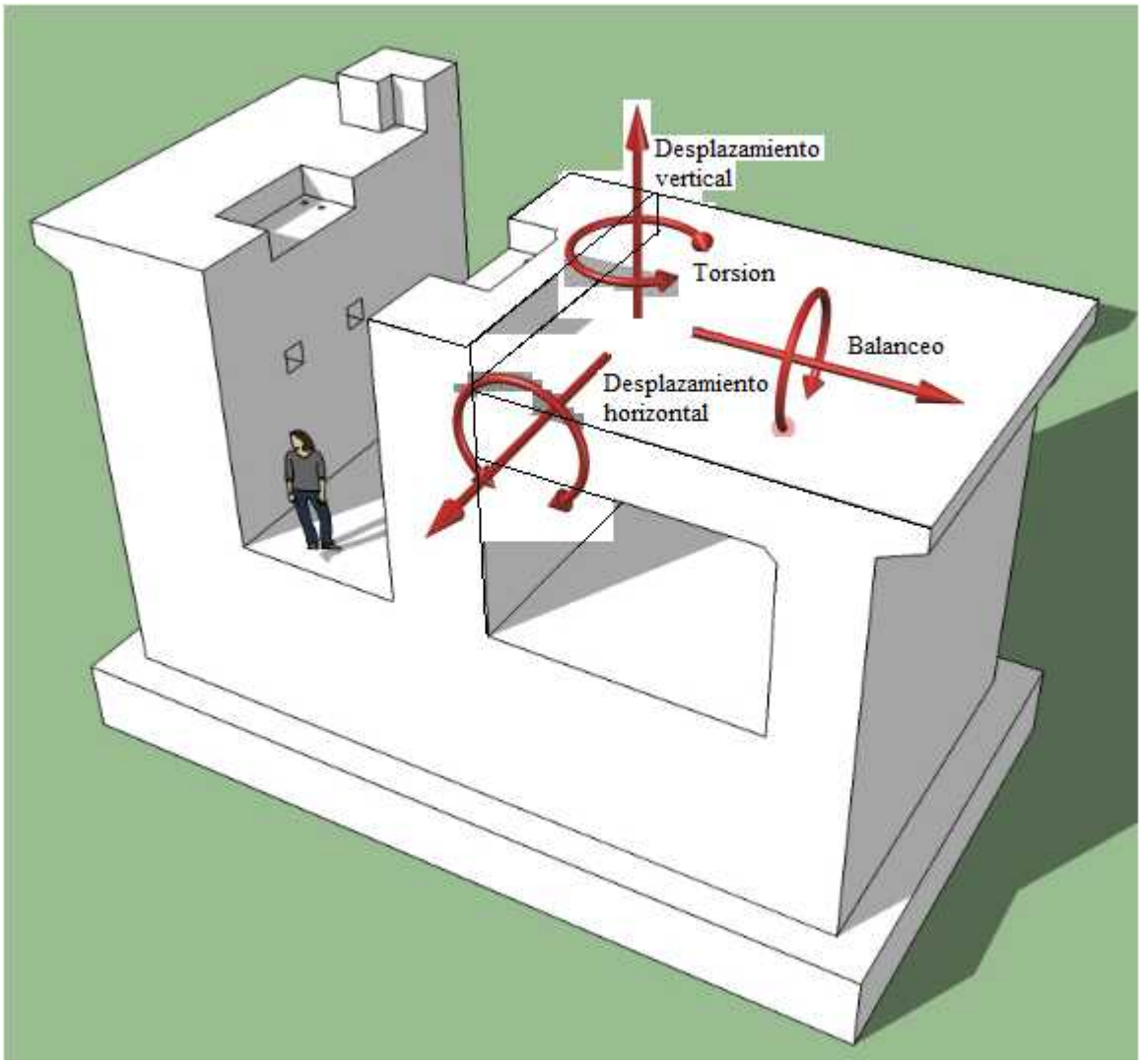
El análisis dinámico será realizado considerando un modelo interactivo compuesto por las maquinas, la cimentación y el prisma virtual del suelo, considerado éste como un medio elástico homogéneo, e isótropo, según lo establecido en la Teoría del semi – espacio elástico. El cuerpo rígido de un bloque de cimentación teóricamente apoyado en un medio elástico, tiene rigurosamente seis grados de libertad. Sin embargo pueden establecerse modelos matemáticos de uno, dos y hasta tres grados de libertad, sin afectar sensiblemente los resultados.

Para analizar dinámicamente una fundación sometida a vibraciones, se puede establecer un modelo de un grado de liberta consistente en un elemento de masa, un resorte y un amortiguador. Conociendo la masa, la constante de resorte y la relación de amortiguamiento, puede determinarse la respuesta de los diferentes modos de vibración, para cualquier fuente de excitación dinámica que solicite dicho sistema. A pesar de la sencillez analítica del oscilador simple masa-resorte- amortiguador el aspecto sustantivo a considerar para este modelo discreto, radica en la determinación de valores confiables para sus parámetros constitutivos expresados mediante la masa, constante de resorte y relación de amortiguamiento. A partir de los trabajos publicado en (1936) sobre la "Teoría del semi–espacio elástico" realizado por Hans Jacob Reissner, (1874–1967), la evaluación de estos parámetros se ha hecho más confiable haciendo uso de esta teoría, la cual considera al sistema como un oscilador de disco rígido soportado por un cuerpo elástico, isotrópico, homogéneo y semi–infinito. A partir del trabajo de Reissner, diferentes investigadores demostraron que mediante la aplicación de la Teoría del semi – espacio elástico, pueden obtenerse soluciones para la idealización del sistema dinámico como un oscilador simple masa–resorte–amortiguador de un solo grado de libertad.

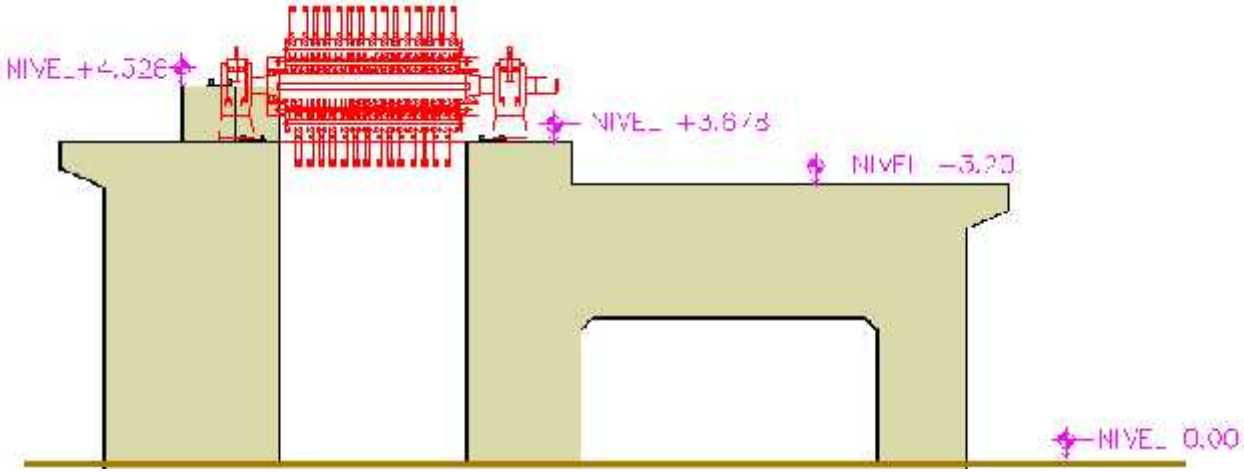
Los resultados empíricos obtenidos mediante la realización de ensayos de campo realizados en modelos de fundaciones, han corroborado que existe bastante concordancia entre los resultados

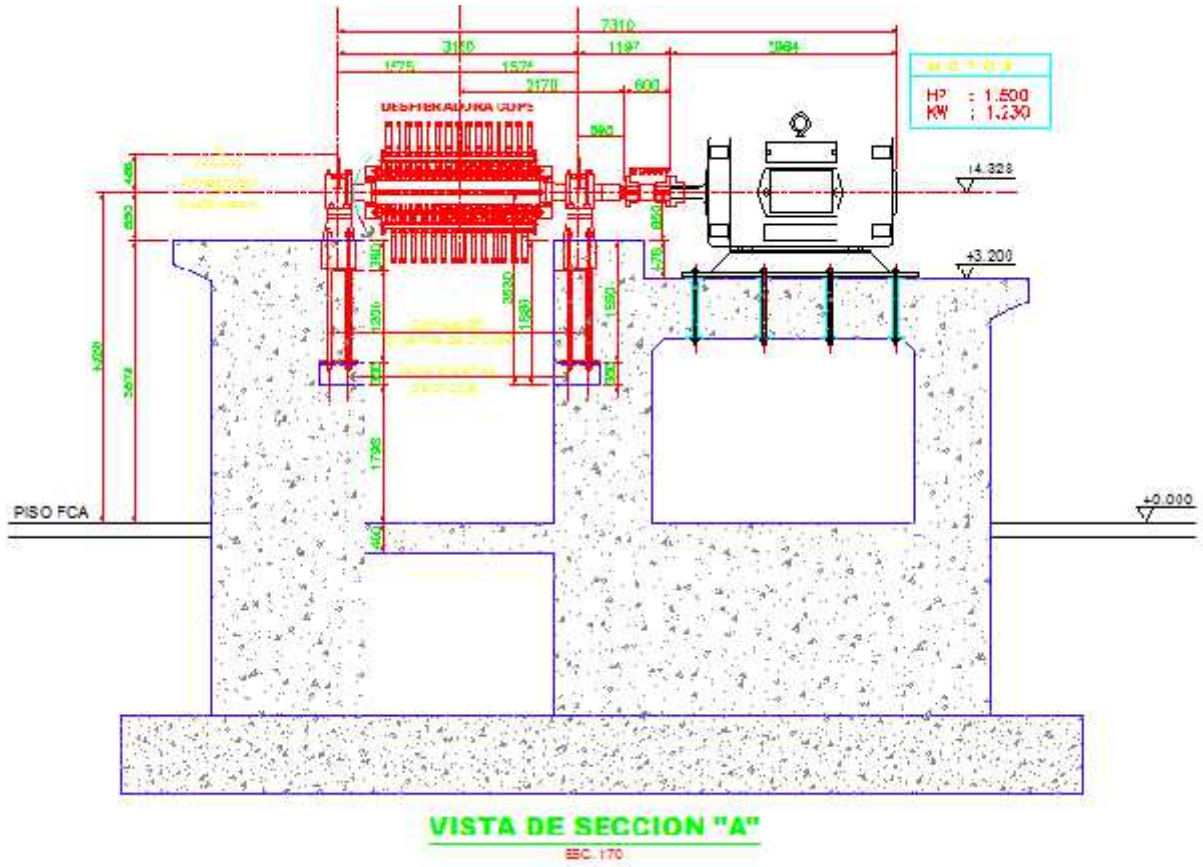
experimentales y teóricos de respuesta a vibraciones empleando la Teoría desarrollada por Reissner.

Finalmente será realizado el análisis sísmico modal espectral, de conformidad con el RNC-2007, mediante el cual se verificará la estabilidad contra el volteo, considerando que los pedestales estarán a 3.678 m sobre el piso sobre los que se apoyan la desfibradora, el motor y el tambor de alimentación del tándem. Para estos efectos serán consideradas como principales fuentes de amenaza sísmica, los eventos originados en la zona de subducción, del graben y los del sistema de estructuras geológicas identificadas como fuentes sismo genéticas cercanas.



8.2. Análisis dinámico de la cimentación





Los efectos sísmicos transitorios, serán considerados en periodos en interzafras, para determinar posibles efectos dinámicos en el oscilador simple masa-resorte-amortiguador, considerando los pedestales que sobresalen del nivel del piso, y las maquinas sobre los que se apoyan También serán considerados los efectos sísmicos conjugados con los debidos al régimen dinámico estacionario de operaciones, considerando la probabilidad de ocurrencia sísmica durante el periodo de zafra.

El ambiente geotécnico donde será cimentada la obra, es descrito en el Informe realizado por Dysconsa, en enero del 2015.

Las dimensiones de los pedestales están previamente definidas en la geometría proveída por el Propietario de la obra, a partir de las cuales serán determinadas las dimensiones de la zapata, verificando que las presiones estáticas y dinámicas, serán transmitidas al suelo, sin exceder valor admisible $q_{adm} = 1.80 \frac{kg}{cm^2}$ indicado en el estudio geotécnico. Según los gráficos obtenidos en las dos pruebas de penetración, la cimentación de la desfibradora, transmitirá las presiones de contacto en un estrato limo arenoso con partículas de arcilla color gris oscuro, de alta compacidad asociada a un numero de golpes por pie N = 40.

El estrato de desplante exhibe índices de plasticidad con valores de 6, en ambos sondeos, lo que sugiere la necesidad de realizar una mejoría de 30cm con concreto de 140 kg/cm^2 en toda el área de contacto, considerando sensibilidad al remoldeo por las vibraciones inducidas.

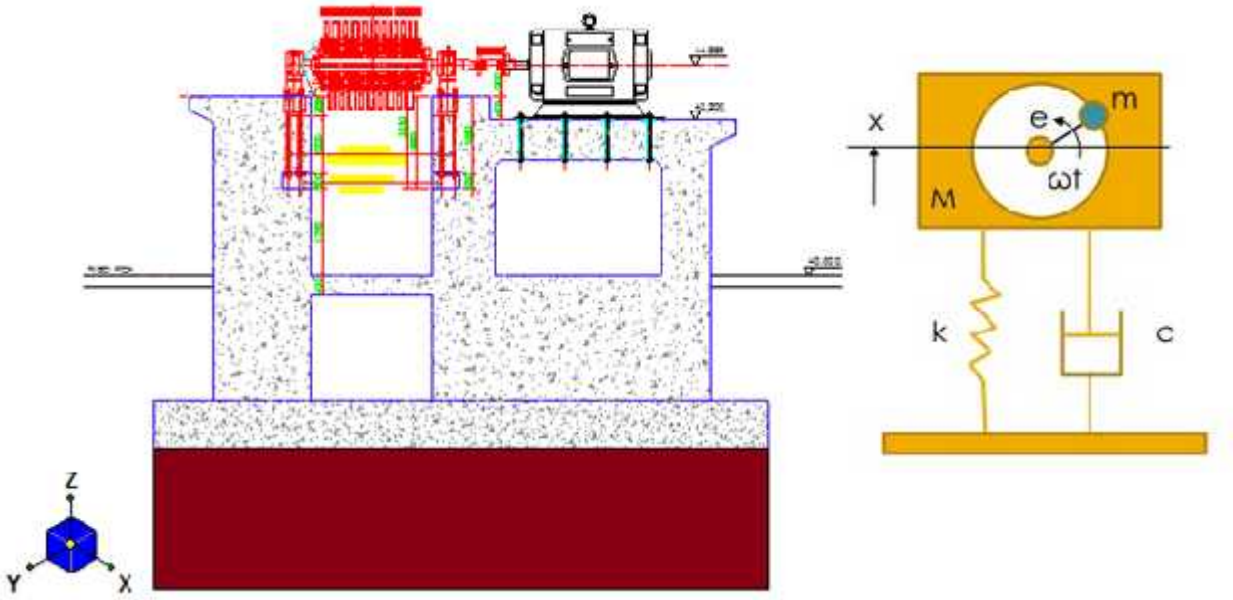
El peso de la fundación y el tamaño del área en contacto con el suelo pueden ser seleccionados de tal manera que cumplan con los siguientes requerimientos: la presión total sobre el suelo no debe exceder la capacidad de carga del suelo; la fundación no debe rebotar sobre el suelo, condiciones que pueden expresarse de la siguiente manera:

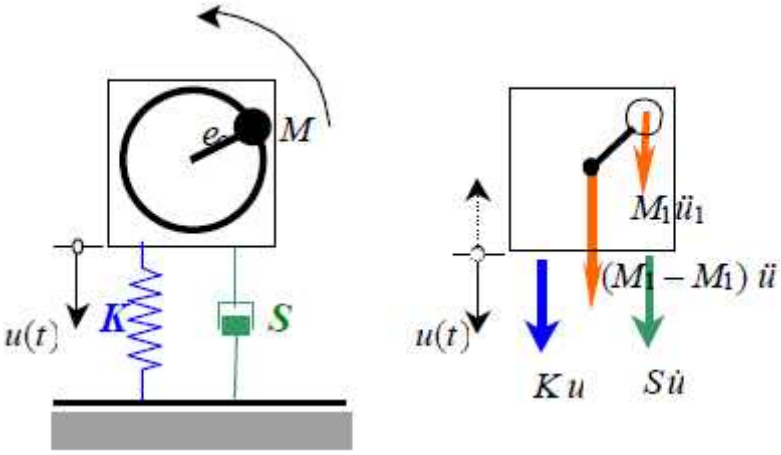
$$q_{est} + q_{dyn} \leq q_{adm} \qquad q_{est} \succ q_{dyn}$$

Para la considerar las presiones de contacto y los asentamientos, transmitidos al suelo, debidos a los efectos dinámicos inducidos por las máquinas, será determinado el factor de transmisibilidad, que se define como la relación de la fuerza o momento realmente transmitido y la fuerza o

momento generado por la máquina, para su determinación es necesario conocer el factor de amplificación dinámica, el amortiguamiento total y las frecuencias en vibración forzada y natural del sistema interactivo maquinas-cimiento-suelo.

