



Universidad
Nacional de
Ingeniería

Facultad de Tecnología de la Industria

Propuesta de modelo matemático de cantidad económica de pedido para artículos en deterioro con tasa de distribución de Weibull, demanda tipo rampa, desarrollado en escenarios de escasez e inflación, con ejemplo numérico y sensibilidad.

Trabajo monográfico para optar al título de ingeniero industrial.

Elaborado por:

Br. Claudio de Jesús
Chavarría Altamirano.
Carnet: 2016-1329U

Tutor:

Ing. Pietro Marcelo
Silvestri Jirón.

30 de julio de 2022

Managua, Nicaragua

DEDICATORIA

A Dios por su infinito amor y misericordia, que me ha guiado y perdonado todos los días de mi vida; sin duda encuentro todas las respuestas de la vida y un agradable descanso en Dios.

A mis padres y hermanos por su incondicional apoyo y comprensión durante mis estudios en la Universidad Nacional de Ingeniería.

A mi tutor de tesis Ing. Pietro Marcelo Silvestri Jirón por todos los conocimientos y recomendaciones que me compartió durante el tiempo que fui alumno en la carrera de ingeniería industrial.

A todos los docentes que aportaron sus conocimientos para mi formación académica.

A la Universidad Nacional de Ingeniería que me benefició con beca de residencia estudiantil durante 7 semestres, este beneficio fue esencial para poder cursar la carrera de ingeniería industrial.

Con mucho cariño a todos los amigos que obtuve en la UNI, siempre me motivaron, estuvieron en los momentos más difíciles brindándome su afecto, empatía y me apoyaron de manera incondicional, son personas increíbles.

Claudio de Jesús Chavarría Altamirano

RESUMEN

En el presente documento se desarrolla un modelo de cantidad económica de pedido relevante para la situación pandémica de Covid-19. El modelo es para un solo artículo donde el inventario se agota debido a la combinación de la demanda y el deterioro de artículos, la tasa de demanda es una función tipo rampa lineal y la tasa de deterioro se considera dependiente del tiempo y se supone que sigue una distribución de Weibull de dos parámetros, el modelo admite faltantes y se supone que las unidades faltantes de inventario se atrasan completamente, además, se tiene en cuenta el efecto de la inflación en el valor del dinero en el tiempo.

La función de demanda tipo rampa lineal describe distintas fases de la demanda del mercado, iniciando con una tasa lineal y cambiando a constante en cierto lapso de tiempo mientras que la función de tasa de Weibull de dos parámetros describe diferentes situaciones del deterioro. Se proporcionan procedimientos analíticos para desarrollar el modelo de cantidad económica de pedido y se establecieron las condiciones necesarias para generar una política óptima de reabastecimiento.

Se brinda un ejemplo numérico para ilustrar un sistema de inventario y ejecutar el procedimiento de solución para obtener la política óptima, finalmente se realiza un análisis de sensibilidad para probar la capacidad de respuesta del modelo matemático además de analizar el efecto de los parámetros del modelo.

Palabras clave: Planificación de inventario, Reabastecimiento, Modelo de Cantidad económica de pedido, Modelado matemático, Pandemia.

ABSTRACT

In this document, an economic order quantity model relevant to the Covid-19 pandemic situation is developed. The model is for a single item where inventory is depleted due to the combination of demand and item deterioration, the demand rate is a linear ramp type function and the deterioration rate is considered time dependent and is assumed to follow a two parameter Weibull distribution, the model admits shortages and missing units of inventory are assumed to be fully backlogged, furthermore, the effect of inflation on the time value of money is taken into account.

The linear ramp-type demand function describes different phases of market demand, starting with a linear rate and changing to constant at a certain time lag while the two-parameter Weibull rate function describes different deterioration situations. Analytical procedures are provided to develop the economic order quantity model and the conditions necessary to generate an optimal replenishment policy are established.

A numerical example is provided to illustrate an inventory system and run the solution procedure to obtain the optimal policy, finally a sensitivity analysis is performed to test the responsiveness of the mathematical model in addition to analyzing the effect of the model parameters.

Keywords: Inventory planning, Replenishment, Economic order quantity model, Mathematical modeling, Pandemic.

CONTENIDO

I. INTRODUCCIÓN	1
II. ANTECEDENTES	3
III. JUSTIFICACIÓN	6
IV. OBJETIVOS	8
4.1. Objetivo General.....	8
4.2. Objetivos específicos.....	8
V. MARCO TEÓRICO	9
5.1. Inventarios	9
5.1.1. Definición de inventarios	9
5.1.2. Propósitos para tener inventarios.....	9
5.2. Criterio de optimización	10
5.3. Costos relevantes del inventario.....	11
5.3.1. Costo de mantener el inventario	11
5.3.2. Costo de pedido	11
5.3.3. Costo de penalización	11
5.3.4. Costo total de inventario	12
5.4. Rol de la demanda en el desarrollo de modelos de inventario	13
5.5. Cantidad económica de pedido	13
5.6. Extensiones de la cantidad económica de pedido	15
5.6.1. Demanda determinista y variable en el tiempo	15
5.6.2. Efecto del deterioro en los inventarios	20
5.6.3. Efecto de la inflación en los inventarios	21
VI. DISEÑO METODOLÓGICO	23
6.1. Tipo de Investigación.....	23
6.1.1. Según el enfoque de la investigación.....	23
6.1.2. Según el alcance de los resultados.....	23
6.1.3. Según el tiempo de ocurrencia.....	23
6.1.4. Según el período en que se realiza el estudio	23
6.2. Área de estudio.....	23

6.2.1. Campos de estudio relacionados	23
6.3. Objeto de Investigación	24
6.4. Fuentes de información	24
6.4.1. Fuentes primarias	24
6.4.2. Fuentes secundarias	24
6.5. Metodología propuesta de investigación	25
VII. DESARROLLO.....	26
7.1. Definición de supuestos y notaciones del modelo	26
7.1.1. Notaciones	26
7.1.2. Supuestos	27
7.2. Desarrollo del modelo matemático	28
7.2.1. Solución para ecuación diferencial en $0 \leq t \leq \mu$	30
7.2.2. Solución para ecuación diferencial en $\mu \leq t \leq t_1$	32
7.2.3. Solución para ecuación diferencial en $t_1 \leq t \leq T$	33
7.2.4. Inventario máximo para cada ciclo de pedido	34
7.2.5. Cantidad total de artículos que se deterioran	35
7.2.6. Cantidad total de artículos que se acumulan	36
7.2.7. Cantidad total de faltantes acumuladas	37
7.3. Optimización del modelo	38
7.3.1. Ecuación de costo total relevante en el sistema de inventario	38
7.3.2. Costo total por unidad de tiempo	39
7.3.3. Minimización del modelo de inventario	39
7.4. Política óptima de inventario.....	41
7.5. Ejemplo numérico y análisis de sensibilidad.....	42
7.5.1. Ejemplo numérico	42
7.5.2. Solución del ejemplo numérico	42
7.5.3. Análisis de sensibilidad	44
7.5.4. Conclusiones del análisis de sensibilidad	47
III. CONCLUSIONES	48
IX. RECOMENDACIONES.....	49
APÉNDICES	50

Apéndice 1: Distribución continua de probabilidad de Weibull.....	50
Apéndice 2: Solución de la integral del factor integrante	52
Apéndice 3: Valor actual con una tasa nominal capitalizada continuamente.....	53
Apéndice 4: Política óptima de inventario.	55
Apéndice 5: Gráfico de la función de costo total de inventario.....	60
Apéndice 6: Análisis de sensibilidad: Costo de ordenar.....	62
Apéndice 7: Análisis de sensibilidad: Costo por deterioro.....	63
Apéndice 8: Análisis de sensibilidad: Costo de mantener.....	63
Apéndice 9: Análisis de sensibilidad: Costo por faltantes	65
Apéndice 10: Análisis de sensibilidad: Parámetro de la demanda D_0	66
Apéndice 11: Análisis de sensibilidad: Parámetro de la demanda μ	67
Apéndice 12: Análisis de sensibilidad: Parámetro de la función Weibull α	68
Apéndice 13: Análisis de sensibilidad: Parámetro de la función Weibull β	69
Apéndice 14: Análisis de sensibilidad: Tasa de descuento neta de la inflación	70
Apéndice 15: Analisis de sensibilidad: Duración del tiempo de cada ciclo de pedido.....	71
BIBLIOGRAFÍA	72

ÍNDICE DE ECUACIONES

Ecuación 1: Costo total de inventario	12
Ecuación 2: Tamaño de lote económico.....	14
Ecuación 3: Tiempo entre pedidos en el modelo EOQ.....	14
Ecuación 4: Demanda como una función lineal.....	15
Ecuación 5: Demanda como función lineal proporcional al tiempo.....	16
Ecuación 6: Demanda como una función exponencial	16
Ecuación 7: Función de Heaviside	17
Ecuación 8: Demanda como función de tipo rampa	17
Ecuación 9: Función de Heaviside para demanda tipo rampa	18
Ecuación 10: Componente lineal de la demanda tipo rampa	18
Ecuación 11: Componente constante de demanda tipo rampa	18
Ecuación 12: Demanda como función tipo rampa exponencial	19
Ecuación 13: Componente exponencial de la demanda tipo rampa.....	19
Ecuación 14: Componente constante de la demanda tipo rampa	19
Ecuación 15: Tasa de deterioro de Weibull de dos parámetros	21
Ecuación 16: Tasa de deterioro de Weibull de tres parámetros	21
Ecuación 17: Tasa de descuento neta de la inflación.....	22

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Demanda con tasa creciente lineal	16
Ilustración 2: Demanda con tasa creciente exponencial.....	17
Ilustración 3: Demanda con tasa creciente tipo rampa	18
Ilustración 4: Demanda con tasa creciente tipo rampa exponencial.....	19
Ilustración 5: Metodología de investigación	25
Ilustración 6: Sistema de inventario	29
Ilustración 7: Política óptima generada.....	43
Ilustración 8: Variación del costo total del sistema respecto a t_1 y T	44
Ilustración 9: Análisis de sensibilidad	46



I. INTRODUCCIÓN

La administración de los inventarios es fundamental para alcanzar la excelencia operativa de las empresas debido que estos se encuentran entre las fuentes de ingresos más importantes para una empresa así que, una contabilidad, control preciso del producto en stock y la cantidad a pedir pueden tener un impacto financiero dramático.

En la actualidad la pandemia ha tenido fuertes repercusiones en el sector industrial como la falta de mano de obra, escasez de materiales, problemas en transporte, inventarios y planificación. La inflación es un fenómeno que toma fuerza en la pandemia debido a la lenta reactivación de los procesos de suministros que impactan directamente en los precios y menor movimiento en la economía (menor consumo). Para hacer frente a esta situación desde el punto operativo es necesario adoptar políticas de inventario optimas lo más apegada a la nueva realidad.