Para realizar el análisis dinámico, será considerado el modelo del Semiespacio elástico, de profundidad infinita, homogéneo e isotrópico y cuyas propiedades tensionales pueden ser definidas generalmente por dos constantes, el módulo de corte (*G)* y la relación de Poisson (ν). Según este modelo la disipación de la energía es debida fundamentalmente a la radiación y al amortiguamiento geométrico. Para este modelo tanto la rigidez del suelo como el amortiguamiento producido, dependen de las características elásticas y de la frecuencia de las cargas dinámicas, lo que torna muy complejo el análisis. Para los propósitos prácticos, en los algoritmos empleados en el análisis, se han desarrollado aproximaciones del modelo del semiespacio considerando que la rigidez del suelo es una constante lineal y el amortiguamiento viscoso es también constante, ambas independientes de la frecuencia de las cargas para cada modo de vibración. La consideración del semiespacio elástico, es válida para fundaciones aisladas, mas no para dos fundaciones vecinas cercanas. Sin embargo, experimentalmente se sabe que para zapatas individuales la rigidez del suelo y el amortiguamiento geométrico disminuye por la presencia de fundaciones cercanas. El modelo interactivo maquinas-cimiento-suelo, aquí mostrado, basado en la Teoría del semi – espacio elástico debido a Reissner, será empleado en el análisis dinámico del sistema suelo-fundación.





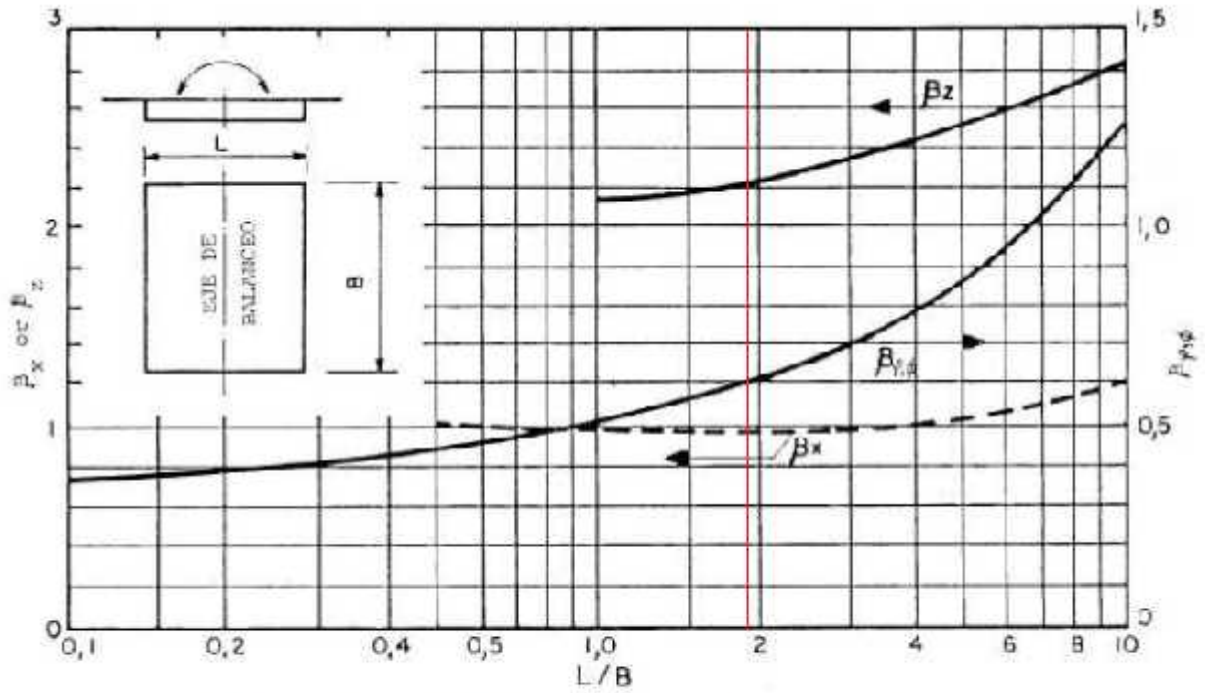
La constante de resorte, también se le puede llamar constante de rigidez, es el parámetro más importante entre los utilizados en un sistema de un grado de libertad. Las expresiones para las constantes de resorte teóricas para los modos de vibración vertical, horizontal, rotaciones en los ejes horizontales y en eje vertical se dan en las expresiones siguientes**.** Aquí se presentan las fórmulas para el cálculo de la constante de resorte obtenidas mediante la teoría de elasticidad para fundaciones circulares y rectangulares apoyadas en la superficie de un semiespacio elástico. Estas fórmulas son desarrolladas por Suresh (1979) en el libro “Desing of Structures and Foundations for Vibrating Machines”

Para las Zapatas Rectangulares con ancho B y longitud L, tenemos las siguientes fórmulas para determinar la rigidez elástica para cada modo de vibración:

Vertical: $$K_z = \frac{G\cdot \ z \cdot N_z \cdot \sqrt{B\cdot L}}{1-\neg}$$

Horizontal: $$K_x = 2(1-\neg)\cdot G\cdot \ x \cdot N_x \cdot \sqrt{B\cdot L}$$

Rotación horizontal: $$K. = \frac{G\cdot \ . \cdot N. \cdot (B\cdot L)^2}{1-\neg}$$



Grafica de los valores β. Fuente: SURESH. "Desing of Structures and Foundations for Vibrating Machines"

En estas expresiones G es el módulo de rigidez al corte del suelo, es un parámetro adimensional que depende de la relación largo ancho de la zapata, N es el factor de enterramiento, y ¬ es el módulo de Poisson.

Estas fórmulas son aplicables en fundaciones colocadas a poca profundidad. La profundidad de enterramiento de la fundación incrementa la frecuencia natural, pero este cambio no es significativo hasta que la profundidad es similar al ancho de la base.

Para zapatas rectangulares, los valores de β se obtendrán con las curvas contenidas en los gráficos en función de las relaciones largo ancho de la cimentación.

Las dimensiones en planta de la zapata son $L = 10.92m$ y $B = 6.03m$ $\frac{L}{B} = 1.81$, del grafico obtenemos $z = 1.10$ $x = 0.50$ y . $= 0.60$ Los radios equivalentes, relacionan una fundación de radio circular r_0 con una zapata rectangular de dimensiones $B \cdot L$

Radios equivalentes para vibración vertical y horizontal: $r_0 = \sqrt{\frac{B \cdot L}{®}} = 4.58m$

Rotación horizontal: $r_0 = \sqrt[4]{\frac{L \cdot B^3}{3 \cdot ®}} = 2.00m$

Rotación vertical: $r_0 = \sqrt[4]{\frac{B \cdot L\left(B^2 + L^2\right)}{6 \cdot ®}} = 4.83m$

Los coeficientes de enterramiento para una profundidad de desplante $d_f = 3.50m$ para un valor ¬ $= 0.40$ para el módulo de Poisson del suelo, son los siguientes.

Vibración vertical: $N_z = \frac{1 + 0.61(1 - ¬)d_f}{r_0} = 1.04$

Vibración horizontal: $N_h = \frac{1 + 0.55(2 - ¬)d_f}{r_0} = 0.89$

Rotación horizontal: $N_. = 1 + 1.2(1 - ¬) \cdot \frac{d_f}{r_0} + 0.2(2 - ¬) \cdot \left(\frac{d_f}{r_0}\right)^3 = 1.69$

El efecto del incremento de la frecuencia de vibración con la profundidad de desplante, cobra importancia a partir de una profundidad similar al ancho de la cimentación. Para nuestro caso este cambio no es significativo debido a que $d_f \prec B$

Determinación de las constantes elásticas de resorte.

El estrato de fundación, según el informe geotécnico, exhibe una composición limo arenosa con partículas de arcilla color gris oscuro, con número de golpes por pie de la prueba de penetración estándar $N = 30 - 40$

RESISTENCIA AL CORTE DE LOS SUELOS COHESIVOS

Resistencia a la Penetracion (N) (golpes/pie)	Descripcion de la Consitencia	Compresion Simple (Kg / cm^2)
<2	Muy Blanda	< 0.25
2 - 4	Blanda	0.25 - 0.50
4 - 8	Media	0.50 - 1.00
8 - 15	Compacta	1.00 - 2.00
15 - 30	Muy Compacta	2.00 - 4.00
> 30	Dura	> 4.00

Lo que permite clasificar dicho estrato con compacidad dura, de conformidad con la clasificación establecida en dicho informe.

Para estas condiciones, es válido asociar un módulo de rigidez al corte $G = 750 \frac{kg}{cm^2}$

Tipo de Suelo	Modulo de Corte Kg/cm2
Granito	307.944,48 - 381.766,79
Piedra Caliza	172.955,12 - 318.490,53
Piedra Arenisca	113.194,21 - 240.449,80
Arena Compacta	760,72 - 1.318,26
Arena medio compactada	568,78 - 1.000,47
Arena sin compactar	381,77 - 745,96
Arcilla Dura	748,07 - 1.018,75
Arcilla Medio Dura	487,93 - 748,07
Arcilla Blanda	239,04 - 487,93

Distintos valores de el modulo de corte G para diferentes tipos de suelos.

Fuente: KRAMER, S.L. "Geotechnical Earthquake Engineering".

Vertical: $$K_z = \frac{G\cdot\ _z \cdot N_z \cdot \sqrt{B\cdot L}}{1-\neg} = \frac{750\cdot 1.10\cdot 1.04\cdot\sqrt{603\cdot 1092}}{0.60} = 1160.39\frac{t}{cm}$$

Horizontal: $K_h = 2\left(1+\neg\right)\cdot G\cdot\ _h \cdot N_h \cdot \sqrt{B\cdot L} = 2\cdot 1.4\cdot 750\cdot 0.50\cdot 0.89\cdot\sqrt{603\cdot 1092} = 758.31\frac{t}{cm}$

Determinación del amortiguamiento del sistema suelo fundación.

El amortiguamiento en un sistema suelo-fundación consta de un componente geométrico (el que se obtiene mediante este modelo), el cual muestra la medida de la energía radiada fuera de la región de la fundación y uno material (el del suelo), que revela la medida de la energía perdida como resultado de los efectos de histéresis. Al primero se le conoce como “relación de amortiguamiento geométrico” y al segundo como relación de amortiguamiento interno propio del suelo.

El amortiguador de un sistema de un grado de libertad representa la capacidad de amortiguamiento del suelo en el sistema suelo–fundación. Para el caso de suelos no cohesivos secos o relativamente secos, la pérdida de energía es debida a la fricción entre las partículas minerales del suelo. En caso de suelos saturados o húmedos, la pérdida de energía es causada por el movimiento relativo entre la matriz del suelo y el fluido intersticial. Las relaciones de amortiguamiento geométrico pueden ser calculadas a partir de las relaciones de masa o de inercia tal.

A continuación se presentan las fórmulas para calcular las relaciones de masa, para cada uno de los modos de vibración:

Se ha considerado para el suelo un peso unitario de $¥ = 1.60\frac{t}{m^3}$ y un módulo de Poisson $\neg = 0.40$

El peso total de las maquinas más la cimentación W_t es el siguiente:

Peso de la cimentación W_C

Peso de la cimentación para un desplante $d_f = 3.50m$

Volumen debajo del nivel del piso.

Dimensiones en planta: $B = 5.03m \;\; L = 9.92m$

Altura desde el nivel del piso, hasta el nivel superior de zapata: $H = 2.50m$

Peso del bloque: $W_1 = 124.74 \cdot 2.40 = 299.38m^3$

Dimensiones de la Zapata: $B = 6.03m \;\; L = 10.92m \;\; D = 1.0m$

Peso de la zapata: $W_2 = 65.85 \cdot 2.4 = 158.03t$

Peso de los dos pedestales sobre el nivel del piso

$P_1 : B = 2.645m, L = 5.03m, H = 3.678m$

$W_3 = 48.94 \cdot 2.4 = 117.46t$

$P_2 : B = 5.03m, L = 6.217m, H = 3.678m$

$W_4 = (114.99 - 29.415 - 10.89) \cdot 2.4 = 179.27t$

Volumen de concreto: $\Sigma V_i = 314.23m^3$

Peso total de la cimentación: $\Sigma W_i = 754.15t$

Peso del motor según el fabricante $W_m = 11.60t$

Peso de la desfibradora $W_d = 2 \cdot 10.0t / cojinete = 20.0t$

Peso del tambor alimentador $W_{tam} = 4.0t$

Peso total cimiento y maquinas: $W_t = \sum W_i = 754.15 + 35.60 = 789.75t$

Relaciones de masa:

Vertical: $$S_z = \frac{(1-\neg)}{4}\left(\frac{W_t}{¥ \cdot r_0{}^3}\right) = \frac{0.60}{4}\left(\frac{785.75}{1.6 \cdot 4.58^3}\right) = 0.77$$

Horizontal: $$S_h = \frac{(7-8\neg)}{\left[32(1-\neg)\right]}\left(\frac{W_t}{¥ \cdot r_0{}^3}\right) = \frac{3.8}{19.2}\left(\frac{785.75}{1.6 \cdot 4.58^3}\right) = 1.01$$

Relaciones de amortiguamiento geométrico, para los diferentes modos de vibración.

Vertical: $$D_z = \frac{0.425 \cdot \sim_z}{\sqrt{S_z}}$$

Horizontal: $$D_h = \frac{0.288 \cdot \sim_h}{\sqrt{S_h}}$$

En estas ecuaciones el efecto del enterramiento queda reflejado en los factores *N*. Los factores $\sim$ son coeficientes de la relación de amortiguamiento para considerar el incremento que experimenta el amortiguamiento geométrico debido al enterramiento efectivo. Las fórmulas para

calcular los coeficientes de la relación de amortiguamiento, para cada uno de sus modos de vibración son las siguientes:

Vertical: $\sim_z = \frac{\left[1+1.9(1-\neg)\left(\frac{d_f}{r_0}\right)\right]}{\sqrt{N_z}} = \frac{2.14 \cdot 0.764}{\sqrt{1.04}} = 1.60$

Horizontal: $\sim_h = \frac{\left[1+1.9(2-\neg)\left(\frac{d_f}{r_0}\right)\right]}{\sqrt{N_h}} = \frac{4.04 \cdot 0.764}{\sqrt{0.89}} = 3.27$

Para estos valores de $\sim$ y de las relaciones de masas; las relaciones de amortiguamiento geométrico por enterramiento de la cimentación, para cada modo de vibración, son los siguientes:

Vertical: $D_z = \frac{0.425 \cdot \sim_z}{\sqrt{S_z}} = \frac{0.425 \cdot 1.60}{\sqrt{0.77}} = 0.775$

Horizontal: $D_h = \frac{0.288 \cdot \sim_h}{\sqrt{S_h}} = \frac{0.288 \cdot 3.27}{\sqrt{1.01}} = 0.94$

Considerando que la relación de amortiguamiento interno del suelo es $D_i = 0.05$ la relación total de amortiguamiento para cada modo de vibración son las siguientes:

$$D_{tz} = D_z + D_i = 0.775 + 0.05 = 0.78$$

$$D_{th} = D_h + D_i = 0.94 + 0.05 = 0.99$$

Tipo de suelo	Di
Arena y grava secas	0,03 a 0,07
Arena seca y saturada	0,01 a 0,03
Arena seca	0,03
Arenas y gravas secas y saturadas	0,05 a 0,06
Arcillas	0,02 a 0,05
Arena sedimentada	0,03 a 0,1

Valores típicos de amortiguamiento interno. Fuente: RICHART, F.E "Vibrations of soils and foundations".