El desarrollo de esta investigación gira en torno al modelo de inventario de cantidad económica de pedido (*EOQ, Economic Order Quantity*). Este tipo de modelo de inventario es muy común en las empresas de manufactura y distribución; fue presentado por primera vez por (Harris, 1913) y analizado por (Wilson, 1934). Aunque el modelo en muchos casos brinda una excelente aproximación, este puede generar resultados alejados de la realidad debido a los supuestos que considera tales como una demanda constante e independiente de otras acciones, no considera descuentos por volumen en los pedidos, asume un tiempo de reposición inmediato (tasa de reabastecimiento infinita), frecuencia de reposición constante, los costos se mantienen constantes en el tiempo y no existe la rotura de stock.

El desarrollo de esta investigación consistió en formular un modelo matemático de cantidad económica de pedido que se adapta de mejor manera a la situación actual causada por la pandemia utilizando supuestos como una demanda de tipo rampa lineal, considerando el escenario de escasez, el efecto de la inflación, además de considerar un deterioro de los artículos modelado con una tasa de Weibull de dos parámetros.



Propuesta de modelo matemático de cantidad económica de pedido para artículos en deterioro con tasa de distribución de Weibull, demanda tipo rampa, desarrollado en escenarios de escasez e inflación, con ejemplo numérico y sensibilidad.

Se definieron los supuestos y notaciones haciendo maleable con matemáticas el sistema de inventario, logrando así modelar el inventario con ecuaciones diferenciales bajo el escenario de enfoque, después se construyó la función de costo total de inventario y se obtuvo una solución óptima de esta mediante aplicaciones de cálculo diferencial y métodos numéricos. Finalmente se brinda un ejemplo numérico acompañado de un análisis de sensibilidad con el objetivo de verificar la capacidad de respuesta del modelo y analizar la influencia de los parámetros considerados.



II. ANTECEDENTES

El modelo de cantidad económica de pedido fue presentando primeramente por (Harris, 1913) y analizado por (Wilson, 1934) donde se popularizó. El modelo básico de cantidad económica de pedido se rige por supuestos que en la práctica pueden no ser realistas. Esta observación ha influido en investigadores para desarrollar extensiones del modelo básico.

Algunas extensiones en las que se considera una demanda variable en el tiempo son (Donaldson, 1977) que presentó una política de reabastecimiento de inventario considerando una tendencia lineal en la demanda y brindó una solución analítica del problema, (Hariga & Goyal, 1995) presentaron un procedimiento alternativo para determinar una política óptima de inventario donde la demanda del artículo tiene tendencia lineal.

En modelos donde se introduce el deterioro se tiene (Chung & Ting, 1994) que desarrollaron un programa de reposición considerando artículos en deterioro y una demanda lineal proporcional al tiempo, (M. Hariga & Benkherouf, 1994) presentaron una heurística para un modelo de inventario óptimo de reposición con artículos en deterioro y demanda con tasa exponencial variable en el tiempo, (Mandal. & A, 1998) presentaron un sistema de inventario donde la tasa de demanda es de tipo rampa lineal para artículos deteriorados, (Tripathya & Mishra, 2011) formularon un modelo EOQ con deterioro de Weibull de dos parámetros y costo de producción dependiente del tiempo utilizando una demanda tipo rampa lineal.

En investigaciones que se considera el escenario de escasez, (Wee, 1995) presentó un modelo determinista de inventario de tamaño de lote para artículos en deterioro, también consideró el escenario de escasez y disminución de mercado, (Giri, Jalan, & Chaudhuri, 2003) presentaron un modelo de cantidad económica de pedido donde el deterioro de los artículos tiene una tasa con distribución de Weibull de dos parámetros, consideran el escenario de escasez y utilizan una demanda con tasa de rampa exponencial, (Jain & Kumar, 2007) presentaron un modelo de inventario EOQ con



demanda tipo rampa exponencial, tasa de deterioro con distribución de Weibull de dos parámetros, planteando un escenario donde se inicia con escasez, (Mandal. B. , 2010) presentó un modelo de inventario EOQ para artículos deteriorados con tasa de Weibull y bajo una demanda tipo rampa considerando el escenario con inventario inicial y escasez. (Sanni & Chukwu, 2013) formularon un modelo de cantidad económica de pedido para artículos en deterioro con tasa de distribución de Weibull de tres parámetros, demanda tipo rampa lineal y tienen en cuenta la escasez, (Singh & Pattnayak, 2013) formularon un modelo EOQ para artículos en deterioro lineal proporcional al tiempo, demanda lineal y escasez con atraso parcial.

En modelos donde se considera la inflación y su efecto en el valor del dinero en el tiempo están (S. Bose & Chaudhuri, 1995) que formularon un modelo EOQ para artículos en deterioro con tasa de demanda lineal dependiente del tiempo y tuvieron en cuenta el efecto de la inflación y descuento de tiempo, (Kumar, Singh, & Kumari, 2012) formularon un modelo de inventario con demanda dependiente del tiempo e instalación de almacenamiento limitada en entornos inflacionarios, (Kumar & Kumar, 2016) formularon un modelo de EOQ de dos almacenes para artículos con deterioro no instantáneo, la tasa de demanda es considerada dependiente de las existencias y el modelo es afectado por la inflación bajo el patrón de valor temporal del dinero en un horizonte de planificación finito, permitieron escasez parcialmente retrasada dependiente del tiempo de espera, (Sundararajan, Palanivel, & Uthayakumar, 2019) propusieron un modelo EOQ con artículos en deterioro no instantáneo, la demanda está en función del precio, se permiten faltantes, artículos en deterioro y se considera el valor del dinero en el tiempo.

Otras extensiones interesantes son (Singh & Pattnayak, 2014) que proporcionaron un modelo de inventario EOQ para elementos deteriorados con tasa de demanda de tipo rampa trapezoidal y un deterioro con una distribución de Weibull, (Mishra, 2015) presentó un modelo de inventario con demanda rampa tipo trapezoidal y tasa de deterioro controlable y (Verma, Vijay, & Azeez, 2017) formularon un modelo de inventario para la con tasa de deterioro modelada por una función de Gompertz, una demanda tipo rampa y escasez.



Propuesta de modelo matemático de cantidad económica de pedido para artículos en deterioro con tasa de distribución de Weibull, demanda tipo rampa, desarrollado en escenarios de escasez e inflación, con ejemplo numérico y sensibilidad.

En investigaciones donde se tiene en cuenta escenarios de pandemia está (Indrajitsingha, Sahoo, Samanta, Misra, & Raju, 2020) que presentaron un modelo de inventario EOQ difuso con demanda dependiente del precio y artículos en deterioro además de enfocar la investigación a la pandemia por Covid-19 haciendo relevante la importancia de este tipo de modelados de inventario en escenarios de pandemia.

El análisis de las investigaciones realizadas deja ver que no hay un modelo matemático específico de cantidad económica de pedido que considere una demanda tipo rampa lineal, que tenga en cuenta el escenario de escasez y se considere el efecto de la inflación en el valor del dinero en el tiempo, además de considerar artículos en deterioro a través de una tasa de distribución de Weibull de dos parámetros.



III. JUSTIFICACIÓN

Ante la emergencia sanitaria, países de todo el mundo se han visto en la obligación de practicar confinamientos durante varias semanas o meses y así evitar el aumento de casos de contagios. En primera instancia, estos confinamientos provocaron un decrecimiento de los ingresos en las empresas hasta el punto de tener que cerrar operaciones.

Por otra parte, la situación pandémica ha generado desajuste e incertidumbre entre la demanda real y la demanda de los actores intermediarios en la cadena de suministros afectando los costos de inventarios.

En países centroamericanos existen muchas empresas que se encargan de los productos perecederos como frutas, verduras, carnes y pescado los cuales se quedaron acumulados en los almacenes debido a la disminución de la demanda provocando un margen de utilidad de los productos inventariados tendiendo a cero o que disminuye considerablemente a partir de un instante de tiempo desconocido o aleatorio.

Por otro lado, productos farmacéuticos, alcohol para desinfección, jabón, mascarillas, guantes, dispositivos tecnológicos, entre otros, han presentado demanda variable en el tiempo lo cual ha generado que algunas empresas sufran roturas de stock.

En presencia de estas situaciones, es necesario tomar decisiones con base a modelos lo más apegado a la realidad. El modelo de inventario más usado y del cual se desarrollan los demás modelos es el de cantidad económica de pedido, este modelo se aplica bajo ciertos supuestos, que hacen que el modelo no sea práctico o realista para muchas empresas, el supuesto de demanda constante, hace que el modelo no sea útil para empresas con demandas estacionales, puntuales o irregulares, o cambios drásticos en los hábitos de compra del cliente; además de hacerse presente la rotura de stock que es cuando se recibe una petición y no se cuenta con el inventario necesario para satisfacer la demanda generando costo por pérdida de ventas, por otra parte no se



considera el deterioro de los productos; el asumir que los artículos tienen vida útil ilimitada puede conducir a políticas de inventario alejadas a la óptima.

Otro factor que actualmente no se puede ignorar es la inflación, que se asocia generalmente con la pérdida del poder adquisitivo del dinero debido al aumento de los precios. La inflación afecta los costos de materia prima y mano de obra, generando menor capacidad de producción, por ende, un bajo nivel de almacenamiento y disminución del promedio de ventas.

En la presente investigación se propone un modelo matemático de cantidad económica de pedido con demanda variable en el tiempo de tipo rampa lineal, se considera el escenario de escasez de inventario, se considera la inflación y su efecto en el valor del dinero en el tiempo además de considerarse artículos que sufren deterioro bajo una tasa de distribución de Weibull de dos parámetros ya que se considera que el deterioro se comporta como una variable desequilibrada.



IV. OBJETIVOS

4.1. Objetivo General

Proponer un modelo matemático de cantidad económica de pedido con demanda tipo rampa, desarrollado en escenarios de escasez e inflación para artículos en deterioro a través de una tasa de distribución de Weibull.

4.2. Objetivos específicos

1. Establecer notaciones y supuestos para desarrollar el modelo de cantidad económica de pedido.
2. Desarrollar el modelo matemático de cantidad económica de pedido bajo las notaciones y supuestos establecidos.
3. Encontrar la solución óptima del modelo de cantidad económica de pedido.
4. Realizar ejemplo numérico y análisis de sensibilidad para probar la capacidad de respuesta del modelo y efecto de los parámetros.



V. MARCO TEÓRICO

5.1. Inventarios

5.1.1. Definición de inventarios

Según (Chase & Jacobs, 2014) los inventarios son las existencias de una pieza o recurso utilizado en una organización y un sistema de inventario es el conjunto de políticas y controles con los cuales se vigilan los niveles del inventario y determinan los que se van a mantener, el momento en que es necesario reabastecerlo y las dimensiones de los pedidos.

Por su parte (Krajewski, Ritzman, & Malhotra, 2008) mencionan que el inventario se crea cuando el volumen de materiales, partes o bienes terminados que se reciben es mayor que el volumen de los mismos que se distribuye; el inventario se agota cuando la distribución es mayor que la recepción de materiales.

5.1.2. Propósitos para tener inventarios

En (Chase & Jacobs, 2014) mencionan que todas las empresas (inclusive las operaciones justo a tiempo) mantienen un suministro de inventario por las siguientes razones:

- **Independencia entre operaciones:** El suministro de materiales en el centro de trabajo permite flexibilidad en las operaciones.
- **Variación en la demanda:** Si se conoce con precisión la demanda del producto, quizá sea posible (aunque no necesariamente económico) producirlo en la cantidad exacta para cubrir la demanda. Sin embargo, por lo regular, la demanda no se conoce por completo, y es necesario tener inventarios de seguridad o de amortiguación para absorber la variación.
- **Flexibilidad en la programación de la producción:** La existencia de un inventario alivia la presión sobre el sistema de producción para tener listos los bienes. Esto provoca tiempos de entrega más extensos, lo que permite una planificación de la producción para tener un flujo más tranquilo y una operación de menor costo en virtud de una producción de lotes más grandes.



- **Variación en el tiempo de entrega de materias primas:** Al pedir material a un proveedor ocurren demoras por distintas razones: una variación normal en el tiempo de envío, un faltante del material en la planta del proveedor que da lugar a pedidos acumulados, una huelga inesperada en la planta del proveedor o en una de las compañías que realizan el envío, un pedido perdido o un embarque de material incorrecto o defectuoso.
- **Descuentos basados en el tamaño del pedido:** Hay costos relacionados con los pedidos: mano de obra, llamadas telefónicas, captura, envío postal y demás. Por tanto, mientras mayor sea el pedido, la necesidad de otros pedidos se reduce. Asimismo, los costos de envío favorecen los pedidos más grandes; mientras más grande sea el envío, menor será el costo unitario.

De los propósitos mencionados se comprende la importancia del inventario, pero se debe tener presente que los inventarios son costosos y que grandes volúmenes de inventario en tiempos de ciclo prolongados no son recomendables. Por otra parte, es importante mencionar que el objetivo de una adecuada gestión de inventarios con volúmenes altos y bajos es encontrar la cantidad media entre ambos niveles que mejor equilibrio genere entre las ventajas y desventajas de mantener inventario.

5.2. Criterio de optimización

En (Nahmias, 2007) se indica que el interés es optimizar el sistema de inventarios, debido a eso debemos determinar un criterio de optimización o de ciencia adecuado. Casi todos los modelos de inventario usan la minimización del costo como criterio de optimización.

Un criterio alternativo de eficiencia podría ser la maximización de la ganancia. Sin embargo, la minimización del costo y la maximización de la ganancia son criterios equivalentes en lo esencial, para la mayor parte de los problemas de control de inventario.



5.3. Costos relevantes del inventario

En (Nahmias, 2007) se menciona que, aunque cada sistema de inventario es único, casi todos los costos de inventario pueden agruparse dentro de las siguientes tres categorías: costo de mantener en inventario, costo de pedido y costo de penalización. A continuación, se describe cada uno de estos:

5.3.1. Costo de mantener el inventario

También se le llama costo de almacén o costo de inventario, y es la suma de todos los costos proporcionales a la cantidad de inventario disponible físicamente en cualquier punto en el tiempo. Entre los componentes del costo de mantener el inventario se incluyen diversos aspectos que en apariencia no se relacionan, entre los cuales estarían:

- El costo de suministrar el espacio físico para almacenar los artículos.
- Impuestos y seguros.
- Roturas, estropicios, deterioros y obsolescencia.
- Costo de oportunidad de una inversión alternativa.

5.3.2. Costo de pedido

El costo de mantener inventario incluye todos aquellos costos que son proporcionales a la cantidad de inventario a la mano, mientras que el costo de pedido depende de la cantidad de inventario que se pide o se produce. En la mayoría de las aplicaciones, el costo de pedido tiene dos componentes: uno fijo y uno variable. El costo fijo es el independiente del tamaño del pedido, mientras no sea cero. El costo variable es el incurrido con base en las unidades.

5.3.3. Costo de penalización

El costo de penalización, también conocido como costo de desabasto, es el costo de carecer de suficiente inventario a mano para satisfacer una demanda cuando se presenta. Este costo tiene una interpretación diferente dependiendo de si la demanda en exceso es de pedidos en espera (pedidos que no pueden surtirse inmediatamente y que se mantienen en libros hasta que llegue la siguiente entrega) o perdidos (conocidos como ventas perdidas). En el caso del pedido en espera, el costo de penalización incluye todos



los costos contables y/o por retraso en los que pueda incurrirse. En el caso de venta perdida, incluye la utilidad perdida que se hubiese obtenido por la venta.

En cualquiera de los casos, puede incluir también un costo de pérdida de buena voluntad, que es una medida de satisfacción del cliente. En la práctica, puede resultar sumamente difícil estimar el componente de pérdida de buena voluntad del costo de penalización.

5.3.4. Costo total de inventario

El costo total de inventario es la suma de todos los costos relevantes de inventario y está dado por la siguiente ecuación:

$$\text{Costo total de inventario} = \text{Costo de mantener} + \text{costo de pedido} + \\ \text{costo por penalización}$$

Ecuación 1: Costo total de inventario

El propósito de la minimización de la fórmula de costo total de inventario es equilibrar sus costos componentes y responder las preguntas ¿Cuántas unidades pedir? y ¿Cuándo ordenar? que se traduce como determinar el tamaño del pedido y el momento del reabastecimiento (con un costo total minimizado), las preguntas anteriores se pueden contestar calculando la cantidad económica de pedido.

Lo descrito brinda un marco inicial para decidir una política óptima de inventario, sin embargo, los modelos específicos para determinar estas políticas son tan diversos como las diferentes situaciones que se pueden presentar en la práctica real. Cabe destacar que la complejidad de la generación de un modelo de inventario¹ depende en gran medida del grado de incertidumbre en la demanda.

¹ Modelo de inventario: Es un modelo matemático que ayuda a las empresas a determinar el nivel óptimo de inventarios que deben mantenerse en un proceso de producción, administrar la frecuencia de los pedidos, decidir la cantidad de bienes o materias primas a almacenar, rastrear el flujo de suministro de materias primas y bienes para proporcionar un servicio ininterrumpido a los clientes sin ningún retraso en la entrega.



5.4. Rol de la demanda en el desarrollo de modelos de inventario

(Taha, 2017) menciona que, de manera general, la complejidad analítica del inventario depende si la demanda es determinista o probabilística además de que la demanda puede o no variar con el tiempo y en la práctica el patrón de demanda en un modelo de inventario puede asumir los siguientes comportamientos:

1. Determinista y constante (estática) con el tiempo.
2. Determinista y variable (dinámica) con el tiempo.
3. Probabilística y estacionaria en el tiempo.
4. Probabilístico y no estacionario en el tiempo.

También (Taha, 2017) menciona que, en términos del desarrollo de modelos de inventario, la primera categoría es la más simple desde el punto de vista analítico y la cuarta es la más compleja. Por otro lado, la primera categoría es la menos probable de ocurrir en la práctica y la cuarta es la más prevalente.

5.5. Cantidad económica de pedido

El desarrollo del modelo básico de cantidad económica de pedido se presenta por primera vez en (Harris, 1913) que es un modelado de programación de producción donde se asume una demanda constante, el pedido y los costos de retención también son constantes por otra parte se le reconoce a (Wilson, 1934) por el análisis y popularización del modelo.

(Krajewski, Ritzman, & Malhotra, 2008) definen la cantidad económica de pedido (*EOQ*, del inglés *Economic Order Quantity*) como el tamaño de lote que permite minimizar los costos totales anuales por mantenimiento de inventario de ciclo y hacer pedidos. El método básico de cantidad económica de pedido se basa en los siguientes supuestos:

1. La tasa de demanda del artículo es constante.
2. No existen restricciones para el tamaño de cada lote.



3. Los dos únicos costos relevantes son el de mantener el inventario y el costo fijo por lote, tanto de hacer pedidos como de preparación.
4. Las decisiones referentes a un artículo pueden tomarse independientemente de las decisiones correspondientes a los demás.
5. El tiempo de espera es constante.

La fórmula del modelo de cantidad económica de pedido se muestra a continuación:

$$EOQ = \sqrt{\frac{2DS}{H}}$$

Ecuación 2: Tamaño de lote económico

Donde:

C = Costo total anual del inventario del ciclo

Q = Tamaño de lote, en unidades

H = Costo de mantener una unidad en inventario durante un año

D = Demanda anual, en unidades por año

S = Costo por hacer pedidos o preparar un lote, en unidades monetarias por lote

Otra ecuación relevante a definir es el tiempo entre pedidos (*TBO*, del inglés *time between orders*) que para un tamaño de lote en particular es el tiempo promedio que transcurre entre la recepción de dos pedidos de reabastecimiento de *Q* unidades.

$$\text{Tiempo entre pedidos} = \frac{EOQ}{D}$$

Ecuación 3: Tiempo entre pedidos en el modelo EOQ

Aunque la cantidad económica de pedido a menudo brinda una aproximación razonable del tamaño de lote apropiado rara vez los escenarios son así de simples (cumplen los supuestos establecidos), debido a esto existen extensiones del modelo básico donde se consideran comportamientos como patrón de demanda variable en el



tiempo, descuentos por cantidad, políticas para proveedores, productos perecederos, sistemas de multiproductos, sistemas multinivel, la inclusión de faltantes, inflación y valor del dinero en el tiempo, consideración de dos o más almacenes, consideración de la tasa de producción (Modelo EPQ), introducción de parámetros inciertos y/o difusos.

5.6. Extensiones de la cantidad económica de pedido

5.6.1. Demanda determinista y variable en el tiempo

En busca de hacer un modelo de cantidad económica de pedido más realista, muchos investigadores han considerado demandas variables en función del tiempo (considerada para esta investigación), en función del inventario, en función de parámetros de la mercadotecnia y demanda incierta. La extensión del modelo con demanda probabilística estacionaria y no estacionaria no se consideran para esta investigación debido a que existen otros modelos de inventarios que se adaptan mejor que la cantidad económica de pedido.

Para el caso de la demanda variable en función del tiempo varios investigadores han modelado el patrón de la demanda con funciones matemáticas, las más relevantes se presentan a continuación:

Demanda con tasa creciente lineal

Una función lineal es una función cuyo dominio son todos los números reales, cuyo codominio son también todos los números reales y cuya expresión analítica es un polinomio de primer grado.