Efectos resonantes.

La frecuencia resonante $f_r = \frac{f_n}{\sqrt{1-2\cdot D^2}}$ se genera para el sub amortiguamiento en alguno de los modos de vibración, o sea para la condición:

$$f_r = \frac{f_n}{\sqrt{1-2\cdot D^2}} \rightarrow 1-2\cdot D^2 = 0 \rightarrow D = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071$$

Los modos de vibración vertical y horizontal exhiben valores de amortiguamiento $D_{tz} \succ 0.7$ y $D_{th} \succ 0.7$ por tanto el sistema suelo-cimiento es sobre amortiguado, para los modos de vibración vertical y horizontal, por lo que no existe resonancia.

Calculo de las frecuencias naturales.

$$m = \frac{789.75}{980} = 0.80 \frac{t\cdot seg^2}{cm}$$

Vertical: $\mu_z = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1160.39}{0.80}} = 38.08 \frac{rad}{seg}$

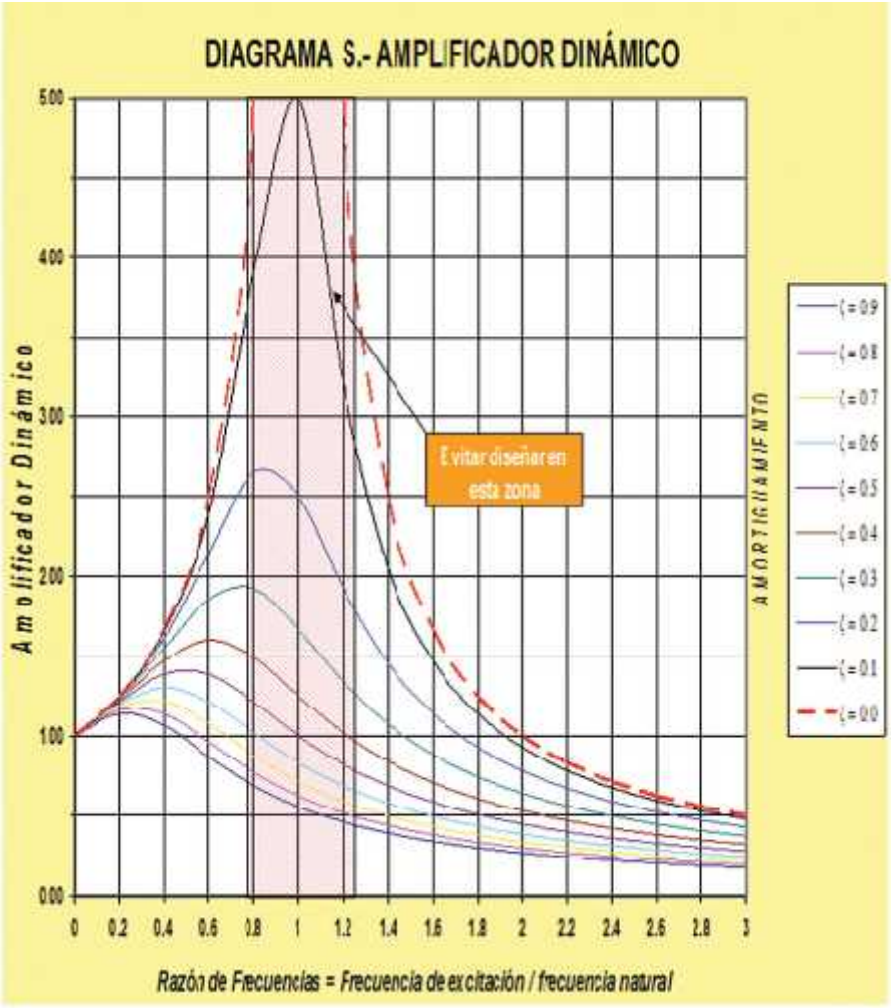
$$f_Z = 363.69 RPM$$

Horizontal: $\mu_h = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{758.31}{0.80}} = 30.79 \frac{rad}{seg}$

$f_h = 294 RPM$

Calculo de los factores de amplificación dinámica para la desfibradora $\mu_d = 66 \frac{rad}{seg} = 630 RPM$

Se define como la relación de la amplitud dinámica de la masa a una frecuencia dada y la amplitud que se obtendría si la fuerza dinámica se supusiera estática. $\frac{x}{F_0 / k} = \frac{x}{x_{est}}$



CARGAS DINAMICAS INDUCIDAS
POR LA DESFIBRADORA COP 5 - SIMISA

CARGAS ATUANDO EM CADA MANCAL

ESTÁTICA:
PESO PRÓPRIO: 10 ton
DINÂMICA:
FORÇA RADIAL: (1) 30 tf (CARGA ACIDENTAL)
FORÇA RADIAL: (2) 5 tf (CARGA DE TRABALHO)
VELOCIDADE EFETIVA MÁXIMA DE VIBRAÇÃO:
7,1 mm/s (PARA FORÇA RADIAL (2))
50 mm/s (PARA FORÇA RADIAL (1))
GIRANTE COM ROTAÇÃO DE: 66 rad/seg (630 rpm)
INÉRCIA DO ROTOR: GD^2 = 7900 kgf x m^2

Vertical:

$$D_z\left(\frac{\mu}{f_n}\right)=\left[\left\{1-\left(\frac{\mu}{f_n}\right)^2\right\}^2+\left(2D\frac{\mu}{f_n}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\left\{1-\left(\frac{66}{38.08}\right)^2\right\}^2+\left(2\cdot 0.78\cdot\frac{66}{38.08}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=0.30$$

Horizontal:

$$D_h\left(\frac{\mu}{f_n}\right)=\left[\left\{1-\left(\frac{\mu}{f_n}\right)^2\right\}^2+\left(2D\frac{\mu}{f_n}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\left\{1-\left(\frac{66}{30.79}\right)^2\right\}^2+\left(2\cdot 0.99\cdot\frac{66}{30.79}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=0.18$$

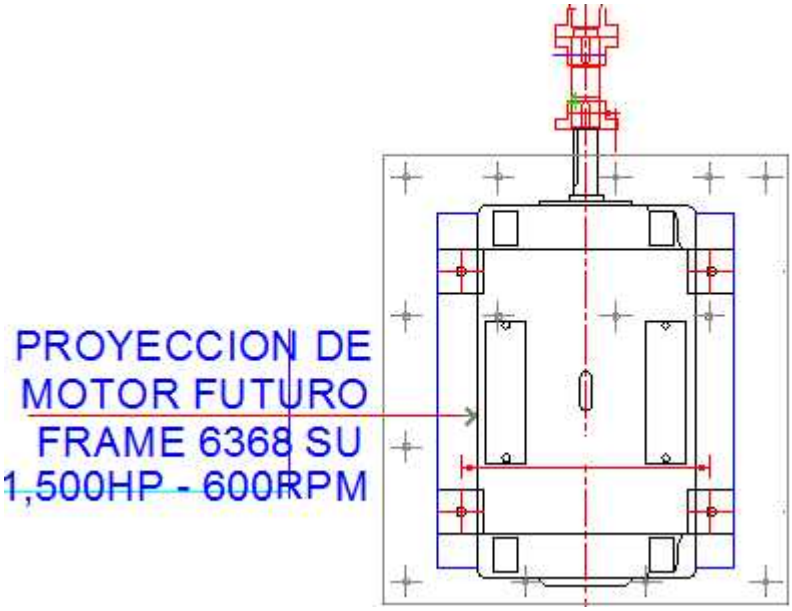
Calculo de los factores de transmisibilidad para la desfibradora.

Vertical: $$T_z\left(\frac{\mu}{f_n}\right)=D_z\cdot\sqrt{1+\left(2\cdot D_z\frac{\mu}{f_n}\right)^2}=0.30\cdot\sqrt{1+\left(2\cdot 0.78\cdot\frac{66}{38.08}\right)^2}=0.86$$

Horizontal: $$T_z\left(\frac{\mu}{f_n}\right)=D_h\cdot\sqrt{1+\left(2\cdot D_h\frac{\mu}{f_n}\right)^2}=0.18\cdot\sqrt{1+\left(2\cdot 0.99\cdot\frac{66}{30.79}\right)^2}=0.78$$

Calculo de los factores de amplificación dinámica para el motor

$$\mu_m = 62.857 \frac{rad}{seg} = 600 RPM$$



Vertical:

$$D_z\left(\frac{\mu}{f_n}\right) = \left[\left\{1-\left(\frac{\mu}{f_n}\right)^2\right\}^2 + \left(2D\frac{\mu}{f_n}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\left\{1-\left(\frac{62.857}{38.08}\right)^2\right\}^2 + \left(2\cdot 0.78\cdot\frac{62.857}{38.08}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 0.32$$

Horizontal:

$$D_h\left(\frac{\mu}{f_n}\right)=\left[\left\{1-\left(\frac{\mu}{f_n}\right)^2\right\}^2+\left(2D\frac{\mu}{f_n}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\left\{1-\left(\frac{62.857}{30.79}\right)^2\right\}^2+\left(2\cdot 0.99\cdot\frac{62.857}{30.79}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=0.19$$

Para cuantificar los efectos dinámicos transferidos al suelo debidos a las máquinas rotativas, desfibradora y motor, serán empleadas las cargas dinámicas especificadas por el fabricante de dichos equipos, las que serán trasladadas al centro de gravedad del sistema, para cuantificar las presiones de contacto transmitidas al suelo.

Calculo de los factores de transmisibilidad para el motor.

$$T_z\left(\frac{\mu}{f_n}\right)=D_z\cdot\sqrt{1+\left(2\cdot D_z\frac{\mu}{f_n}\right)^2}=0.32\cdot\sqrt{1+\left(2\cdot 0.78\cdot\frac{62.857}{38.08}\right)^2}=0.88$$

$$T_h\left(\frac{\mu}{f_n}\right)=D_h\cdot\sqrt{1+\left(2\cdot D_h\frac{\mu}{f_n}\right)^2}=0.19\cdot\sqrt{1+\left(2\cdot 0.99\cdot\frac{62.857}{30.79}\right)^2}=0.79$$

Esfuerzo transmitidos al suelo.

Cargas transmitidas a la cimentación.

Para el régimen estático, se consideran las siguientes cargas:

Peso de la cimentación $W_C=754.15t$

Peso del motor según el fabricante $W_m=11.60t$

Peso de la desfibradora $W_d=2\cdot 10.0t/cojinete=20.0t$

Para el régimen dinámico de servicio se consideran las cargas dadas por el fabricante del equipo:

Fuerza axial inducida por el motor $W_{dynm} = 2 \cdot 24.47t / cojinete = 48.94t$

Fuerza dinámica radial inducida por la desfibradora $W_{dynd} = 2 \cdot 27.22t / cojinete = 54.44t$

Cargas totales transmitidas al suelo de cimentación:

Estáticas $W_{est} = 785.75t$

Cargas dinámicas verticales transferidas al cimiento por la desfibradora según especificación del fabricante del equipo.

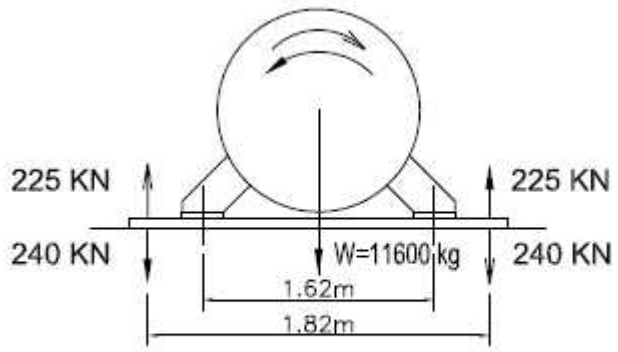
$$F_{d\max} = m_0 \cdot a = m_0 \cdot \mu^2 \cdot e \cdot \cos \mu t = 54.44t$$

$$W_{dynd} = 0.86 \cdot 54.44 = 46.82t$$

Cargas dinámicas verticales transferidas al cimiento por el motor según especificación del fabricante del equipo.

$$F_{e\max} = m_0 \cdot a = m_0 \cdot \mu^2 \cdot e \cdot \cos \mu t = 48.94t$$

$$W_{dynm} = 0.88 \cdot 48.94 = 43.07t$$



CARGAS DINAMICAS INDUCIDAS POR EL MOTOR ELECTRICO SOBRE LA CIMENTACION

Las cargas dinámicas serán afectadas por el factor de transmisibilidad vertical para ser superpuestas con las cargas debidas al régimen estático, y obtener las presiones de contacto transmitidas al suelo de cimentación.

$$A = 6.03 \cdot 10.92 = 65.85 m^2$$

$$q_{est} = 789.75t$$

$$q_{din} = 0.86 \cdot 54.44 + 0.88 \cdot 48.94 = 89.89t$$

Presiones transmitidas al suelo por excentricidades respecto al C.G de la cimentación.

Localización del punto de aplicación de las cargas del conjunto cimiento – máquinas para las cargas estáticas y las dinámicas transferidas:

$$x_W = \frac{7.53 \cdot 11.60 + 3.59 \cdot 4.00 + 1.50 \cdot 117.46 + 7.55 \cdot 179.27 + 5.46 \cdot 457.41 + 3.59 \cdot 20.0 + 7.53 \cdot 43.07 + 3.59 \cdot 46.82}{879.63} = 5.53m$$

$$y_W = \frac{3.015 \cdot 754.14 + 2.05 \cdot 4.00 + 3.60 \cdot 11.60 + 2.43 \cdot 20.0 + 2.43 \cdot 43.07 + 2.43 \cdot 46.82}{879.63} = 2.94m$$

Coordenadas del punto de aplicación de las cargas: $x_W = 5.53m \quad y_W = 2.94m$

$$W(5.53, 2.94)$$

Coordenadas del centroide geométrico

$$x_c = \frac{5.46 \cdot 49.897 + 10.06 \cdot 1.50 + 31.27 \cdot 7.55 + 5.46 \cdot 65.847}{157.04} = 5.62m$$

$$y_c = \frac{3.015 \cdot 49.897 + 3.015 \cdot 10.06 + 3.015 \cdot 31.27 + 3.015 \cdot 65.847}{157.04} = \frac{473.578}{157.04} = 3.015m$$

$$x_C = 5.62m \quad y_C = 3.015m \quad C(5.46, 3.015)$$

Excentricidades: $e_x = 5.62 - 5.46 = 0.16m \quad e_y = 3.015 - 2.94 = 0.075m$

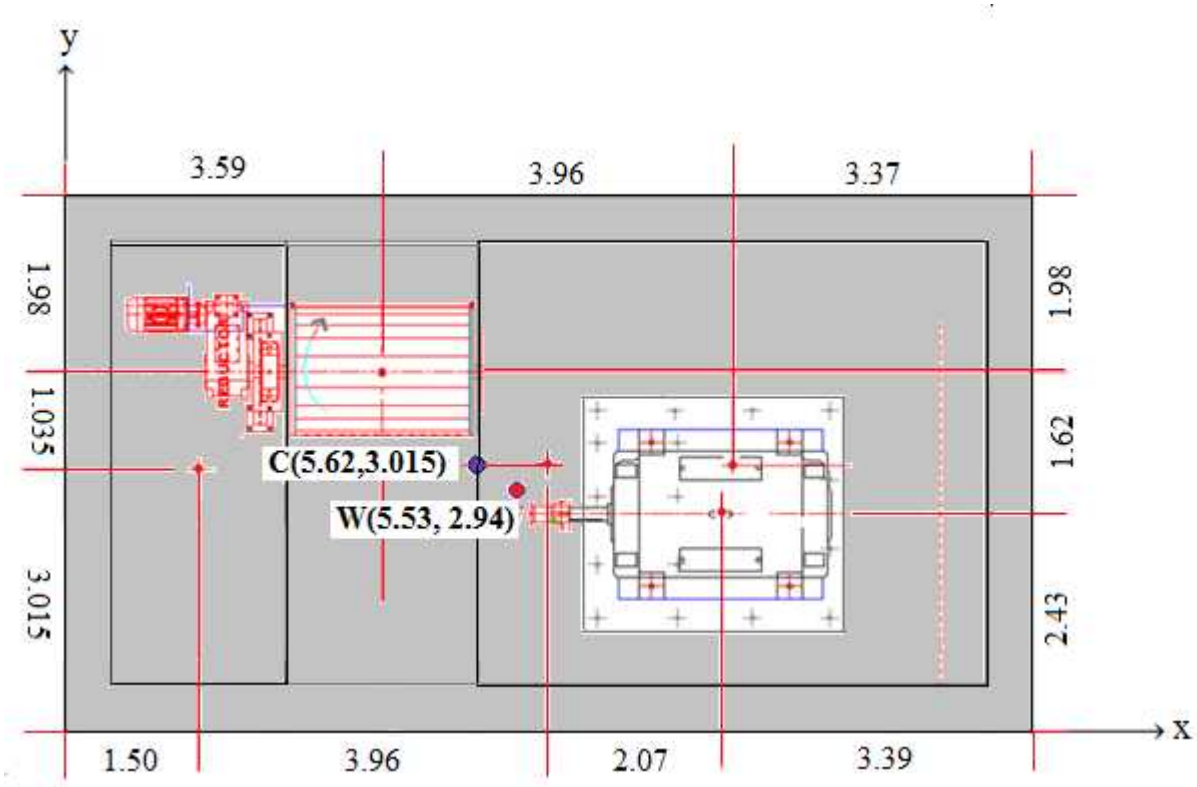
Momentos de inercia y módulos de flexión de la zapata:

$$I_y = \frac{6.03 \cdot 10.92^3}{12} = 654.34m^4$$

$$S_y = \frac{6.03 \cdot 10.92^2}{6} = 119.84m^3$$

$$I_x = \frac{10.92 \cdot 6.03^3}{12} = 199.52m^4 \qquad S_x = \frac{10.92 \cdot 6.03^2}{6} = 66.17m^3$$

Esfuerzos flexo compresivos biaxiales transmitidos al estrato de cimentación.



$$\sum W_i = 879.64t$$

$$q_S(x,y) = \frac{\sum W_i}{B \cdot L} \pm \frac{\sum W_i \cdot e_x}{I_y} \cdot x \pm \frac{\sum W_i \cdot e_y}{I_x} \cdot y = \frac{879.64}{6.03 \cdot 10.92} \pm \frac{879.64 \cdot 0.16}{654.34} \cdot x \pm \frac{879.64 \cdot 0.075}{199.52} \cdot y$$

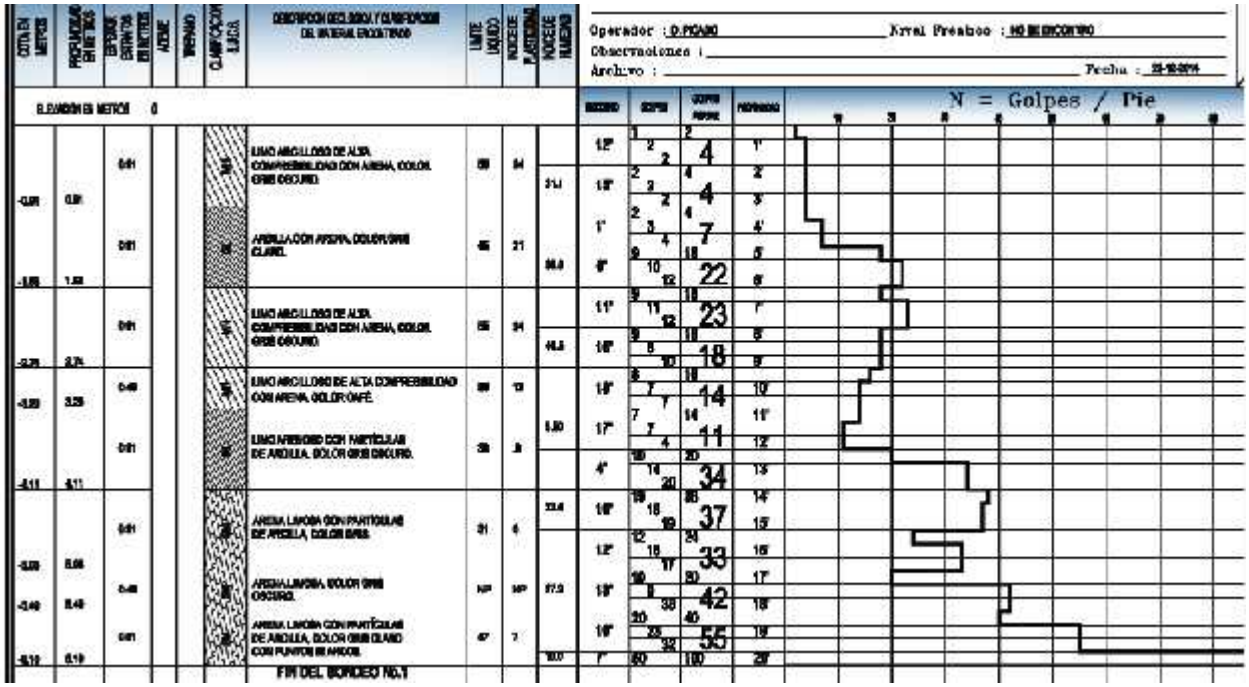
$$q_S(x,y) = 13.358 \pm 0.215x \pm 0.33y$$

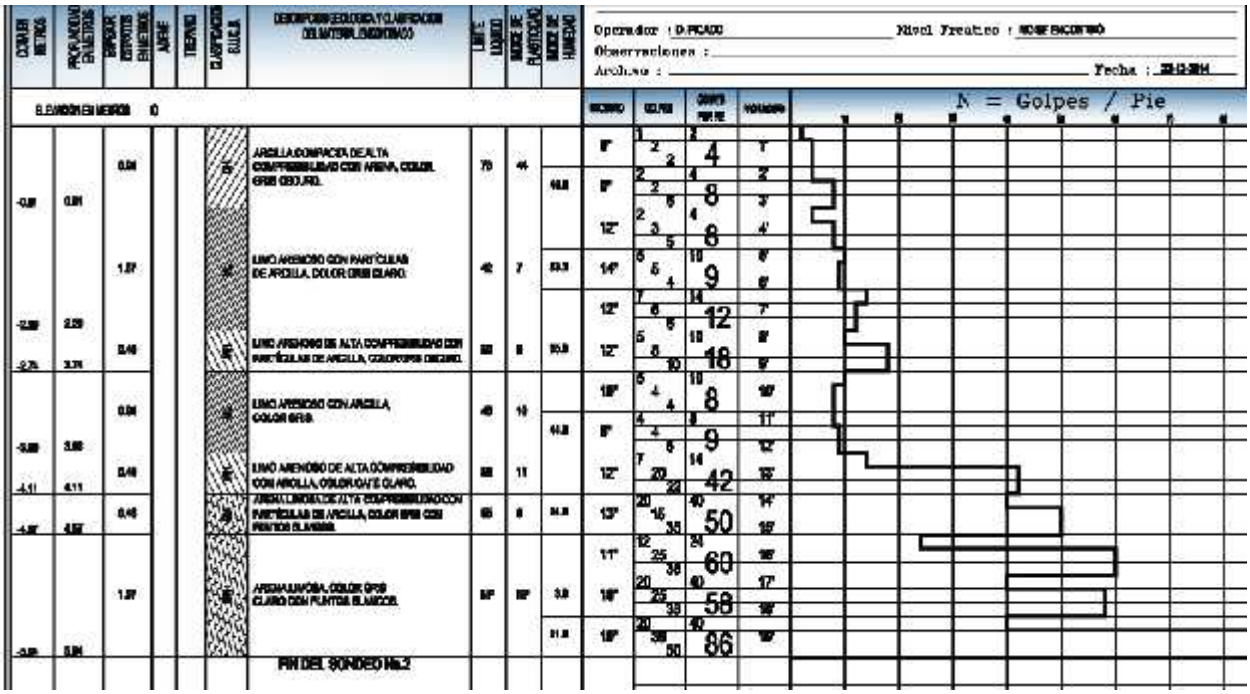
Las presiones debidas a las cargas estáticas y dinámicas, no exceden a la presión admisible establecida en el estudio geotécnico del sitio donde será construida la cimentación del desfibrador.

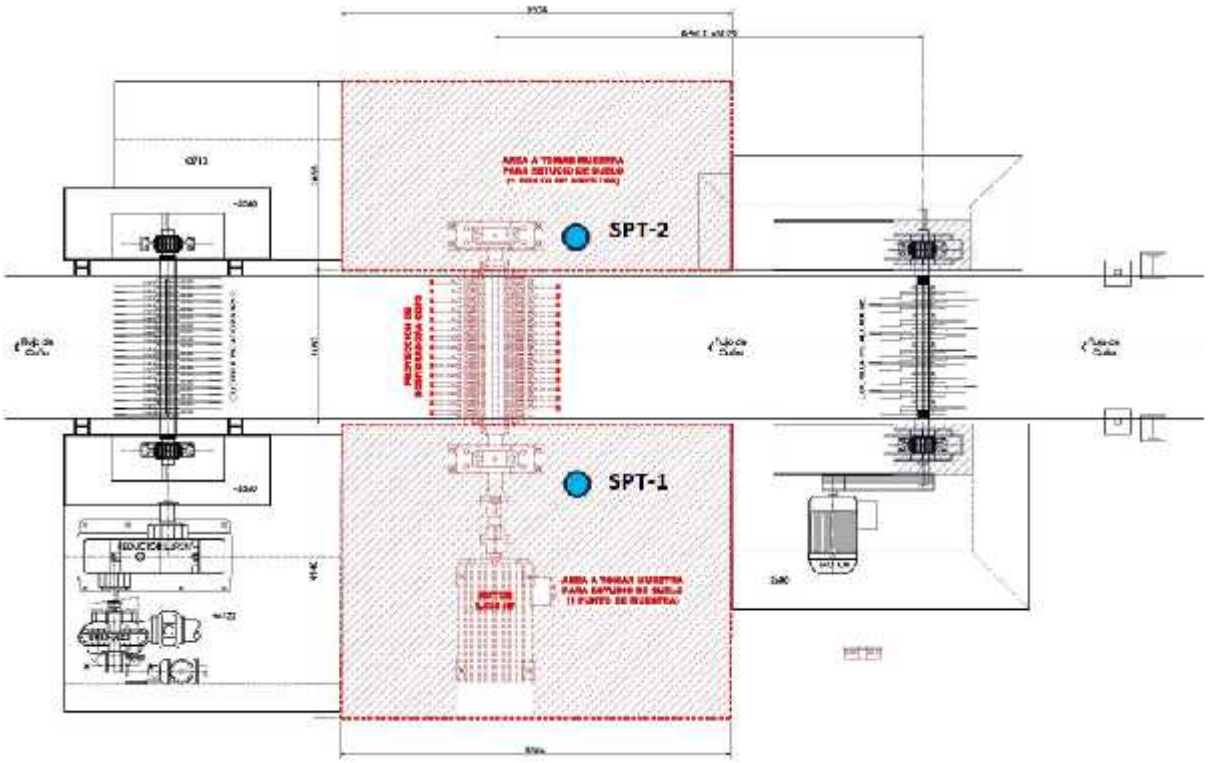
$$q_S(x,y) = 13.358 \cdot \left(1 \pm 6 \cdot \frac{0.16}{10.92} \pm 6 \cdot \frac{0.075}{6.03}\right) = \begin{cases} q_{S\max} = 15.53 \frac{t}{m^2} \prec 18.0 \frac{t}{m^2} \\ q_{S\min} = 11.19 \frac{t}{m^2} \end{cases}$$

Profundidad (m)	Descripción	LL	IP	%<4	% <200	Clasificación SUCS
Sondeo No. 1						
0.00 – 0.91	Limo Arcilloso de Alta Compresibilidad Con Arena, Color Gris Oscuro.	55	24	100	72	MH
0.91 – 1.83	Arcilla Con Arena, Color Gris Claro.	45	21	100	71	CL
1.83 – 2.74	Limo Arcilloso de Alta Compresibilidad Con Arena, Color Gris Oscuro.	55	24	100	72	MH
2.74 – 3.20	Limo Arcilloso de Alta Compresibilidad Con Arena, Color Café.	50	13	100	76	MH
3.20 – 4.11	Limo Arenoso Con Partículas de Arcilla, Color Gris Oscuro.	39	9	100	63	ML
4.11 – 5.03	Arena Limosa Con Partículas de Arcilla, Color Gris.	31	6	100	39	SM
5.03 – 5.49	Arena Limosa, Color Gris Oscuro.	NP	NP	100	37	SM
5.49 – 6.40	Arena Limosa Con Partículas de Arcilla, Color Gris Claro Con Puntos Blancos.	47	7	100	48	SM
Sondeo No. 2						
0.00 – 0.91	Arcilla Compacta de Alta Compresibilidad Con Arena, Color Gris Oscuro.			100	85	CH
0.91 – 2.29	Limo Arenoso Con Partículas de Arcilla, Color Gris Claro.			100	55	ML
2.29 – 2.74	Limo Arenoso de Alta Compresibilidad Con Partículas de Arcilla, Color Gris Oscuro.			100	65	MH
2.74 – 3.66	Limo Arenoso Con Arcilla, Color Gris.			100	52	ML
3.66 – 4.11	Limo Arenoso de Alta Compresibilidad Con Arcilla, Color Café Claro.			100	62	MH
4.11 – 4.57	Arena Limosa de Alta Compresibilidad Con Partículas de Arcilla, Color Gris Con Puntos Blancos.			100	49	SM
4.57 – 5.79	Arena Limosa, Color Gris Claro Con Puntos Blancos.			100	39	SM

No. Sondeo	1	2
Profundidad de desplante, (m) *	(2.00)	(2.00)
Presión Admisible, kg/cm^2	2.10	2.37
Presión Recomendada, kg/cm^2	1.80	1.80
Profundidad de excavación (m)	(3.80)	(3.80)
Profundidad de mejoramiento (m)	(1.80)	(1.80)


Operador : D.PICADO
Nivel Freatico : NO SE ENCONTRO
Observaciones :
Archivo :
Fecha :
N = Golpes / Pie
FIN DEL SONDEO No.1


Operador : D.PICADO
Nivel Freatico : NO SE ENCONTRO
Observaciones :
Archivo :
Fecha :
N = Golpes / Pie
FIN DEL SONDEO No.2



Determinación de las amplitudes para los modos de vibración vertical y horizontal en los pedestales sobre el suelo debidas a los efectos dinámicos de la desfibradora y del motor sin atenuación por el amortiguamiento geométrico y visco elástico del suelo.

$$A = \frac{D \cdot \sum W_i}{K}$$

Amplitudes inducidas por la desfibradora

Vertical:

$$A_{zd} = \frac{D_z \cdot \sum W_i}{K_z} = \frac{0.30 \cdot 89.89}{1160.39} = 0.023mm$$

Horizontal:

$$A_{hd} = \frac{D_h \cdot \sum W_i}{K_h} = \frac{0.18 \cdot 89.89}{758.31} = 0.021mm$$

Amplitudes inducidas por el motor

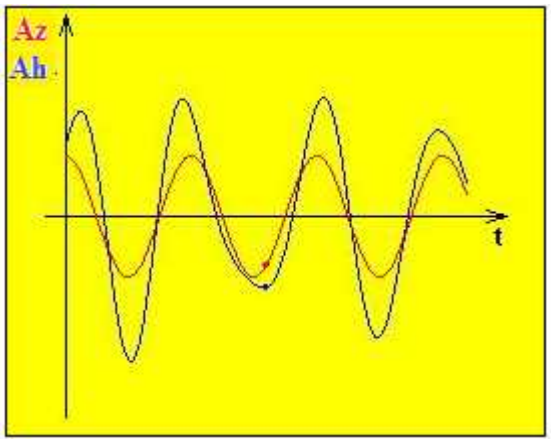
Vertical:

$$A_{zm} = \frac{D_z \cdot \Sigma W_i}{K_z} = \frac{0.32 \cdot 89.89}{1160.39} = 0.024mm$$

Horizontal:

$$A_{hm} = \frac{D_h \cdot \Sigma W_i}{K_h} = \frac{0.19 \cdot 89.89}{758.31} = 0.022mm$$

Considerando que las frecuencias de vibración de la desfibradora $f_d = 630RPM$ y del motor $f_m = 600RPM$ son frecuencias de vibración muy cercanas desfasadas una cantidad δ, podemos considerar la interferencia de las amplitudes resultando una tercera onda armónica cuya amplitud depende de la diferencia de fases entre las dos ondas originales.



$$p_1 = Asen(kt - \mu t)$$

$$p_2 = Asen(kt - \mu t + ¢)$$

$$p_1 + p_2 = 2 \cdot A \cdot \cos\frac{¢}{2} \cdot sen\left(kt - \mu t + \frac{¢}{2}\right)$$

Bajo esta condición, las máximas amplitudes superpuestas para los modos de vibración vertical y horizontal resultan ser las siguientes.

$$A_{zd} + A_{zm} = 0.047mm$$

$$A_{hd} + A_{hm} = 0.043mm$$

Mientras mayor sea el valor de la amplitud de las vibraciones en la fundación, existirá más peligro para las estructuras cercanas. Además si la amplitud de la vibración permanece en el tiempo, la fundación puede perder su estabilidad y someterse a un cimiento no uniforme, poniendo en peligro el trabajo normal de la máquina. En general, no es posible establecer un máximo absoluto para las amplitudes de vibración. En primer lugar, los niveles tolerables de amplitudes disminuyen cuando la velocidad de la máquina aumenta.