(Hariga & Goyal, 1995) definen la demanda como una función lineal de la siguiente manera:

$$D(t) = a + bt$$

Ecuación 4: Demanda como una función lineal

Donde la tasa de demanda en el tiempo t definida en el intervalo $(0, T)$ donde a y b son constantes arbitrarias que satisfacen $a \geq 0$ y $a + bt \geq 0$.

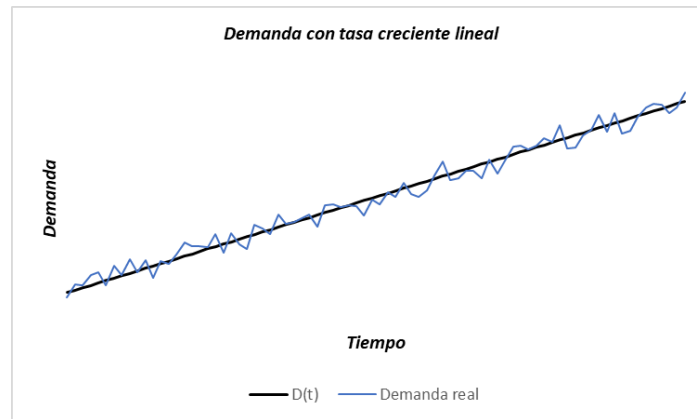


Ilustración 1: Demanda con tasa creciente lineal

Fuente: Elaborado por autor

(Chung & Ting, 1994) definen la demanda como una función lineal donde $a = 0$ plasmando el escenario donde la demanda es proporcional al tiempo:

$$D(t) = bt$$

Ecuación 5: Demanda como función lineal proporcional al tiempo

Demanda con tasa creciente exponencial

Una función exponencial es de la forma $y = ae^{bx}$, en donde la base a y b , son constantes y b es el exponente la variable independiente.

(M. Hariga & Benkherouf, 1994) definen la tasa de demanda como conocida y que varía exponencialmente con el tiempo como se muestra a continuación:

$$D(t) = ae^{bt}$$

Ecuación 6: Demanda como una función exponencial

donde $a \geq 0$ y b es una constante arbitraria.

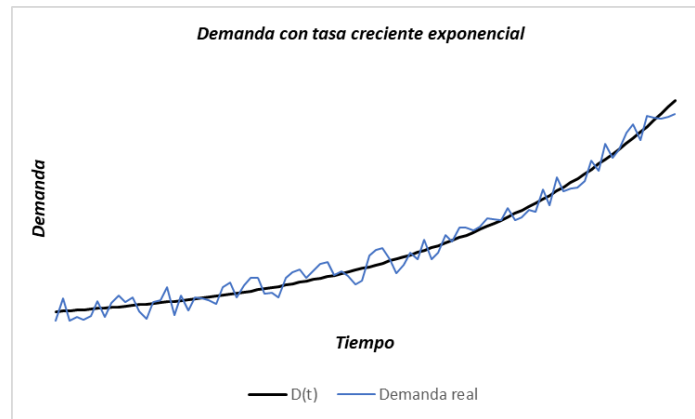


Ilustración 2: Demanda con tasa creciente exponencial

Fuente: Elaborado por autor

Demanda con tasa creciente tipo rampa

El considerar una demanda con aumento lineal tiene como efecto un nivel de inventario tendría que crecer indefinidamente, es más razonable considerar una demanda con cierta tasa de demanda creciente y que con el pasar del tiempo se vuelve constante; artículos de moda recién lanzados al mercado, automóviles, equipos electrónicos, etc. presentan este patrón, este se denomina tipo rampa.

El patrón de tipo rampa se modela gracias a la función escalón de Heaviside, también conocida como función escalón unitario, dicha función es de la forma:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Ecuación 7: Función de Heaviside

(Mandal. & A, 1998) adaptan la función de Heaviside para modelar la demanda con una función tipo rampa de la siguiente manera:

$$D(t) = a[t - (t - \mu)H(t - \mu)] \quad \text{con } a > 0$$

Ecuación 8: Demanda como función de tipo rampa

Donde a es una constante demanda inicial, μ un parámetro de tiempo donde el patrón de la demanda se vuelve constante. $H(t - \mu)$ es una función de Heaviside tal que:



$$H(t - \mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \mu \\ 1 & \text{si } t \geq \mu \end{cases}$$

Ecuación 9: Función de Heaviside para demanda tipo rampa

Para caso $t < \mu$ se obtiene una demanda con tasa de crecimiento lineal en el tiempo como se muestra a continuación:

$$D(t) = a[t - (t - \mu)(0)]$$

$$D(t) = at$$

Ecuación 10: Componente lineal de la demanda tipo rampa

Cuando se cumple $t \geq \mu$ la demanda se vuelve constante como se muestra a continuación:

$$D(t) = a[t - (t - \mu)(1)]$$

$$D(t) = a[t - t + \mu]$$

$$D(t) = a\mu$$

Ecuación 11: Componente constante de demanda tipo rampa

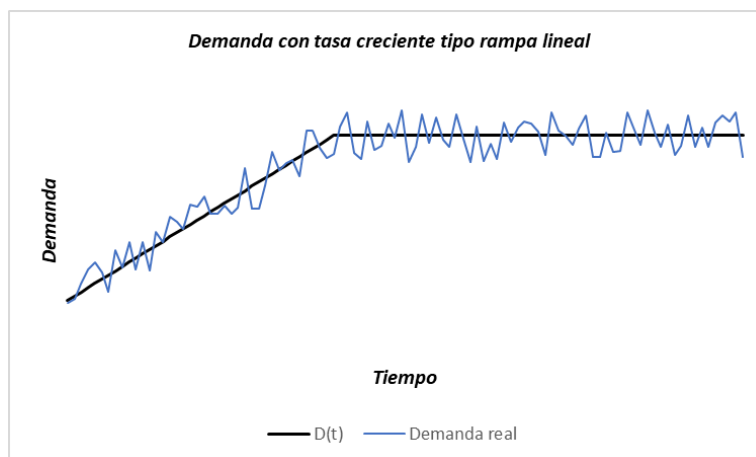


Ilustración 3: Demanda con tasa creciente tipo rampa

Fuente: Elaborado por autor



(Giri, Jalan, & Chaudhuri, 2003) definen una demanda con tasa creciente tipo rampa exponencial de la siguiente manera:

$$D(t) = ae^{b[t-(t-\mu)H(t-\mu)]} \quad \text{con } a, b > 0$$

Ecuación 12: Demanda como función tipo rampa exponencial

$H(t - \mu)$ se define de la manera anterior, para el caso $t < \mu$ se obtiene una demanda con tasa de crecimiento exponencial en el tiempo como se muestra a continuación:

$$D(t) = ae^{b[t-(t-\mu)(0)]}$$

$$D(t) = ae^{bt}$$

Ecuación 13: Componente exponencial de la demanda tipo rampa

Para la situación de $t \geq \mu$ la demanda se vuelve constante:

$$D(t) = ae^{b[t-(t-\mu)(1)]}$$

$$D(t) = ae^{b[t-t-\mu]}$$

$$D(t) = ae^{b\mu}$$

Ecuación 14: Componente constante de la demanda tipo rampa

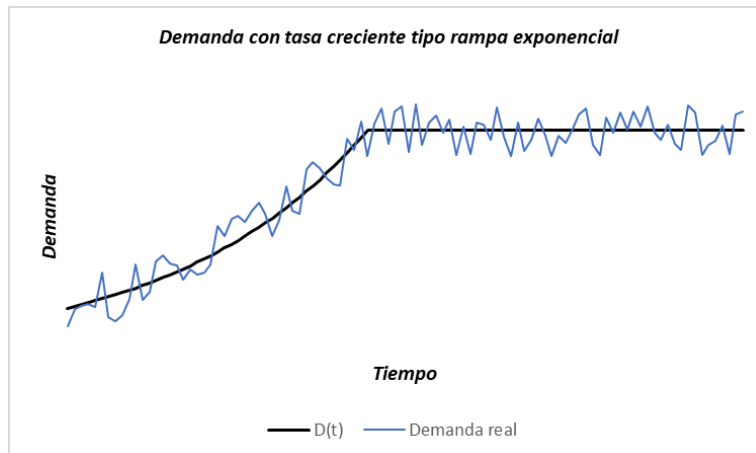


Ilustración 4: Demanda con tasa creciente tipo rampa exponencial

Fuente: Elaborado por autor



5.6.2. Efecto del deterioro en los inventarios

Es pertinente remarcar que el agotamiento de un inventario se debe principalmente a la demanda sin embargo otro factor que agota el inventario es el deterioro de los artículos. En los inventarios el deterioro surge cuando se mantiene exceso de artículos en los almacenes y terminan por caducar o pasar de moda, por otra parte, puede surgir por una inadecuada manipulación de los inventarios.

(Sanni & Chukwu, 2013) define el deterioro como la descomposición, el daño o el cambio que impide que los artículos se utilicen para su propósito original. Algunos ejemplos de artículos que se deterioran son los artículos de moda, alimentos, teléfonos móviles, productos químicos, productos farmacéuticos, productos automóbiles, etc.

(Chopra & Meindl, 2013) mencionan que cualquier activo que pierde valor con el tiempo es perecedero y menciona algunos ejemplos como las frutas, verduras y productos farmacéuticos. Esta lista también incluye productos como computadoras y teléfonos celulares que pierden valor cuando salen al mercado productos nuevos. La ropa de moda es perecedera porque no puede venderse a su precio normal una vez que pasa la temporada. Los activos perecederos también incluyen todas las formas de capacidad de producción, transporte y almacenamiento que se desperdicia si no se utiliza por completo, la capacidad no utilizada del pasado no tiene valor.

El modelo de (Harris, 1913) permite obtener una buena aproximación de la política óptima de inventarios, sin embargo, en escenarios donde los productos se deterioran (productos perecederos), suponer que los productos tienen una vida útil ilimitada conduce a la adopción de políticas de inventarios no óptimas. El mantener disponibilidad adecuada de artículos en inventario mientras se minimizan las pérdidas por productos perecederos es un desafío importante en la gestión de los inventarios.

El deterioro de los artículos puede ser estudiado como una tasa constante o variable en el tiempo. (Jain & Kumar, 2007) y (Tripathya & Mishra, 2011) definen la tasa de



deterioro con una distribución continua de probabilidad de Weibull² de los parámetros de la siguiente manera:

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

Ecuación 15: Tasa de deterioro de Weibull de dos parámetros

Donde α es el parámetro de escala tal que $(0 < \alpha \ll 1)$ y b es el parámetro de forma tal que $\beta > 0$.