De acuerdo con el grafico ambiental adjunto, para los rangos de frecuencias de la desfibradora y del motor, las amplitudes de las vibraciones verticales y horizontales del sistema suelo – cimiento, serán perceptibles en la categoría de aceptables.

Existe poca literatura sobre las amplitudes permisibles en vibración forzada, a pesar de saberse que cuanto mayor sean las amplitudes de vibración, habrá mayor exposición al peligro para estructuras cercanas, con el riesgo adicional asociado, de que la cimentación pierda su estabilidad por reacomodos en la estructura interna del suelo, con el consecuente peligro para la funcionalidad de las máquinas.

Si bien es cierto que la hipótesis simplificativa de considerar que el conjunto maquinas-cimiento-suelo, puede idealizarse como un oscilador simple inmerso en un semi espacio elástico homogéneo e isótropo, el diseño dinámico de cimentaciones para maquinas rotatorias o bien reciprocantes, reviste algunas complejidades. Es práctica muy generalizada en algunos países, establecer criterios de potencia que relacionan el peso del concreto de la cimentación para cada

kilo watt de potencia de la máquina. Generalmente se establecen $100kg/kw$ o bien por 6 kg de cimentación por kilogramo de máquina, empleando criterios de masas.

Para el presente caso, empleando el criterio de potencia se requeriría un peso para la cimentación igual a $1500HP = 746 \cdot 1500 = 1119Kw$ lo que equivaldría a $W_C = 10 \cdot 1119 = 112t$ por la vía del criterio de masas $W_C = 31.6 \cdot 6 = 189.60t$ Estas consideraciones empíricas conducen generalmente a resultados poco confiables.

La mayor complejidad que reviste el diseño dinámico de cimentaciones para maquinas vibrantes, estriba en primer lugar en el desconocimiento del régimen de perturbaciones a que estará sujeta el sistema suelo-cimentación. Muy a pesar de las especificaciones dadas por el fabricante de los equipos, para los momentos de desbalanceo de sus máquinas, estos datos suelen ser meramente analíticos. La experiencia indica que los desbalanceos resultan ser mayores debido a las excentricidades accidentales y ciertas imperfecciones resultantes del montaje de las máquinas.

Otro aspecto relevante que incide en la complejidad de estos diseños, es el desconocimiento real de las propiedades dinámicas y del amortiguamiento interno para el suelo, considerando que hasta determinado nivel de esfuerzos, existen incertidumbres para los valores del módulo de elasticidad y el de Poisson, aplicables en condiciones estáticas.

Es muy importante considerar que bajo condiciones de vibraciones inducidas al suelo de cimentación, existe la posibilidad de que alguna de las componentes armónicas generadas por las máquinas, coincida con la frecuencia natural del sistema suelo – cimentación generándose resonancia con amplitudes de vibración intolerables.

Finalmente debe considerarse que en el largo plazo, las vibraciones inducidas al suelo de cimentación, modifique su estructura interna bien sea mediante densificación de las arenas o de remoldeo de arcillas sensitivas.

Respecto al diseño del bloque masivo de cimentaciones sujetas al estado de esfuerzos de naturaleza dinámica por vibraciones de maquinarias, en la mayoría de los casos debido a que los esfuerzos son generalmente pequeños, bastaría proporcionar refuerzo nominal por temperatura y

aplastamiento al bloque de concreto, de conformidad con lo establecido en el acápite 7.12.2.1 del ACI318

Refuerzos por temperatura $^{\circ} = 0.0014$

Para el pedestal soterrado se requiere la siguiente área de acero por temperatura:

$$A_S = 0.0014 \cdot 503 \cdot 992 = 698 cm^2$$

$$A_{s\,N8} = 5.067 cm^2$$

Perímetro considerando 10cm de recubrimiento $P = 2 \cdot (493 + 982) = 2950 cm$

$$N = \frac{698}{5.067} = 137.75 \qquad S = \frac{2950}{137.75} = 22 cm$$

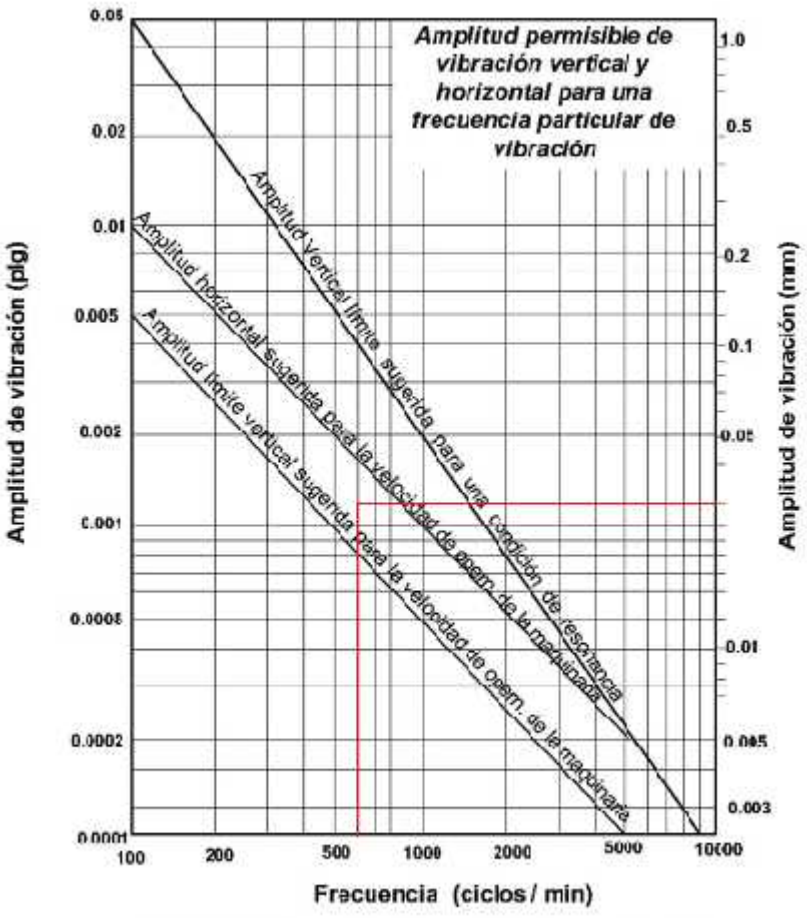
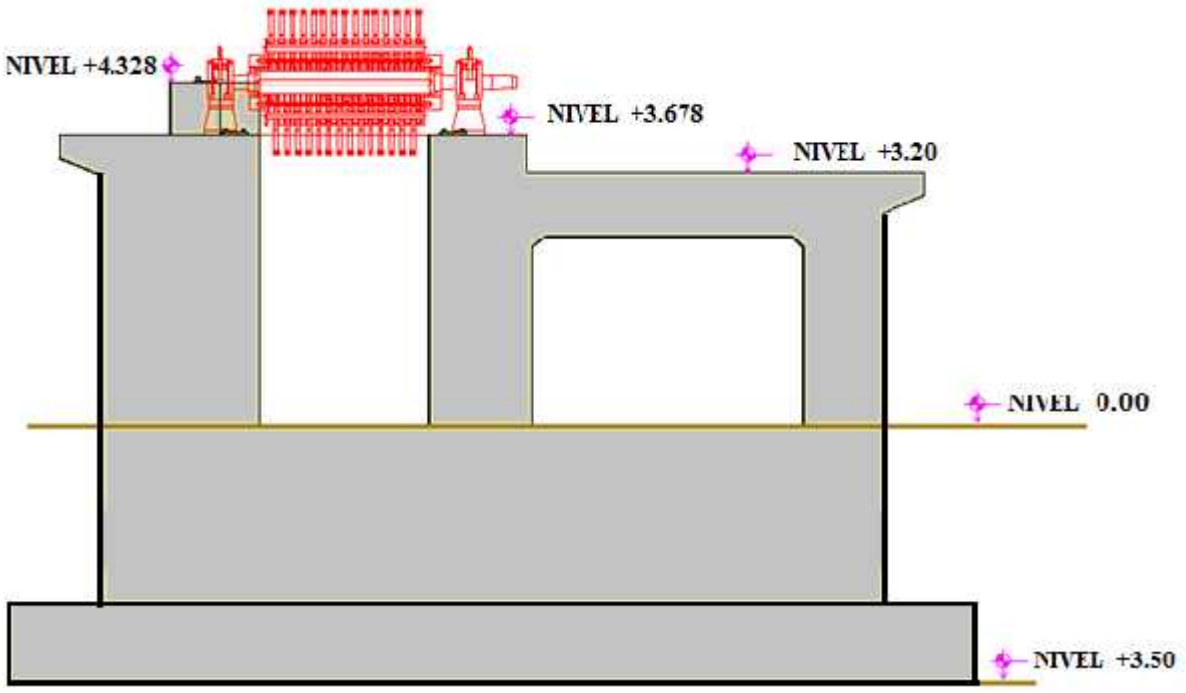


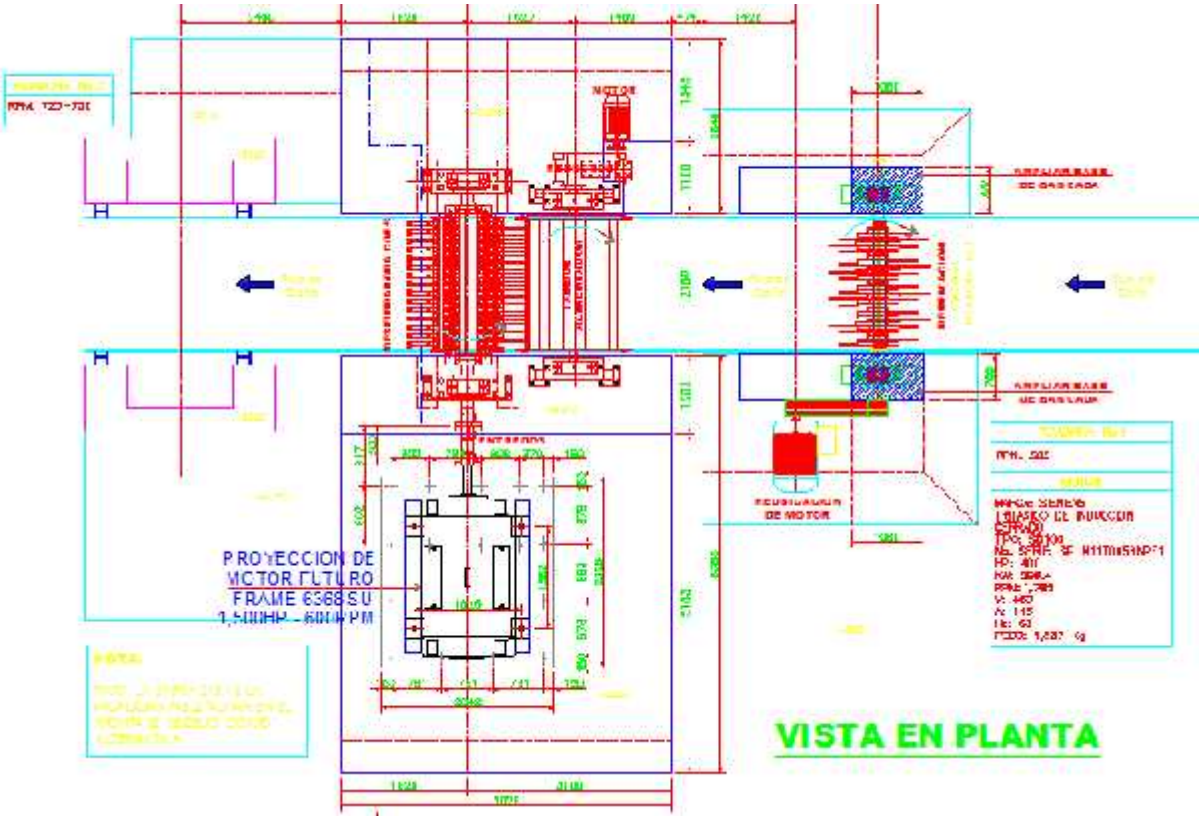
DIAGRAMA A.- Amplitudes Límite

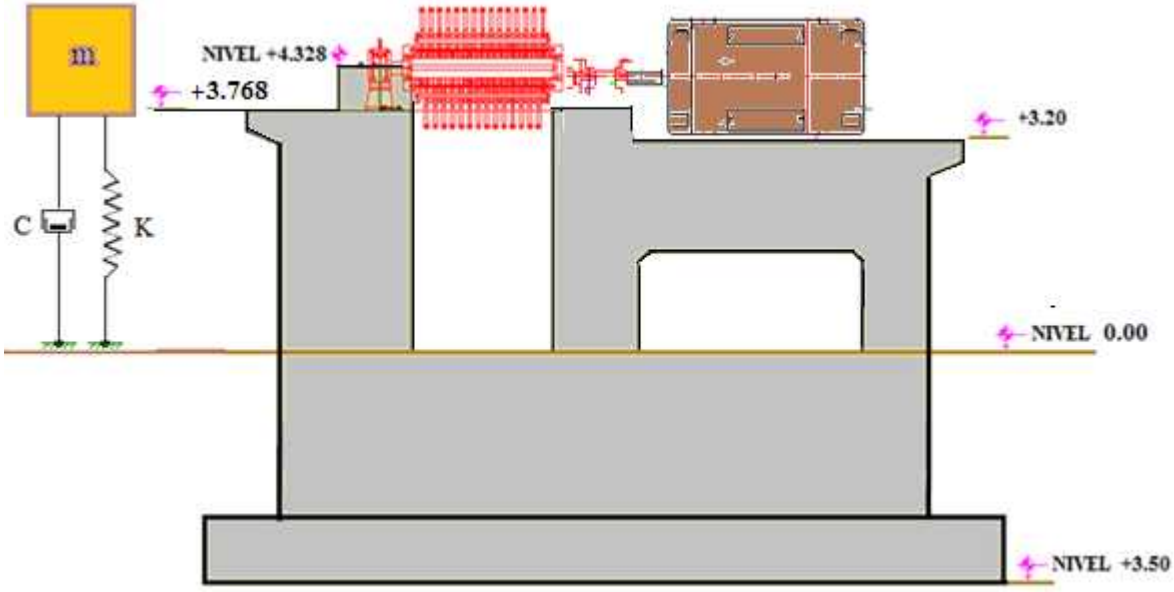
8.3. Análisis sísmico espectral.

Para los efectos de verificar la seguridad de los pedestales que sobresalen del nivel basal 0 ± 0.00 hasta le elevación $0 + 3.678m$ sobre los que se apoyan la desfibradora, el motor y el tambor de alimentación. Para este análisis, se considera que los pedestales y los equipos mecánicos, constituyen un oscilador simple amortiguado, con un grado de libertad en cada dirección horizontal ortogonal, con su masa discretizada en el C.G del conjunto, y las rigideces elásticas en cada uno de los pedestales.

Para la determinación de las fuerzas sísmicas inerciales inducidas, serán determinados los efectos del sitio a partir de la información del suelo donde se construirá la cimentación. Las aceleraciones espectrales serán determinadas empleando el espectro de aceleraciones correspondientes al departamento de Rivas, contando con el software de los espectros sísmicos para Nicaragua, realizado por el Autor. Todos estos análisis serán realizados de conformidad con las normativas indicadas en los Capítulos II, III, IV y V del RNC-2007.



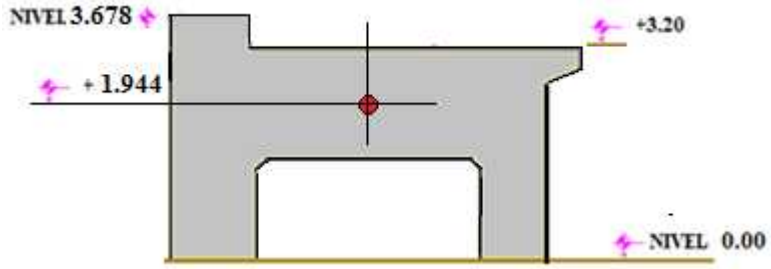




Determinación del centroide en 3D

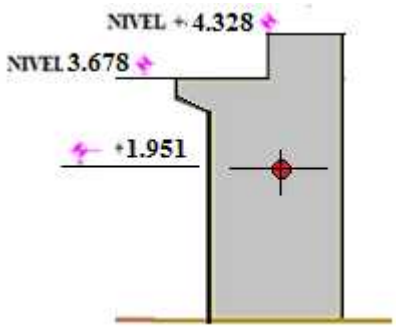
Coordenada vertical del centroide de pieza compuesta:

$$z_C = \frac{4.789 \cdot 1.839 + 5.157 \cdot 2.45 + 3.20 \cdot 1.60}{13.983} = \frac{25.561}{13.146} = 1.944m$$



Centroide vertical de pedestal simple:

$$z_C = \frac{7.356 \cdot 1.832 + 0.4514 \cdot 3.917}{13.983} = \frac{15.244}{7.81} = 1.951m$$



Coordenada del centroide vertical de ambos pedestales.

$$z_C = \frac{179.27 \cdot 1.944 + 117.46 \cdot 1.951}{296.73} = \frac{577.665}{296.73} = 1.946m$$

Coordenada vertical del centroide del motor.

$$z_c = 4.328m \quad W_m = 11.60t$$

Coordenada vertical del centroide de la desfibradora.

$$z_c = 4.328m \quad W_d = 20.0t$$

Coordenada vertical del centroide del tambor de almacenamiento.

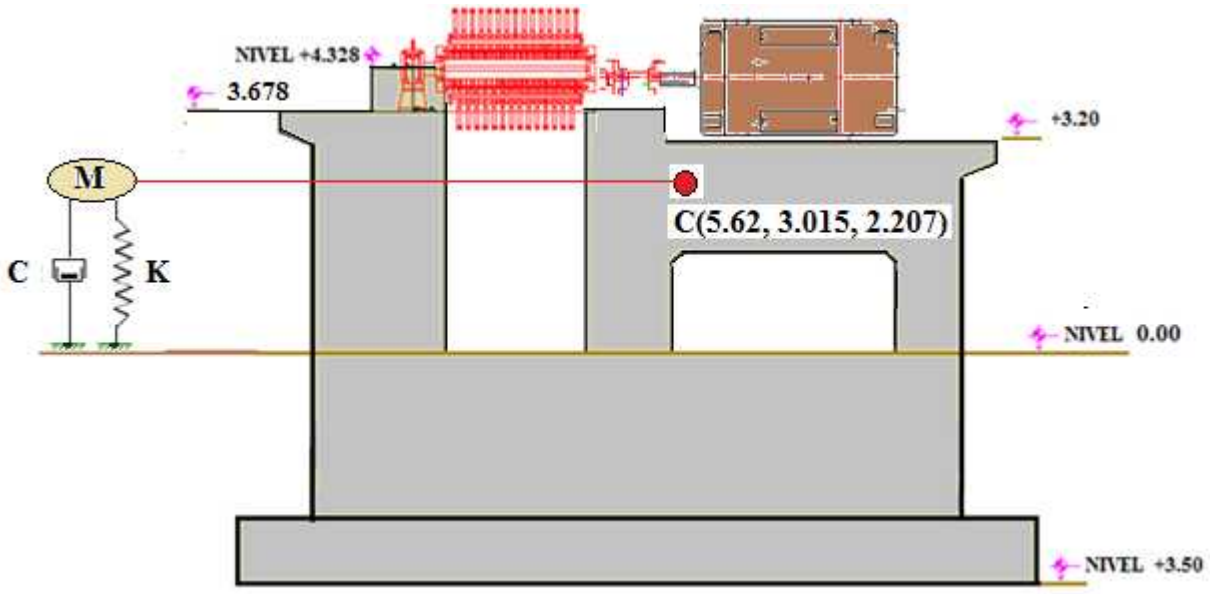
$$z_t = 4.816m \quad W_t = 4.0t$$

Coordenada vertical del centroide de las maquines.

$$z_{maq} = \frac{4.328 \cdot 11.60 + 4.328 \cdot 20.0 + 4.816 \cdot 4.0}{35.60} = \frac{156.029}{35.60} = 4.383m$$

Coordenada vertical del centroide combinada pedestales – maquinas.

$$z_{maq+ped} = \frac{35.60 \cdot 4.383 + 296.73 \cdot 1.946}{332.33} = \frac{733.464}{332.33} = 2.207m$$



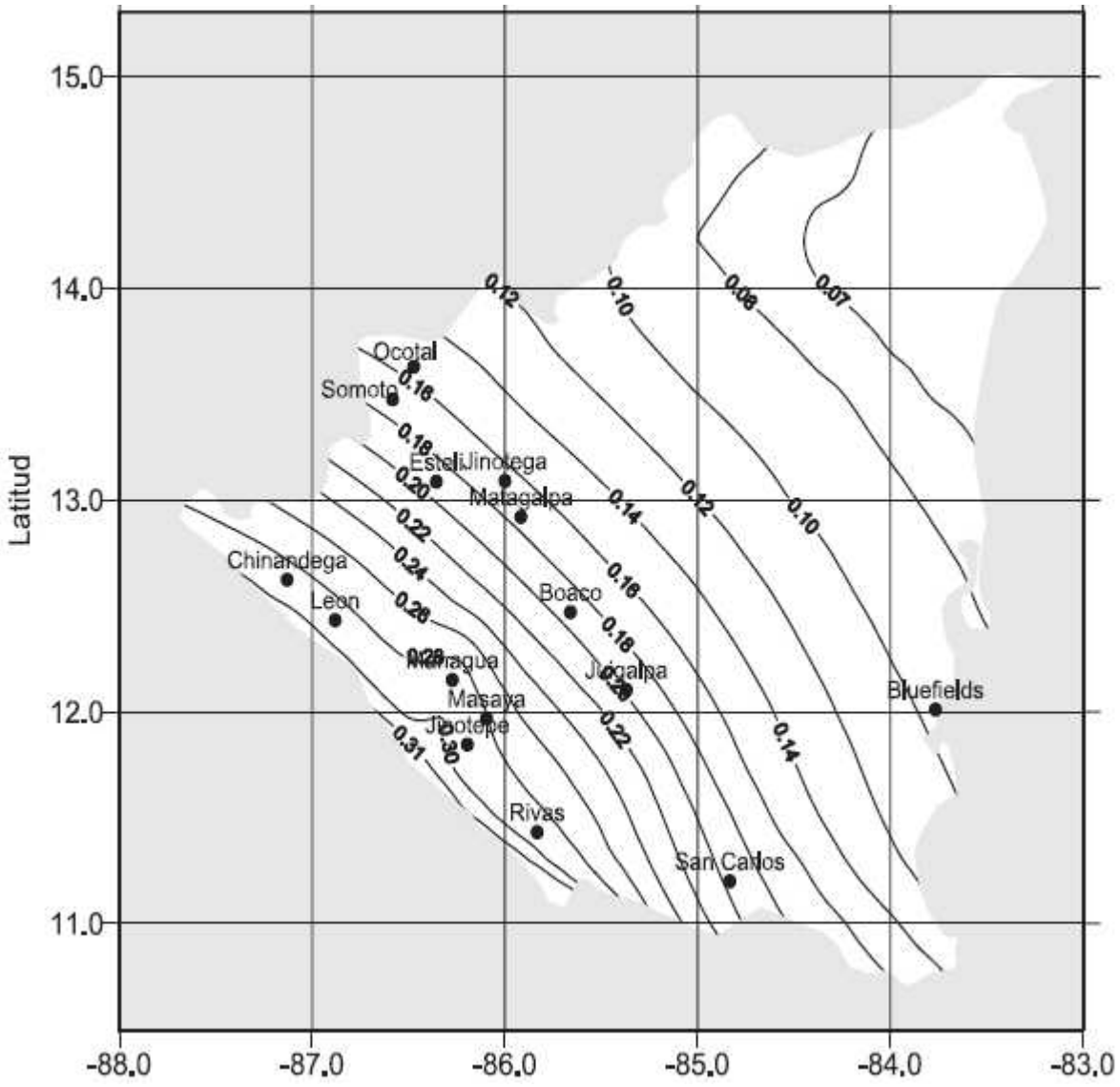
Clasificación sísmica de conformidad con el Artículo 24 del RNC-2007.

Según dicho Artículo, el coeficiente sísmico se define mediante la expresión:

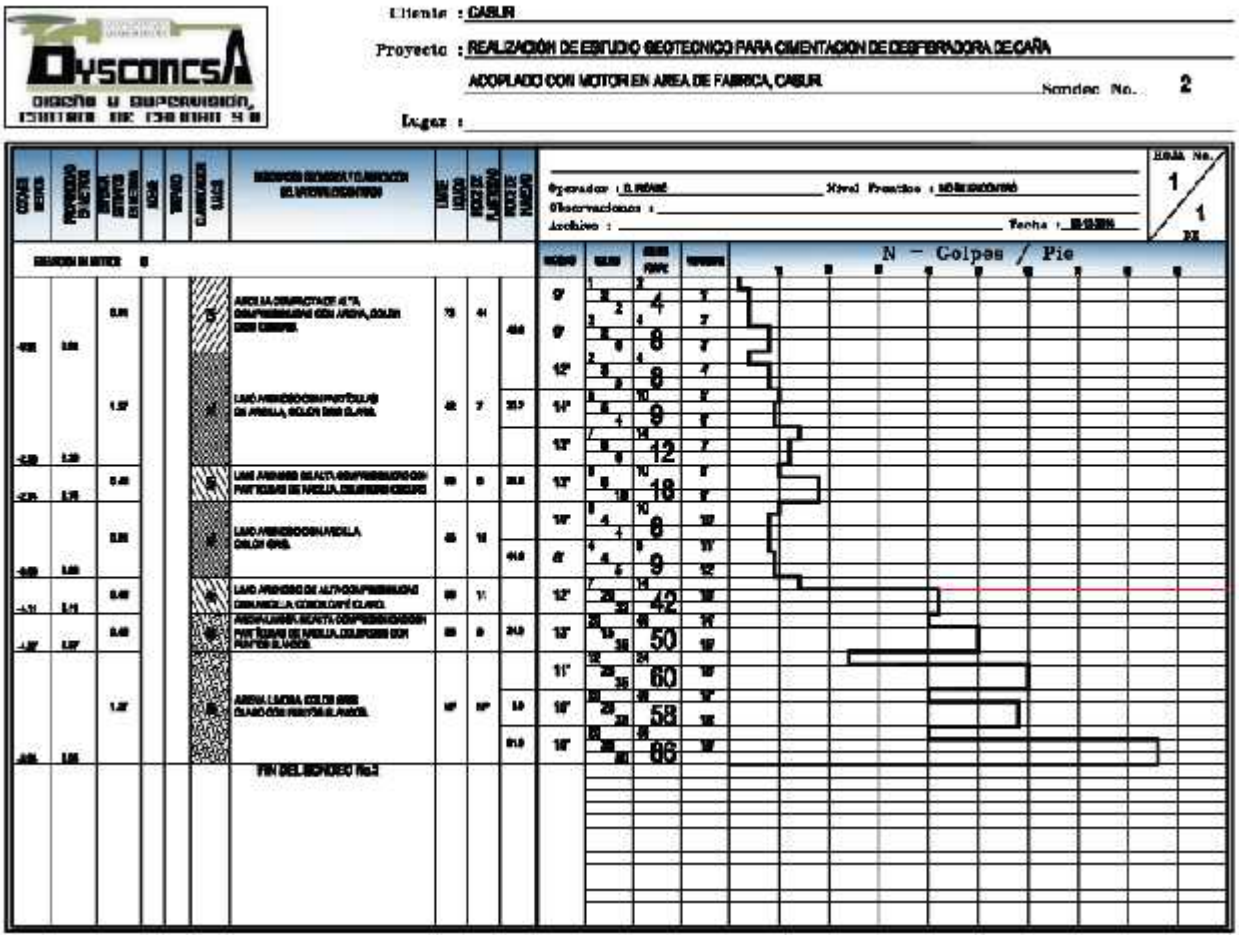
$$c = \frac{V_0}{W_0} = \frac{S\left(2.7 \cdot a_0\right)}{Q' \cdot \Omega}$$

Donde a_0 es la Iso aceleración definida en el mapa de Isoaceleraciones para Nicaragua, cuyo valor es $a_0 = 0.31$ para el departamento de Rivas

El factor de desempeño por ductilidad contenido en el Artículo 21 del RNC-2007, no estipula valores para este tipo de estructuras, por lo que será asumido un valor $Q = 1.5$ considerando que se trata de un bloque de cimentación masivo con baja ductilidad.