(Sanni & Chukwu, 2013) definen la tasa de deterioro como una función de Weibull de tres parámetros de la siguiente manera:

$$Z(t) = \alpha\beta(t - \gamma)^{\beta-1}$$

Ecuación 16: Tasa de deterioro de Weibull de tres parámetros

Además, explican cada parámetro de la siguiente manera: el parámetro de escala α representa la tasa característica de deterioro de los elementos, el parámetro de forma β , es una medida de la propagación del tiempo hasta el deterioro y γ es el tiempo mínimo del deterioro.

5.6.3. Efecto de la inflación en los inventarios

(Blank & Tarquin, 2006) indican que la variación de la cantidad del dinero en un periodo de tiempo dado recibe el nombre de *valor del dinero en el tiempo*; éste es el concepto más importante de la ingeniería económica.

Adicional, (Blank & Tarquin, 2006) definen que la inflación es un incremento en la cantidad de dinero necesaria para obtener la misma cantidad de producto o servicio antes del precio inflado y como complemento definen la tasa de inflación como una medida de la tasa de cambio en el valor de la moneda.

En el modelo de básico de cantidad económica de pedido se asume que los costos se comportan de manera constante y no se considera el efecto de la inflación en la política de inventario debido a suponer que no afecta de manera significativa. En

² Ver apéndice 1: Distribución continua de probabilidad de Weibull



entornos de inflación y pandemia la consideración del efecto de la inflación y el valor del dinero en el tiempo es de gran interés.

(Sundararajan, Palanivel, & Uthayakumar, 2019) definen la tasa de descuento neta de la inflación para la formulación de su modelo de cantidad económica de pedido de la siguiente manera:

$$R = r - f$$

Ecuación 17: Tasa de descuento neta de la inflación

Donde:

r = tasa de descuento para evaluar el valor del dinero en el tiempo

f = tasa de inflación

De esta manera y adicionalmente, utilizan el concepto de tasa de interés efectiva de capitalización continua para expresar matemáticamente el efecto de la inflación y el valor del dinero en el tiempo en los costos de inventario, este enfoque es el de interés en esta investigación.



VI. DISEÑO METODOLÓGICO

6.1. Tipo de Investigación

6.1.1. *Según el enfoque de la investigación*

La investigación tiene un enfoque cuantitativo debido que se establecen parámetros, se definen variables, se utilizan métodos analíticos y ecuaciones para expresar relaciones entre variables logrando representar el sistema modelado y obteniendo conclusiones acertadas para la toma de decisiones en un sistema de inventario.

6.1.2. *Según el alcance de los resultados*

Esta investigación tiene un alcance exploratorio, la revisión de la literatura reveló que ya se han realizado investigaciones profesionales, pero esta investigación plantea una nueva perspectiva.

6.1.3. *Según el tiempo de ocurrencia*

Toma un alcance prospectivo por que los resultados que se expondrán se registran según se desarrolla cada etapa de la investigación.

6.1.4. *Según el período en que se realiza el estudio*

Esta investigación toma un alcance transversal ya que se realiza durante el periodo de primer semestre del año 2022.

6.2. Área de estudio

Esta investigación corresponde al área de administración de inventarios, específicamente al modelado matemático de inventarios.

6.2.1. *Campos de estudio relacionados*

- Análisis de la producción y las operaciones
- Investigación operativa
- Administración y optimización de la cadena de suministro
- Modelado matemático



6.3. Objeto de Investigación

Esta investigación tiene como objeto extender el modelo de cantidad económica de pedido propuesto en (Harris, 1913) y popularizado en (Wilson, 1934) a un modelo de cantidad económica de pedido que considera una demanda tipo rampa, desarrollado en escenarios de escasez e inflación para artículos en deterioro a través de una tasa de distribución de Weibull.

6.4. Fuentes de información

Una fuente de información es todo aquello que nos proporciona datos para reconstruir hechos y las bases del conocimiento. Existen diferentes fuentes de información dependiendo del nivel de búsqueda que hagamos. Para esta investigación se tendrán en cuenta fuentes primarias y secundarias las cuales servirán de fundamento para esta investigación, estas se eligen de manera muy selectiva debido a la cantidad de aportes relacionados a esta investigación.

6.4.1. Fuentes primarias

Estas proporcionan información de primera mano. Como fuentes primarias se consultarán artículos de revistas profesionales que sean relacionadas con el tema de esta investigación. Se pretenderá que la mayoría de artículos de revistas que se consulten sean de editoriales como Springer Link, Taylor&Francis y Elsevier y otras, esto debido a la calidad del contenido de las publicaciones.

6.4.2. Fuentes secundarias

Representan información ya procesada, para esta investigación se tendrán como fuentes secundarias libros especializados de administración de operaciones, cadena de suministro, métodos cuantitativos, investigación de operaciones, planificación y control de la producción y matemáticas aplicadas.



6.5. Metodología propuesta de investigación

Para lograr alcanzar los objetivos de esta investigación se utilizó la siguiente metodología propuesta:

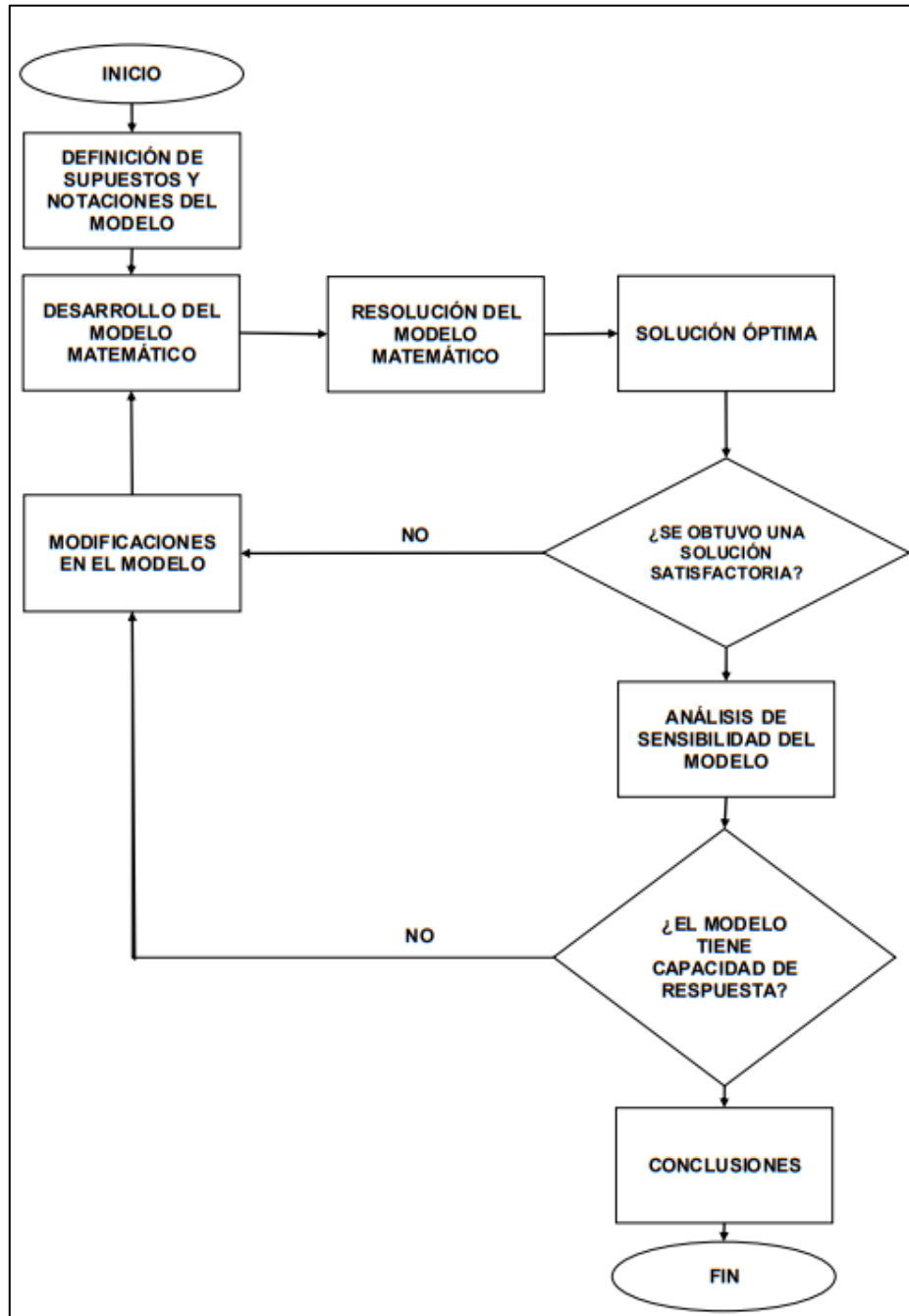


Ilustración 5: Metodología de investigación

Fuente: Elaborado por autor



VII. DESARROLLO

7.1. Definición de supuestos y notaciones del modelo

7.1.1. Notaciones

Para el desarrollo, comprensión y análisis del modelo matemático de cantidad económica de pedido de esta investigación se establecen las siguientes notaciones:

Notación	Descripción	Unidad
T	Duración del tiempo de cada ciclo de pedido	[t]
t_1	Tiempo en que empieza la escasez de inventario	[t]
$D(t)$	Demanda con tasa tipo rampa en función del tiempo	$\left[\frac{unid}{t}\right]$
μ	Parámetro de tiempo el cual indica que la demanda empieza a ser constante	[t]
$I(t)$	Nivel de inventario disponible en el tiempo t donde $0 \leq t \leq T$	[$unid$]
S	Inventario máximo para cada ciclo de pedido	[$unid$]
$Z(t)$	Tasa de deterioro que afecta al inventario $Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$	[t]
R	Tasa de descuento neta de la inflación $R = r - f$	Porcentual
r	Tasa de descuento para evaluar el valor del dinero en el tiempo	Porcentual
f	Tasa de inflación	Porcentual
C_h	Costo de mantener en inventario una unidad	$\left[\frac{\$}{unid}\right]$
C_s	Costo de escasez unitario	$\left[\frac{\$}{unid}\right]$
C_o	Costo de pedido	$\left[\frac{\$}{pedido}\right]$
C_d	Costo por deterioro unitario	$\left[\frac{\$}{unid}\right]$
$TC(t_1)$	Costo total por unidad de tiempo	\$/año



7.1.2. Supuestos

Para el desarrollo del modelo matemático de cantidad económica de pedido de esta investigación se hacen los siguientes supuestos:

Supuestos sobre el modelo de inventario:

1. La tasa de reabastecimiento es infinita, por ende, el tiempo de entrega es igual a cero.
2. El Parámetro de tiempo el cual indica que la demanda empieza a ser constante es menor al tiempo en que empieza la escasez de inventario esto implica que:

$$0 < \mu < t_1 < T.$$

3. El modelo de inventario que se desarrolla trata con un solo artículo; no hay interdependencia entre artículos.
4. No se admiten descuentos por cantidad.