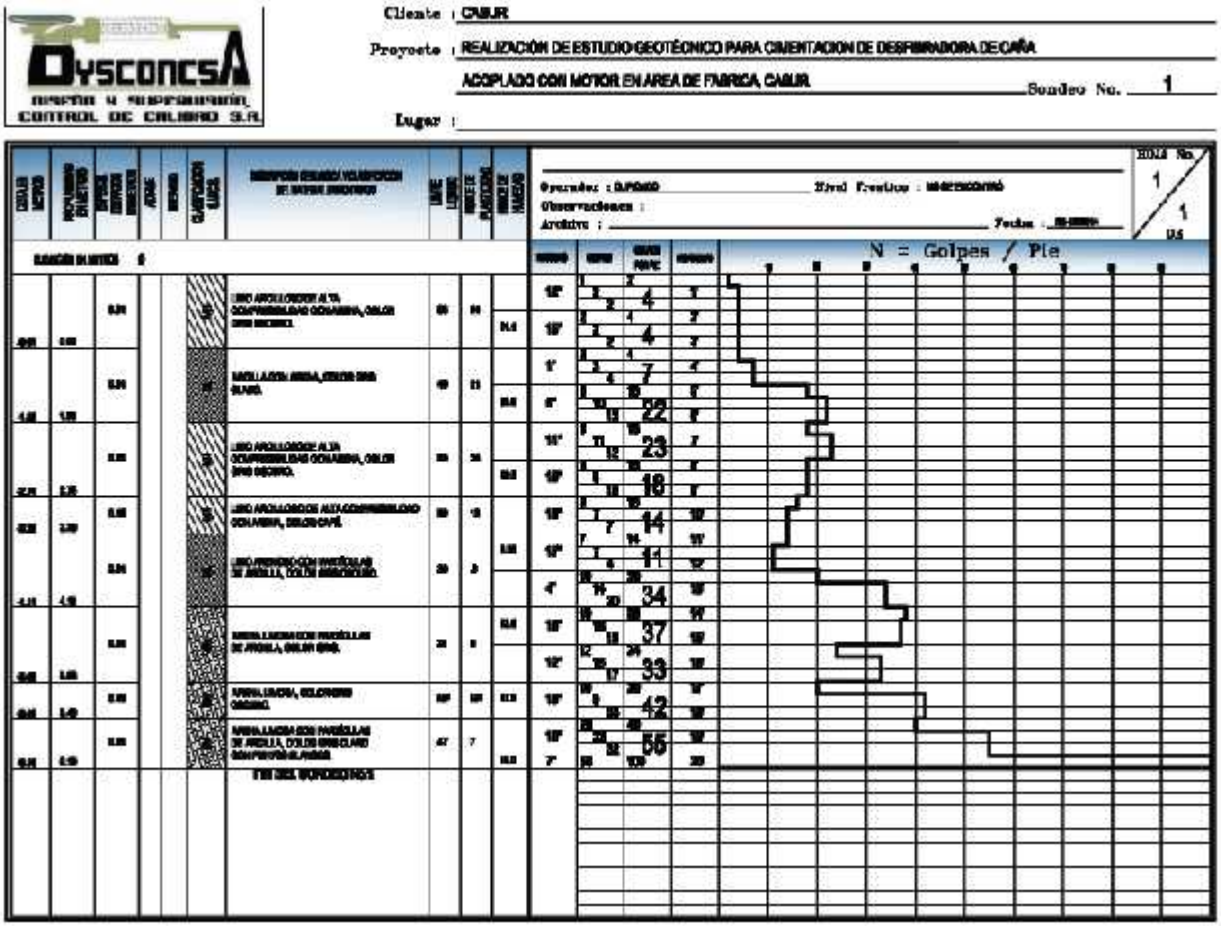
El factor que considera las condiciones locales del suelo en la respuesta sísmica, correspondería según el Artículo 25 del RNC-2007, de acuerdo a los gráficos de penetración contenidos en el estudio geotécnico, suelo del tipo II, al que se asocia un valor $S = 2.0$



El número de golpes por pie para el estrato de cimentación, según el grafico de penetración correspondiente al sondeo 2, exhibe valores del orden $N = 40$ El Artículo 25 del RNC-2007, establece que para rangos de velocidades de las ondas sísmicas de cortante, comprendidas en el intervalo: $180 \le V_2 \le 360 \frac{m}{s}$ corresponde a un valor de S = 2.0 según la Tabla 2 adjunta:

Zona Sísmica	Tipo de suelo		
	I	II	III
A	1.0	1.8	2.4
B	1.0	1.7	2.2
C	1.0	1.5	2.0

El subsuelo del sitio de estudio, según dicho sondeo, está conformado por un deposito estratigráfico predominantemente limo arenosos y areno limosos, con $IP = 6$



Según la estratigrafía correspondiente a la prueba de penetración 1, el estrato de fundación, está constituido por suelo limo-arenoso con partículas de arcilla color gris, al que corresponde un valor de $N = 34$.

Las velocidades medias de propagación, correspondientes a las cuatro SPT pueden determinarse con aproximación aceptable empleando la expresión de Otha-Goto, según la cual:

$$V_S = 69N^{0.17}Z^{0.20}F\left(\frac{m}{s}\right)$$

Donde:

N = Numero de golpes por pie de la prueba de penetración SPT

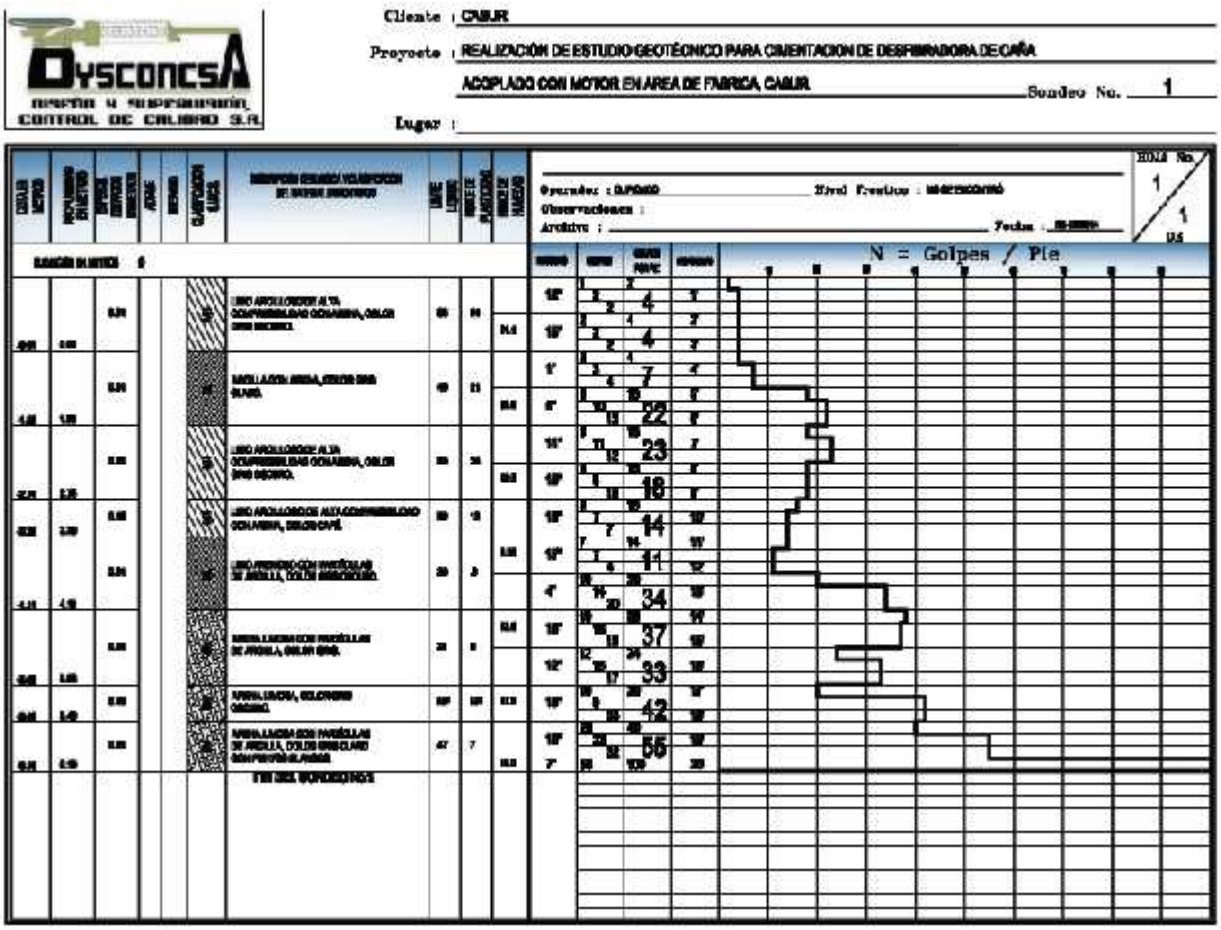
Z = Profundidad del estrato (m)

F = Factor de tipo de suelo

Tipo de suelo	F
Arcilla	1.00
Arena fina	1.09
Arena media	1.07
Arena gruesa	1.14
Grava arenosa	1.15
Grava	1.45

Para el sondeo 2: $V_S = 69 \cdot 40^{0.17} \cdot 3.80^{0.20} \cdot 1.05 = 177\left(\frac{m}{s}\right)$

Para el sondeo 1: $V_S = 69 \cdot 34^{0.17} \cdot 3.80^{0.20} \cdot 1.05 = 172\left(\frac{m}{s}\right)$



Los valores obtenidos por esta vía para las velocidades de propagación de las ondas de cortante en el suelo, serán comparados con las determinadas según la conocida ecuación de la dinámica del suelo, que relaciona la velocidad con el módulo de rigidez al cortante, y la densidad del suelo.

Tipo de Suelo	Modulo de Corte Kg/cm2
Granito	307.944,48 - 381.766,79
Piedra Caliza	172.955,12 - 318.490,53
Piedra Arenisca	113.194,21 - 240.449,80
Arena Compacta	760,72 - 1.318,26
Arena medio compactada	568,78 - 1.000,47
Arena sin compactar	381,77 - 745,96
Arcilla Dura	748,07 - 1.018,75
Arcilla Medio Dura	487,93 - 748,07
Arcilla Blanda	239,04 - 487,93

Distintos valores de el modulo de corte G para diferentes tipos de suelos.

Fuente: KRAMER, S.L. "Geotechnical Earthquake Engineering".

Para valores de $G = 750\frac{kg}{cm^2} = 7500\frac{t}{m^2}$ y $\circ = \frac{1.60}{9.8} = 0.16326\frac{tseg^2}{m}$

$$G = 750\frac{kg}{cm^2} = 7500\frac{t}{m^2}, \circ = \frac{1.60}{9.8} = 0.16326\frac{tseg^2}{m} \rightarrow V_S = \sqrt{\frac{G}{\circ}} = \sqrt{\frac{7500}{0.16326}} = 214\frac{m}{seg}$$

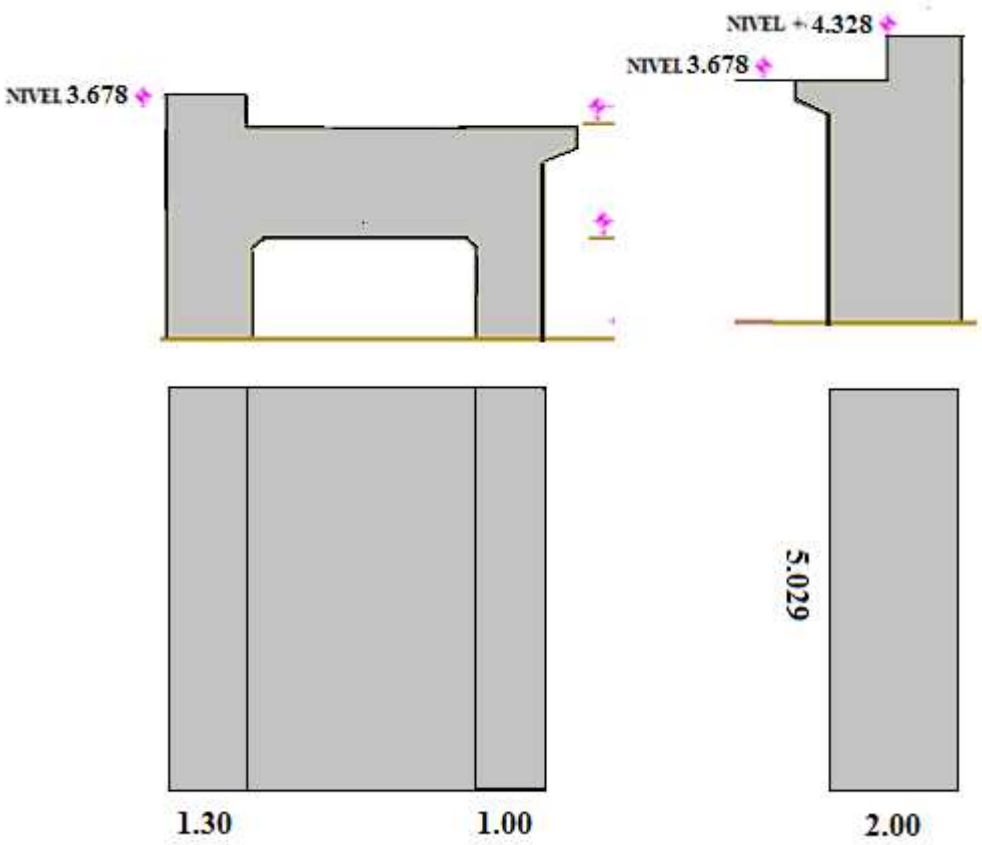
El valor medio para las velocidades determinadas con la expresión de Otha-Goto es $V_S = 188\frac{m}{seg} \succ 180\frac{m}{seg}$ y la velocidad determinada mediante la dinámica del suelo es $V_S = 214\frac{m}{seg} \succ 180\frac{m}{seg}$ por ambos recursos, casos se corrobora que el suelo es del tipo III.

El periodo predominante de vibración para la columna estratigráfica de suelo es

$T_S = \frac{4 \cdot H}{V_S} = \frac{15.20}{214} = 0.07seg$ Correspondiente a un suelo dinámicamente estable.

El valor del coeficiente sísmico es entonces $c = \frac{V_0}{W_0} = \frac{S\left(2.7 \cdot a_0\right)}{Q' \cdot \Omega} = \frac{2.0 \cdot 2.7 \cdot 0.31}{1.5 \cdot 2.0} = 0.558$

Rigidez de las piezas de concreto.



Momento de inercia alrededor del eje débil.

$$I_y = \frac{5.029 \cdot 1.30^3}{12} + \frac{5.029 \cdot 1.00^3}{12} = 1.3398 m^4$$

$$K_y = \frac{3E_c \cdot I_y}{h^3} = \frac{3 \cdot 254 \cdot 1.334 \cdot 10^{\cdot 8}}{170^3} = 20690 \frac{t}{cm}$$

Para el pedestal individual tenemos otras condiciones de frontera, por tanto la rigidez es la siguiente:

$$I_y = \frac{5.029 \cdot 2.0^3}{12} = 3.352 m^4$$

$$K_y = \frac{12 \cdot E_c \cdot I_y}{h^3} = \frac{12 \cdot 254 \cdot 3.352 \cdot 10^8}{367.8^3} = 20534 \frac{t}{cm}$$

Rigidez total $K_{ty} = 41224 \frac{t}{cm}$

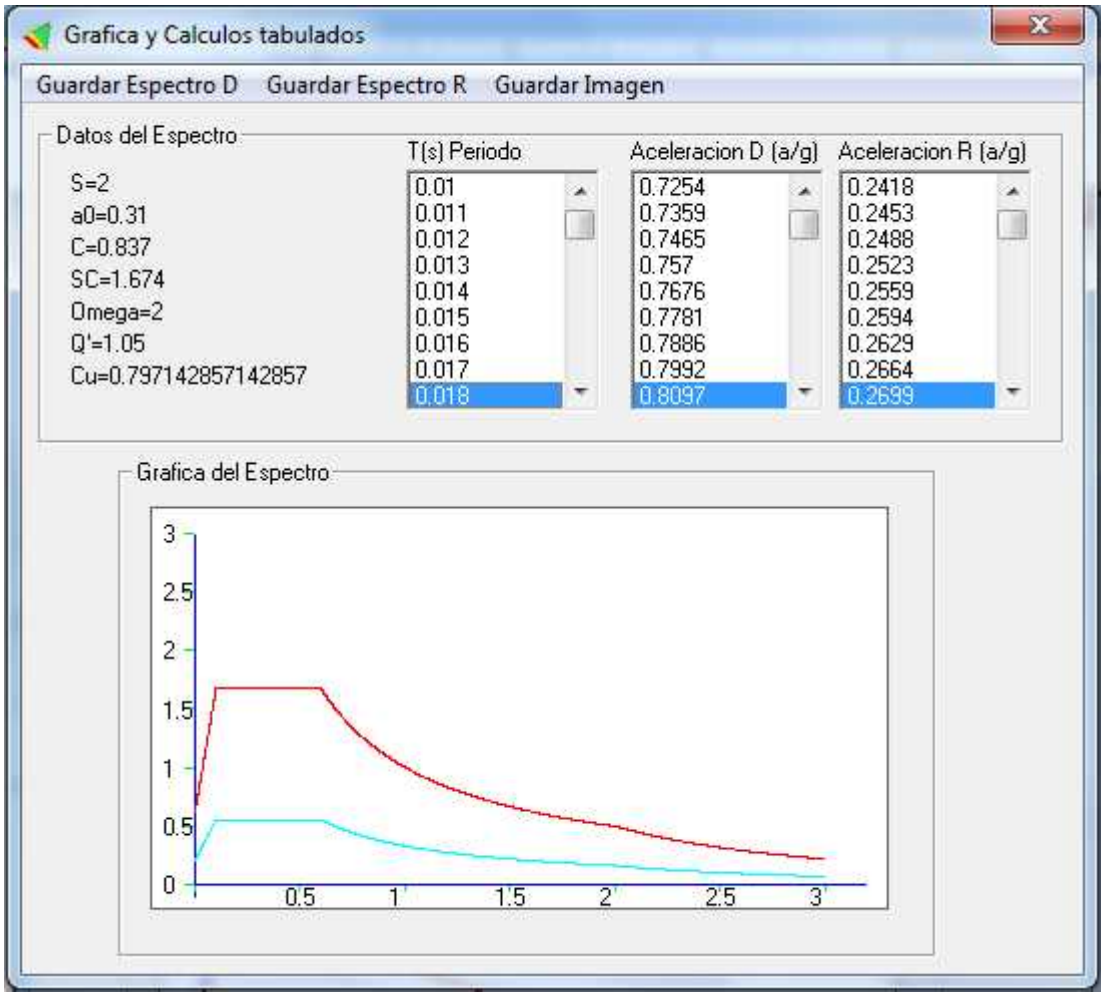
$$m = \frac{332.33}{980} = 0.339 \frac{tseg^2}{cm}$$

Frecuencia natural del oscilador en la dirección débil

$$\mu_y = \sqrt{\frac{41224}{0.339}} = 348.71 \frac{rad}{seg} \rightarrow T_y = 0.018 seg$$

Es una estructura muy rígida, cuyo patrón de desplazamiento sísmico es semejante al del suelo.

Para este valor del periodo, obtendremos la aceleración espectral correspondiente.



Aceleración espectral $Sa = \frac{a}{g} = 0.2699 \rightarrow a = 254.50 \frac{cm}{seg^2}$

Desplazamiento sísmico espectral $u_y = \frac{254.50}{348.71^2} = 2.09 \cdot 10^{-3} cm$

La fuerza espectral correspondiente es la siguiente $F_y = u_y \cdot k_y = 2.09 \cdot 10^{-3} \cdot 41224 = 86.16t$

Esta fuerza se distribuye en cada pedestal en proporción a sus rigideces relativas.

La pedestal individual le corresponde un factor de distribución igual a $FD = \frac{20534}{41224} = 0.498$

Por lo que la fuerza sísmica horizontal es la siguiente: $F_y = 0.498 \cdot 86.16 = 42.916t$

El concreto simple resiste $V_c = 0.53\sqrt{280} \cdot 502 \cdot 254 = 1131t \succ\succ 42.916t \quad ¤ \cdot v_n \geq v_u$

Para el pedestal compuesto las fuerzas sísmicas en cada uno son las siguientes:

$Iy1 = \frac{5.029 \cdot 1.30^3}{12} = 0.92m^4$

$Iy1 = \frac{5.029 \cdot 1.00^3}{12} = 0.4185m^4$

Los factores de distribución son:

$FD_1 = \frac{0.92}{1.3398} = 0.69 \rightarrow F_{1y} = 0.69 \cdot 43.25 = 29.84t$

$FD_2 = \frac{0.4185}{1.3398} = 0.31 \rightarrow F_{2y} = 0.31 \cdot 43.25 = 13.41t$

La resistencia del concreto para cada uno de los pedestales es:

$V_{c1} = 0.53\sqrt{280} \cdot 502 \cdot 130 = 578.76t \succ\succ 29.84t$

$V_{c2} = 0.53\sqrt{280} \cdot 502 \cdot 100 = 445.20t \succ\succ 13.41t$

Se verifica que debido a las dimensiones de las piezas, el refuerzo requerido para el concreto es únicamente por contracciones y temperatura.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

1. K.G. Bhatia. Foundations for industrial machines and earthquake effects. 2008.)

(J.M. Röesset. Wave propagation velocity under a vertically vibrated surface foundation. 2009.

2. Referido en: “Manual para diseño de cimentaciones para equípos vibratorios”. Por F. A. Herrera. Bogotá D.C., Colombia 2017.

3. Richart et al. (1970). F.E. Richart, Jr., J.R. Hall, Jr., and R.D. Woods, Vibrations of Soils and Foundations. State of the Art. International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, ASCE, Vol.112

4. Shekhter.OY: Consideration of inertial properties of soil in the computation of vertical forced vibrations of massive foundations (1948).

5. Some Applications of Soil Dynamics The 2009 Spencer J. Buchanan Lecture By Professor José M. Röesset.

6. George Gazetas (1984). Analysis of Machine Foundations Vibrations: “State of the Art“. International Journal of Soil Dynamics and Earthquake Engineering.

7. R. Dobry and George Gazetas. (1986). Dynamic Response of Arbitrarily Shaped Foundations. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 112.

9. Sankaran, K.S. and Subrahmanyam, M.S.: “Calculated and observed vibration amplitudes”. Discussion, Journal of SMFE, Proc. ASCE.1971.

10. Whitman, R.V. and Richart, F.E. Design Procedures for Dynamically Loaded foundations, J. Soil Mech. ASCE, 1967.

11. Mc Neil, R.L. Machine Foundations: The State of the Art. Proc. Soil Dyn. 7th ICSMFE, 1969.

12. Woods, R.D. Measurement of Dynamics Soil Properties. Proc. Earth. Engrg. Soil Dyn., ASCE, Pasadena, 1978.

13. Ozaydin, K., Richart, F. E., Dobry, R., Ishihara, K, and Marcuson, W.F. Dynamic Properties and Behavior of Soils. Proc. 7th WCEE, State-of-the-Art Volume, Istanbul, 1980.

14. (Lord Rayleigh “On waves propagated along the plane surface of an elastic solid” 1885.

15. Horace Lamb. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. 1904.)

16. Reissner, Stationare Axialsymmetrische Durch eine Schuttelnde Masse Erregte Schwingungen eines Homogenen Elastischen Halbraums. Ingeniur Archiv. 1936.

17. Sung, T.Y. (1953) “Vibration in Semi-Infinite Solids Due to Periodic Surface Loadings Symposium on Dynamic Testing of Solid, Special Technical Publication 156, ASTM.

18. Quinlan, P.M. (1953) “The Elastic Theory of Soil Dynamics,” Symposium on Dynamic Testing of Soils, Special Publication 156, ASTM.

19. Arnold, R.N., Bycroft, G.N. and Warburton, G.B. (1955) "Forced Vibrations of a Body on an Infinite Elastic Solid" J. App. Mech. Trans., ASEM, Vol. 22.)

20. Bycroft, G.N. Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-Infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum. Philos.Trans. Roy. Soc. London 1956.

21. F. E. Richart, Jr., F. ASCE. Vol. 127, 1962.

22. T. K. Hsieh, Foundation Vibrations, Proceding of the Institution of Civil Engineering. Vol., 1962.

23. J. L. Lysmer. Vertical Motion of Rigid Footing. University of Michigan. 1965.

24. Richart, F. E, Jr.: Foundation Vibrations. Jour. Soil Mech. Found. Div. ASCE, Proc. ASCE, vol. 86, 1960.

25. Richart, F. E., Jr., and Whitman, R. V., "Comparison of Footing Vibration Tests... Engineering Practice, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1967

25. Whitman, R. V., and Richart, Jr., F. E., "Design Procedures for Dynamically Loaded Foundations," Journal of the Soil 1976.

26. Source: Lysmer, J., and Richart, F.E., Jr (1966) Dynamic Response of Footing to Vertical Loading. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol 92.

26. Richart, F. E., Jr., and Whitman, R. V., "Comparison of Footing Vibration Tests... Engineering Practice, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, N.Y., 1967

27. Whitman, R. V., and Richart, Jr., F. E., "Design Procedures for Dynamically Loaded Foundations," Journal of the Soil 1976.

28. Source: Lysmer, J., and Richart, F.E., Jr (1966) Dynamic Response of Footing to Vertical Loading. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, Vol 92

29. Richart, F.E., Jr and R.V., Whitman (1969) Comparasion of Footing Vibrations Test with Theory. Journal of Soil Mechanics and Foundation Division.ASCE.

30. Subrahmanyam, M.S. Prediction of Vertical Vibration of Footing.

Ph.D.Thesis submitted to the IIT, Madrás, 1971.)

31. Richart et al. (1970). F.E. Richart, Jr., J.R. Hall, Jr., and R.D. Woods, Vibrations of Soils and Foundations.

32. Luco J. E. & Westmann R. A. 1971. Dynamic response of circular footing, *Journal of the Engineering Mechanics Division.*

33. E. Reissner and H. F. Sagoci, *Forced torsional oscillations of an elastic half-space,* L J. 1944

34. Arnold, R. N. Bycroft, G. N. and Warbnrton, G. B. Forced vibrations of a body on an infinite elastic solid, J. Appl. Mech. ASME, 1955, 22, 391 18 Byctoft, G. N. Forced vibration of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic space and an elastic stratum, Phil. Trans. Royal Soc. Lond., 1956, A248, 327

35. D.D. Barkan. Dynamics of Bases and Foundations. Mc Graw -Hill Book Company 1962

36. Hall, J.R. Jr 1967. Coupled rocking and sliding oscillations of rigid circular footing. Symp of Wave Propagation and Dynamic Properties of Earth Materials, Albuquerque. New México.

37. Veletsos, A. S. & Wei, Y. T. Lateral and Rocking Vibrations of Footings, *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 1971.

38. Gazetas, G., (1983), "Analysis of Machine Foundation Vibrations: State of the art", Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 1983

39. Dobry, R. and Gazetas, G. 1986, "Dynamic Response of Arbitrarily Shaped Foundations", J. Geot. Eng.

40. Erik Ivar Fredholm (1866-1927) tuvo un importante papel en la matemática de las ecuaciones integrales y teoría espectral. Una parte importante de su trabajo fue realizado en 1899, cuando estudió el problema de Dirichlet en comunicación con H. Poincaré (1854-1912), Emile Artin (1898-1962) y Jacques Hadamard (1865-1963). Al año siguiente publica su informe sobre teoría de ecuaciones integrales con el título *Sur une nouvelle méthode pour la Résolution du probléme de Dirichlet*, para, en 1903, dar a conocer una versión más amplia de la teoría en *Sur une classe d'ecuations fonctionnelles* (Acta Mathemática, 27:365-390). David Hilbert (1862-1943) extendería los estudios de Fredholm con la inclusión de valores propios, que conduciría posteriormente a la teoría de los espacios de Hilbert. Fuente: Acerca de las ecuaciones integrales y la alternativa de Fredholm, por Carlos S. Chinea.

41. SASSI2010 Version 1.1 Ostadan, F. and Deng, N. [2011], Bechtel Version of SASSI2010 – A System for Analysis of Soil-Structure Interaction, Version 1.1. Geotechnical and Hydraulic Engineering Services, Bechtel National, Inc., San Francisco, CA)

42. Wolf, J.P., 1994. Foundation Vibration Analysis using Simple Physical Models.

43. Wolf, J.P., 2004. Foundation Vibration Analysis: A Strength of Materials Approach.

44. Wolf, J. P., & Song, C. (1996). Finite-Element Modelling of Unbounded Media.

45. E. Kausel and J. M. Roësset. Stiffness matrices for layered Soils. Bull. 1981.

46. J. Domínguez, J.M. Roesset, Dynamic Stiffnesses of rectangular foundations, MIT Research Report, R. 78-20, 1978.)

47. A.S. Veletsos, Y.T. Wei, Lateral and rocking vibration of footings, Journal of Soil Mechanics and Foundations, ASCE 97 1971).

48. J.E. Luco, R.A. Westman, Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic halfspace, Journal of Applied Mechanics, ASME 94 1972).

49. R.J. Apsel, J.E. Luco, Impedance functions for foundations embedded in a layered medium: An integral equation approach, Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1987.

50. G. Gazetas, J.L. Tassoulas, Horizontal Stiffnesses of Arbitrarily Shaped embedded foundations, Journal of Geotechnical Engineering, ASCE 1987

51. A. Mita, J.E. Luco, Dynamic response of a square foundation embedded in an elastic halfspace, Soil Dynamics and Earthquake Engineering 1987

52. E. Çelebi, S. Fırat, I. Çankaya, The evaluation of Impedance Functions in the analysis of foundations vibrations using Boundary Element Method. Turkey 2006.)

53. Luco J. E (2004). Approximate External Boundaries for Truncated Models of Unbounded Media.

54. Kausel E. (1988). Local Transmitting Boundaries E. Journal of Engineering Mechanics.)

55. John. P. Wolf: The *Escaled* Boundary Finite Element Method. 2003.)

56. Source: Natural Frequency of Vertical Foundation Vibrations Evaluated from In-Situ Impact Test.

57. K.G. Bhatia: Foundations for industrial machines and earthquake effects. ISET Journal of Earthquake Technology, Paper No. 495, Vol. 45, No. 1-2, March-June 2008, pp. 13–29

58. Isaac Alpan: Machine Foundations and Soil Resonance. 1961 ISSN 0016-8505)

59. Shamsher Prakash, Vijay K. Puri: Foundations for vibrating machines. *Special Issue, April-May 2006, of the Journal of Structural Engineering, SERC, Madrás. INDIA.*

60. Andrew K. Costain, B.Sc.Eng. And J Michael Robichaud, P.Eng. Practical Methods for Vibration Control of Industrial Equipment.

61. Blake, M.P: New Vibration Standards for Maintenance 1964.

62. J. F. Semblat: Modeling seismic wave propagation and amplification in 1D/2D/3D linear and nonlinear unbounded media. Dept, of Soil and Rock Mechanics, LCPC, University Paris-East, Paris, France.

63. H.V. P. Truong: Dynamic Site-Amplification Factors and Dynamic Attenuation Factors by Dynamic Soil Mass. 15 WCEE. Lisboa 2012)

64. Mohammed Yousif Fattah; Ahmed A. Al-Azal Al-Mufty; Hula Taher Al- Badri: Design charts for machine foundations. Journal of Engineering, Baghdad, Iraq, 2007.

65. Ralph E. Blake: Basic Vibration Theory 1961.

66. Source: Natural Frequency of Vertical Foundation Vibrations Evaluated from In-Situ Impact Test.

67. K.G. Bhatia: Foundations for industrial machines and earthquake effects. ISET Journal of Earthquake Technology, Paper No. 495, Vol. 45, No. 1-2, March-June 2008, pp. 13–29

68. Isaac Alpan: Machine Foundations and Soil Resonance. 1961 ISSN 0016-8505)

69. Shamsher Prakash, Vijay K. Puri: Foundations for vibrating machines. *Special Issue, April-May 2006, of the Journal of Structural Engineering, SERC, Madras. INDIA.*

70. Andrew K. Costain, B.Sc.Eng. And J Michael Robichaud, P.Eng. Practical Methods for Vibration Control of Industrial Equipment.

71. Blake, M.P: New Vibration Standards for Maintenance 1964.

72. J. F. Semblat: Modeling seismic wave propagation and amplification in 1D/2D/3D linear and nonlinear unbounded media. Dept, of Soil and Rock Mechanics, LCPC, University Paris-East, Paris, France.

73. H.V. P. Truong: Dynamic Site-Amplification Factors and Dynamic Attenuation Factors by Dynamic Soil Mass. 15 WCEE. Lisboa 2012)

74. Mohammed Yousif Fattah; Ahmed A. Al-Azal Al-Mufty; Hula Taher Al- Badri: Design charts for machine foundations. Journal of Engineering, Baghdad, Iraq, 2007.

75. Ralph E. Blake: Basic Vibration Theory 1961.

76. K.G. Bhatia: Foundations for industrial machines and earthquake effects. 28th ISET Annual Lecture Center for Applied Dynamics D-CAD Technologies, New Delhi, 2008.

77. Suresh Arya, Michael O'Neill, George Pincus: "Design of structures and foundations for vibrating machines, Editores Michael W. O'Neill, George Pincus, 1979.

78. Dynamics of Machinery: Balancing of Rotating Masses. Department of Mechanical Engineering. Prepared By: Vimal Limbasiya. Darshan Institute of Engineering & Technology, Rajkot Indian.

79. John J. Dicker, Jr. Gordon R. Pennock. Joseph E. Shigley: theory of machines and mechanisms. New York Oxford University Press 2003.

80. Gazetas, G., Analysis of Machine Foundations, State of the Art of Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Volume 2, 1983.

81. Richart, F.E., Hall, J.R., and Woods, R.O., Vibration of Soil and Foundations, Englewood Cliffs, Prentice- Hall, 1970.

82. N. S. V. Kameswara Rao. Foundation Design: Theory and Practice © 2011 John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd. ISBN: 978-0-470-82534-1

83. D.D.Barkan. Dynamics of Bases and Foundations. Mc Graw –Hill Book Company 1962.