Supuestos sobre el deterioro de artículos (percederos):

1. Se considera el deterioro que afecta a los artículos en inventario con una tasa de Weibull $Z(t)$ modelando una variable desequilibrada tal que:

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} \text{ para } 0 < \alpha \ll 1 \quad (7.1)$$

2. No hay reparación ni reposición para los artículos que se deterioran.

Supuestos sobre la escasez de inventario:

1. Se permite la escasez de inventario y se considera que se atrasa completamente.

Supuestos sobre la demanda:

1. La tasa de demanda presenta una tasa de crecimiento lineal que al cierto parámetro de tiempo μ se vuelve constante (patrón de tipo rampa) definida de la siguiente manera:

$$D(t) = D_0[t - (t - \mu)H(t - \mu)] \text{ para } D_0 > 0, \quad t > 0 \quad (7.2)$$



Donde t es el tiempo, D_0 es la intersección de la recta o demanda inicial, μ es un parámetro de tiempo constante y $H(t - \mu)$ es una función de Heaviside tal que:

$$H(t - \mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \mu \\ 1 & \text{si } t \geq \mu \end{cases} \quad (7.3)$$

Supuestos sobre la inflación:

1. Se considera la inflación y su efecto en el valor del dinero en el tiempo con:

$$R = r - f \quad (7.4)$$

Donde:

$r =$ tasa de descuento para evaluar el valor del dinero en el tiempo

$f =$ tasa de inflación

7.2. Desarrollo del modelo matemático

El escenario consiste en un modelo matemático de cantidad económica de pedido que inicia sin faltantes donde el inventario disminuye gradualmente en el tiempo debido a la combinación de la tasa de demanda y los artículos que se deterioran, de esto se puede definir mediante la siguiente ecuación diferencial de inventarios:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D(t) - Z(t) I(t) \quad (7.5)$$

Inicialmente, cuando el tiempo es $t = 0$, se realiza el reabastecimiento y el inventario alcanza el nivel máximo S . Entre $[0, \mu]$ el inventario disminuye debido a los efectos simultáneos de una tasa de demanda lineal y la tasa de deterioro, entre $[\mu, t_1]$ la tasa de demanda deja su comportamiento lineal y empieza a ser constante en el tiempo hasta que el nivel de inventario se agota completamente en $t = t_1$. Entre $[t_1, T]$ se presenta



un escenario de escasez de artículos mediante el efecto de la tasa de demanda constante, no hay efecto por deterioro de artículos ya que estos no se almacenan. El sistema de inventario se muestra en la ilustración 6.

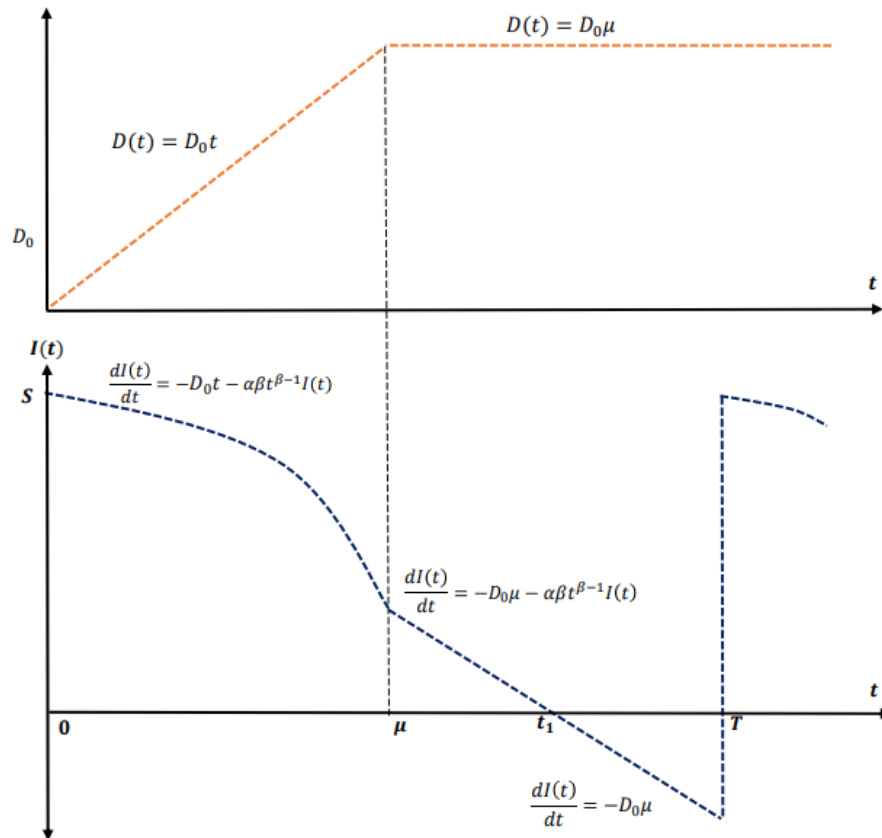


Ilustración 6: Sistema de inventario

Teniendo en cuenta la ecuación (7.1), ecuación (7.2), ecuación (7.3) y ecuación (7.5), el sistema de inventario anterior se puede representar mediante el uso de ecuaciones diferenciales como se muestra a continuación:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D_0t - Z(t)I(t) \quad 0 \leq t \leq \mu \quad (7.6)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D_0\mu - Z(t)I(t) \quad \mu \leq t \leq t_1 \quad (7.7)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -D_0\mu \quad t_1 \leq t \leq T \quad (7.8)$$



Teniendo en cuenta las condiciones de frontera $I(0) = S$ y $I(t_1) = 0$ se soluciona cada una de las ecuaciones diferenciales.

7.2.1. Solución para ecuación diferencial en $0 \leq t \leq \mu$

Para dar solución a la ecuación diferencial de inventarios para $0 \leq t \leq \mu$, se reescribe de la siguiente manera:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \alpha\beta t^{\beta-1}I(t) = -D_0t \quad (7.9)$$

La ecuación (7.9) es una ecuación diferencial de primer orden, el factor integrante se calcula de la siguiente manera:

$$P(t) = e^{\int \alpha\beta t^{\beta-1} dt} = e^{\alpha t^\beta} \quad (7.10)$$

Se procede a dar solución a la ecuación diferencial:

$$e^{\alpha t^\beta} I(t) = - \int D_0 t e^{\alpha t^\beta} dt \quad (7.11)$$

La integral presente en la ecuación (7.11) no tiene solución analítica³, para obtener una solución se expresa el factor integrante mediante su serie de Taylor centrada sobre el punto cero (serie de Maclaurin), por otra parte, se descartan todas las expresiones que poseen el término α^n para $n > 1$ ya que $0 < \alpha \ll 1$.

$$e^{\alpha t^\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^\beta}{n!} = 1 + \frac{(\alpha t)^\beta}{1!} + \frac{(\alpha t)^{2\beta}}{2!} + \frac{(\alpha t)^{3\beta}}{3!} + \dots \quad (7.12)$$

Sustituyendo la ecuación (7.12) en la ecuación (7.11) se obtiene:

$$e^{\alpha t^\beta} I(t) = - \int D_0 t (1 + \alpha t^\beta) dt \quad (7.13)$$

³ Ver apéndice 2, Se puede obtener una solución analítica relacionada con la función gamma incompleta, esta solución no es adecuada para esta investigación.



Reacomodando términos y realizando la integración se obtiene:

$$e^{\alpha t^\beta} I(t) = -D_0 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\alpha t^{\beta+2}}{\beta+2} \right) + C$$

Dividiendo a ambos lados de la ecuación el factor integrante se obtiene el nivel de inventario disponible en el tiempo t :

$$I(t) = -D_0 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\alpha t^{\beta+2}}{\beta+2} \right) e^{-\alpha t^\beta} + C e^{-\alpha t^\beta}$$

Descartando todas las expresiones que poseen el término α^n para $n > 1$ se simplifica la expresión:

$$I(t) = -D_0 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\alpha t^{\beta+2}}{\beta+2} \right) (1 - \alpha t^\beta) + C e^{-\alpha t^\beta}$$

Simplificando términos:

$$I(t) = -D_0 \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\alpha t^{\beta+2}}{\beta+2} - \frac{\alpha t^{\beta+2}}{2} - \frac{\alpha^2 t^{2\beta+2}}{\beta+2} \right) + C e^{-\alpha t^\beta}$$

$$I(t) = -\frac{D_0 t^2}{2} \left(1 - \frac{\alpha \beta t^\beta}{\beta+2} \right) + C e^{-\alpha t^\beta} \quad (7.14)$$

Para poder encontrar el valor de la constante de integración se utiliza la condición de frontera $I(0) = S$ en la ecuación (7.14) como se muestra a continuación:

$$I(0) = S = -\frac{D_0(0)^2}{2} \left(1 - \frac{\alpha \beta (0)^\beta}{\beta+2} \right) + C e^{-\alpha(0)^\beta}$$



Y se obtiene el valor de la constante de integración:

$$S = C \quad (7.15)$$

Sustituyendo la ecuación (7.15) en la ecuación (7.14) finalmente se obtiene la solución de la ecuación diferencial para el intervalo $0 \leq t \leq \mu$

$$I(t) = -\frac{D_0 t^2}{2} \left(1 - \frac{\alpha \beta t^\beta}{\beta + 2} \right) + S(1 - \alpha t^\beta) \quad (7.16)$$

7.2.2. Solución para ecuación diferencial en $\mu \leq t \leq t_1$

Reescribiendo la ecuación (7.7) que gobierna el inventario durante $\mu \leq t \leq t_1$ se tiene:

$$\frac{dI(t)}{dt} + \alpha \beta t^{\beta-1} I(t) = -D_0 \mu$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden, el factor integrante de esta ecuación diferencial es la ecuación (7.10). Para facilitar el trabajo matemático la solución se expresa forma de integrales como se muestra a continuación:

$$I(t) = S(1 - \alpha t^\beta) - D_0 e^{-\alpha t^\beta} \left(\int_0^\mu x e^{\alpha x^\beta} dx + \mu \int_\mu^t e^{\alpha x^\beta} dx \right) \quad (7.17)$$

Resolviendo las integrales de la ecuación (7.17) se obtiene:

$$I(t) = S e^{-\alpha t^\beta} - D_0 e^{-\alpha t^\beta} \left[\int_0^\mu x(1 + \alpha x^\beta) dx + \mu \int_\mu^t e^{\alpha x^\beta} dx \right]$$

$$I(t) = S e^{-\alpha t^\beta} - D_0 e^{-\alpha t^\beta} \left[\frac{\mu^2}{2} + \frac{\alpha \mu^{\beta+2}}{\beta + 2} + \mu \left(t + \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta + 1} - \mu - \frac{\alpha \mu^{\beta+1}}{\beta + 1} \right) \right]$$

Simplificando términos y agrupando términos de manera conveniente:



$$I(t) = Se^{-\alpha t^\beta} - D_0 e^{-\alpha t^\beta} \left(-\frac{\mu^2}{2} + \frac{\alpha \mu^{\beta+2}}{(\beta+2)} + \mu t + \frac{\alpha \mu t^{\beta+1}}{(\beta+1)} - \frac{\alpha \mu^{\beta+2}}{\beta+1} \right)$$

$$I(t) = Se^{-\alpha t^\beta} - D_0 \mu t e^{-\alpha t^\beta} \left(1 + \frac{\alpha t^\beta}{(\beta+1)} \right) - D_0 e^{-\alpha t^\beta} \left(-\frac{\mu^2}{2} + \frac{\alpha \mu^{\beta+2}}{(\beta+2)} - \frac{\alpha \mu^{\beta+2}}{(\beta+1)} \right)$$

Utilizando la ecuación (7.12) se descartan todas las expresiones que poseen el término α^n para $n > 1$:

$$I(t) = Se^{-\alpha t^\beta} - D_0 \mu t (1 - \alpha t^\beta) \left(1 + \frac{\alpha t^\beta}{(\beta+1)} \right) - D_0 e^{-\alpha t^\beta} \left(-\frac{\mu^2}{2} + \frac{\alpha \beta \mu^{\beta+2} + \alpha \mu^{\beta+2} - \alpha \beta \mu^{\beta+2} - 2\alpha \mu^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)} \right)$$

$$I(t) = Se^{-\alpha t^\beta} - D_0 \mu t \left(1 + \frac{\alpha t^\beta}{(\beta+1)} - \alpha t^\beta \right) - D_0 (1 - \alpha t^\beta) \left(-\frac{\mu^2}{2} - \frac{\alpha \mu^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)} \right)$$

Simplificando las expresiones se obtiene:

$$I(t) = Se^{-\alpha t^\beta} - D_0 \mu t \left(1 + \frac{\alpha t^\beta - \alpha \beta t^\beta - \alpha t^\beta}{(\beta+1)} \right) - D_0 \left(-\frac{\mu^2}{2} - \frac{\alpha \mu^{\beta+2}}{(\beta+1)(\beta+2)} + \frac{\alpha \mu^2 t^\beta}{2} \right)$$

Finalmente se obtiene la solución de la ecuación (7.7) para $\mu \leq t \leq t_1$

$$I(t) = Se^{-\alpha t^\beta} - D_0 \mu t \left(1 - \frac{\alpha \beta t^\beta}{(\beta+1)} \right) + \frac{D_0 \mu^2}{2} \left(1 - \alpha t^\beta + \frac{2\alpha \mu^\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) \quad (7.18)$$

7.2.3. Solución para ecuación diferencial en $t_1 \leq t \leq T$

La ecuación diferencial del intervalo $t_1 \leq t \leq T$ tiene un tratamiento más simple. Se resuelve mediante la separación de variables e integrando ambos lados como se muestra a continuación:

$$\int \frac{dI(t)}{dt} = - \int D_0 \mu dt$$



$$I(t) = -D_0\mu t + C \quad (7.19)$$

Teniendo en cuenta la condición de frontera $I(t_1) = 0$ se encuentra el valor de la constante de integración:

$$0 = -D_0\mu t_1 + C$$

$$C = D_0\mu t_1 \quad (7.20)$$

Sustituyendo la ecuación (7.20) en la ecuación (7.19) y simplificando se obtiene la solución a la ecuación diferencial para el intervalo $t_1 \leq t \leq T$:

$$I(t) = -D_0\mu t + D_0\mu t_1$$

$$I(t) = -D_0\mu(t - t_1) \quad (7.21)$$

7.2.4. Inventario máximo para cada ciclo de pedido

El inventario máximo para cada ciclo de pedido se puede obtener utilizando la condición de frontera $I(t_1) = 0$ en la ecuación de nivel de inventario disponible en el tiempo para $\mu \leq t \leq t_1$, para facilitar la obtención de la ecuación, el nivel máximo de inventario se expresa de la siguiente manera:

$$S = D_0 \left(\int_0^\mu t e^{\alpha t^\beta} dt - \mu \int_\mu^{t_1} e^{\alpha t^\beta} dt \right) \quad (7.22)$$

Resolviendo las integrales se obtiene:

$$S = D_0 \left(\left[\frac{t^2}{2} + \frac{\alpha t^{\beta+2}}{\beta+2} \right]_0^\mu + \mu \left[t + \frac{\alpha t^{\beta+1}}{\beta+1} \right]_\mu^{t_1} \right)$$

Evaluando los límites de integración se obtiene:



$$S = D_0 \left(\frac{\mu^2}{2} + \frac{\alpha\mu^{\beta+2}}{\beta+2} + \mu \left(t_1 + \frac{\alpha t_1^{\beta+1}}{\beta+1} - \mu - \frac{\alpha\mu^{\beta+1}}{\beta+1} \right) \right)$$

$$S = D_0 \left(\frac{\mu^2}{2} + \frac{\alpha\mu^{\beta+2}}{\beta+2} + \mu t_1 + \frac{\alpha\mu t_1^{\beta+1}}{\beta+1} - \mu^2 - \frac{\alpha\mu^{\beta+2}}{\beta+1} \right)$$

Agrupando términos de manera conveniente:

$$S = D_0 \mu t_1 \left(1 + \frac{\alpha t_1^\beta}{\beta+1} \right) + \frac{D_0 \mu^2}{2} \left(\frac{2\alpha\mu^\beta}{\beta+2} - 1 - \frac{2\alpha\mu^\beta}{\beta+1} \right)$$

Simplificando expresiones:

$$S = D_0 \mu t_1 \left(1 + \frac{t_1^\beta}{\beta+1} \right) + \frac{D_0 \mu^2}{2} \left(-1 + \frac{2\alpha\beta\mu^\beta + 2\alpha\mu^\beta - 2\alpha\beta\mu^\beta - 4\alpha\mu^\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right)$$

$$S = D_0 \mu t_1 \left(1 + \frac{\alpha t_1^\beta}{\beta+1} \right) + \frac{D_0 \mu^2}{2} \left(-1 + \frac{-2\alpha\mu^\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right)$$

Finalmente se obtiene el inventario máximo para cada ciclo de pedido:

$$S = D_0 \mu t_1 \left(1 + \frac{\alpha t_1^\beta}{\beta+1} \right) - \frac{D_0 \mu^2}{2} \left(1 + \frac{2\alpha\mu^\beta}{(\beta+1)(\beta+2)} \right) \quad (7.23)$$

7.2.5. Cantidad total de artículos que se deterioran

La cantidad total de artículos que se deterioran durante el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t_1$ es igual a:

$Q_d =$ Nivel máximo de inventario – Demanda total durante $[0, t_1]$

$$Q_d = S - \int_0^{t_1} D(t) dt \quad (7.24)$$



En esta investigación se tiene en cuenta el efecto de la inflación en el valor del dinero en el tiempo, R representa la tasa de descuento neta de la inflación $R = r - f$, donde r es la tasa de descuento para evaluar el valor del dinero en el tiempo, f la tasa de inflación, entonces se multiplica la expresión e^{-Rt} a la demanda total durante $[0, t_1]$, se recomienda ver el apéndice 3 donde se muestra la obtención de e^{-Rt} , además consultar a (Arya & Lardner, 2009) pág. 674.

Entonces la cantidad total de artículos que se deterioran es:

$$Q_d = S - \int_0^{t_1} D(t)e^{-Rt} dt$$
$$Q_d = S - \int_0^{\mu} D_0 t e^{-Rt} dt - \int_{\mu}^{t_1} D_0 \mu e^{-Rt} dt \quad (7.25)$$

Resolviendo la ecuación (7.25), evaluando los límites de integración y simplificando términos se obtiene la cantidad de artículos que se deterioran durante $[0, t_1]$:

$$Q_d = S - \left(\frac{D_0}{R^2} + \frac{(-D_0 R \mu - D_0) e^{-R\mu}}{R^2} \right) - \left(\frac{D_0 \mu e^{-R\mu}}{R} - \frac{D_0 \mu e^{-Rt_1}}{R} \right) \quad (7.26)$$

7.2.6. Cantidad total de artículos que se acumulan

La cantidad total de artículos que se acumulan (se mantienen en inventario) durante $[0, t_1]$ bajo efecto de inflación está dado por la siguiente integral:

$$Q_h = \int_0^{t_1} I(t) e^{-Rt} dt$$
$$Q_h = \int_0^{\mu} I(t) e^{-Rt} dt + \int_{\mu}^{t_1} I(t) e^{-Rt} dt$$

Sustituyendo la ecuación (7.6) y ecuación (7.7) en cada integral se tiene:



$$Q_h = \int_0^\mu \left(-\frac{D_0 t^2}{2} \left(1 - \frac{\alpha \beta t^\beta}{\beta + 2} \right) + S(1 - \alpha t^\beta) \right) e^{-Rt} dt \quad (7.27)$$
$$+ \int_\mu^{t_1} \left(S e^{-\alpha t^\beta} - D_0 \mu t \left(1 - \frac{\alpha \beta t^\beta}{(\beta + 1)} \right) + \frac{D_0 \mu^2}{2} \left(1 - \alpha t^\beta + \frac{2\alpha \mu^\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)} \right) \right) e^{-Rt} dt$$

Obtener la solución de la ecuación (7.27) requiere un arduo trabajo matemático, además dificulta el procedimiento computacional. (Covert & Philip, 1972), (Chakrabarty, Giri, & Chaudhuri, 1998), (S.K.Ghosh & K.S.Chaudhuri, 2004) y (Sanni & Chukwu, 2013) enfrentaron una situaciones equivalentes para calcular la cantidad total de artículos que se acumulan y utilizaron un tratamiento similar para encontrar el área bajo la curva de agotamiento de inventario utilizando una aproximación mediante el análisis geométrico, dicha aproximación se adopta en esta investigación.

Entonces, la cantidad total de artículos que se durante $[0, t_1]$ es aproximadamente:

$$Q_h = \int_0^{t_1} I(t) e^{-Rt} dt \approx \frac{1}{2} S t_1 \quad (7.28)$$

Sustituyendo la ecuación (7.23) en la ecuación (7.28) se obtiene:

$$Q_h = \int_0^{t_1} I(t) e^{-Rt} dt \approx \frac{t_1}{2} \left(D_0 \mu t_1 \left(1 + \frac{\alpha t_1^\beta}{\beta + 1} \right) - \frac{D_0 \mu^2}{2} \left(1 + \frac{2\alpha \mu^\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)} \right) \right) \quad (7.29)$$

7.2.7. Cantidad total de faltantes acumuladas

Esta investigación se tiene en cuenta el escenario de faltantes, esto ocurre cuando no se puede abastecer completamente a la demanda en un periodo específico de tiempo. Durante el periodo de tiempo $t_1 \leq t \leq T$ se acumula la siguiente cantidad de faltantes de artículos:

$$Q_s = - \int_{t_1}^T I(t) e^{-Rt} dt \quad (7.30)$$



Sustituyendo la ecuación (7.21) y realizando la integración se obtiene:

$$Q_s = D_0\mu \int_{t_1}^T (te^{-Rt} - t_1e^{-Rt}) dt$$
$$Q_s = D_0\mu \left[-\frac{(Rt+1)e^{-Rt}}{R^2} - \left(-\frac{t_1e^{-Rt}}{R}\right) \right]_{t_1}^T$$
$$Q_s = D_0\mu \left[-\frac{(Rt+1)e^{-Rt}}{R^2} + \frac{t_1e^{-Rt}}{R} \right]_{t_1}^T$$

Evaluando los límites de integración se obtiene la cantidad total de faltantes que se acumulan:

$$Q_s = D_0\mu \left[\left(-\frac{(RT+1)e^{-RT}}{R^2} + \frac{t_1e^{-RT}}{R} \right) - \left(-\frac{(Rt_1+1)e^{-Rt_1}}{R^2} + \frac{t_1e^{-Rt_1}}{R} \right) \right]$$
$$Q_s = \frac{D_0\mu e^{-Rt_1}}{R^2} + \frac{(-D_0RT\mu + D_0R\mu t_1 - D_0\mu)e^{-RT}}{R^2} \quad (7.31)$$

7.3. Optimización del modelo

7.3.1. Ecuación de costo total relevante en el sistema de inventario

Para definir la ecuación de costo total del sistema de inventario se suma el costo por pedido y la combinación lineal de los costos por deterioro, mantener en inventario y faltantes con sus cantidades correspondientes como se muestra a continuación:

$$\varphi = C_0 + C_d Q_d + C_h Q_h + C_s Q_s \quad (7.32)$$



7.3.2. Costo total por unidad de tiempo

El costo total de inventario por unidad de tiempo es la suma de todos los costos que se consideran en el análisis de inventario, divididos por la duración de tiempo del ciclo de pedido:

$$TC(t_1) = \frac{\varphi}{T} = \frac{1}{T} (C_0 + C_d Q_d + C_h Q_h + C_s Q_s) \quad (7.33)$$

Sustituyendo la ecuación (7.26), la ecuación (7.29) y la ecuación (7.31), en la ecuación (7.33) se obtiene:

$$\begin{aligned} TC(t_1) = \frac{1}{T} & \left(C_0 + C_d \left(D_0 \mu t_1 \left(1 + \frac{\alpha t_1^\beta}{\beta + 1} \right) - \frac{D_0 \mu^2}{2} \left(1 + \frac{2\alpha \mu^\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)} \right) - \left(\frac{D_0}{R^2} + \frac{(-D_0 R \mu - D_0) e^{-R\mu}}{R^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{D_0 \mu e^{-R\mu}}{R} - \frac{D_0 \mu e^{-Rt_1}}{R} \right) \right) + C_h \left(\frac{t_1}{2} \left(D_0 \mu t_1 \left(1 + \frac{\alpha t_1^\beta}{\beta + 1} \right) - \frac{D_0 \mu^2}{2} \left(1 + \frac{2\alpha \mu^\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)} \right) \right) \right) \right) \\ & + C_s \left(\frac{D_0 \mu e^{-Rt_1}}{R^2} + \frac{(-D_0 R T \mu + D_0 R \mu t_1 - D_0 \mu) e^{-RT}}{R^2} \right) \end{aligned} \quad (7.34)$$

7.3.3. Minimización del modelo de inventario

Teniendo en cuenta que t_1 es el tiempo en que empieza la escasez de artículos y por ende el tiempo de adquisición de inventario, se determina el valor óptimo de t_1 (el cual se denota como t_1^*) tratando a t_1 como variable de decisión, diferenciando la ecuación (7.34) con respecto a t_1 igualando la expresión a cero.

Diferenciando la función de costo total de inventario con respecto a t_1 he igualando a cero se obtiene⁴:

⁴ De este resultado se establece el siguiente corolario: Una variación en el costo de pedido C_0 no generará cambios en la cantidad óptima de pedido



$$\begin{aligned} \frac{dTC(t_1)}{dt_1} = & \frac{1}{T} \left(C_d \left(\frac{D_0 \alpha \beta \mu t_1^\beta}{\beta + 1} + D_0 \mu \left(\frac{\alpha t_1^\beta}{\beta + 1} + 1 \right) - D_0 \mu e^{-Rt_1} \right) \right. \\ & + \frac{C_h}{2} \left(t_1 \left(D_0 \mu \left(\frac{\alpha t_1^\beta}{\beta + 1} + 1 \right) + \frac{D_0 \mu \alpha \beta t_1^\beta}{\beta + 1} \right) + D_0 \mu t_1 \left(\frac{\alpha t_1^\beta}{\beta + 1} + 1 \right) \right. \\ & \left. \left. - \frac{D_0 \mu^2}{2} \left(1 + \frac{2\alpha \beta \mu^\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)} \right) \right) + C_s \left(-\frac{D_0 \mu e^{-Rt_1}}{R} + \frac{D_0 \mu e^{-RT}}{R} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

La ecuación (7.35) es altamente no lineal en t_1 y no se puede obtener la raíz de la ecuación mediante un método exacto.

Teniendo en cuenta los valores de los parámetros del modelo se puede determinar t_1^* mediante un método numérico iterativo. En esta investigación se utiliza el método de Newton-Raphson, (Chapra & Canale, 2011) y (Sundnes, 2020) recomiendan este método debido a su rápida convergencia; se utiliza el lenguaje de programación *Python* y sus librerías *Numpy*, *matplotlib* y modulo *tabulate* para aplicar el método iterativo (Ver apéndice 4).

Derivando por segunda vez con respecto a t_1 se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2TC(t_1)}{dt_1^2} = & \frac{D_0 \mu}{T} \left(C_d \left(R e^{-Rt_1} + \frac{\alpha \beta^2 t_1^\beta}{t_1(\beta + 1)} + \frac{\alpha \beta t_1^\beta}{t_1(\beta + 1)} \right) + \frac{C_h \alpha \beta t_1^\beta}{2} + C_h \left(\frac{\alpha \beta t_1^\beta}{(\beta + 1)} + \frac{\alpha t_1^\beta}{(\beta + 1)} + 1 \right) \right. \\ & \left. + C_s (e^{-Rt_1}) \right) \end{aligned} \quad (7.36)$$

La obtención de la segunda derivada se utiliza para aplicar el método de Newton-Raphson y satisfacer la condición:

$$\left[\frac{d^2T(t_1)}{dt_1^2} \right]_{t=t_1^*} > 0 \quad (7.37)$$



7.4. Política óptima de inventario.

Determinando el tiempo óptimo de adquisición t_1^* se puede definir la política óptima de inventario que genera el modelo matemático de esta investigación. La cantidad optima de inventario máximo para el ciclo de pedido se define:

$$S^* = D_0\mu t_1^* \left(1 + \frac{\alpha t_1^{*\beta}}{\beta + 1}\right) - \frac{D_0\mu^2}{2} \left(1 + \frac{2\alpha\mu^\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)}\right) \quad (7.38)$$

La cantidad total de artículos pendientes al final de ciclo es $D_0\mu(T - t_1^*)$, por lo tanto, la cantidad optima de pedido Q^* es:

$$Q^* = S^* + D_0\mu(T - t_1^*) \quad (7.39)$$

El valor óptimo del costo total de inventario por unidad de tiempo $TC(t_1)$ es:

$$\begin{aligned} TC(t_1^*) = & \frac{1}{T} \left(C_0 + C_d \left(D_0\mu t_1^* \left(1 + \frac{\alpha t_1^{*\beta}}{\beta + 1}\right) - \frac{D_0\mu^2}{2} \left(1 + \frac{2\alpha\mu^\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\frac{D_0}{R^2} + \frac{(-D_0R\mu - D_0)e^{-R\mu}}{R^2} \right) - \left(\frac{D_0\mu e^{-R\mu}}{R} - \frac{D_0\mu e^{-Rt_1^*}}{R} \right) \right) \right. \\ & \left. + C_h \left(\frac{t_1^*}{2} \left(D_0\mu t_1^* \left(1 + \frac{\alpha t_1^{*\beta}}{\beta + 1}\right) - \frac{D_0\mu^2}{2} \left(1 + \frac{2\alpha\mu^\beta}{(\beta + 1)(\beta + 2)}\right) \right) \right) \right. \\ & \left. + C_s \left(\frac{D_0\mu e^{-Rt_1^*}}{R^2} + \frac{(-D_0RT\mu + D_0R\mu t_1^* - D_0\mu)e^{-RT}}{R^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.40)$$



7.5. Ejemplo numérico y análisis de sensibilidad

7.5.1. Ejemplo numérico

Se presenta un ejemplo numérico con el objetivo de ilustrar un sistema de inventario con la política óptima generada por el modelo matemático de esta investigación.

Se tiene un costo de pedido de \$100/pedido, un costo de mantener en inventario de \$2.5/unidad, los artículos son perecederos, se deterioran bajo una tasa de probabilidad de Weibull de dos parámetros con $\alpha = 0.002$ y $\beta = 2.5$ y se tiene un costo artículos deteriorados de \$8/unidad. Se permite la escasez de inventario (faltantes), el costo por faltantes es \$7/unidad. Se tiene una tasa de descuento neta de la inflación $R= 7\%$.

Se tiene una demanda tipo rampa lineal modelada mediante la siguiente función:

$$D(t) = \begin{cases} 10,000t & \text{si } t < \mu \\ 10,000\mu & \text{si } t \geq \mu \end{cases}$$

Donde el parámetro μ es el tiempo en que la demanda empieza a comportarse de manera constante, para el cual se estima un valor de 0.25. Se considera una duración del tiempo de ciclo de pedido $T = 1$ (1 año).

7.5.2. Solución del ejemplo numérico

Para desarrollar una política óptima de inventario primeramente se determina el tiempo óptimo de adquisición t_1^* . Introduciendo la información proporcionada del ejemplo en el código (apéndice 4), definiendo un error máximo permitido de 10^{-4} y cero como valor inicial para la raíz se obtiene la aproximación del tiempo óptimo de adquisición t_1^* y el resumen del método de aproximación (tabla de iteraciones y análisis gráfico). Además, el código evalúa t_1^* en la ecuación (7.38), ecuación (7.39) y ecuación (7.40) para calcular la política óptima.

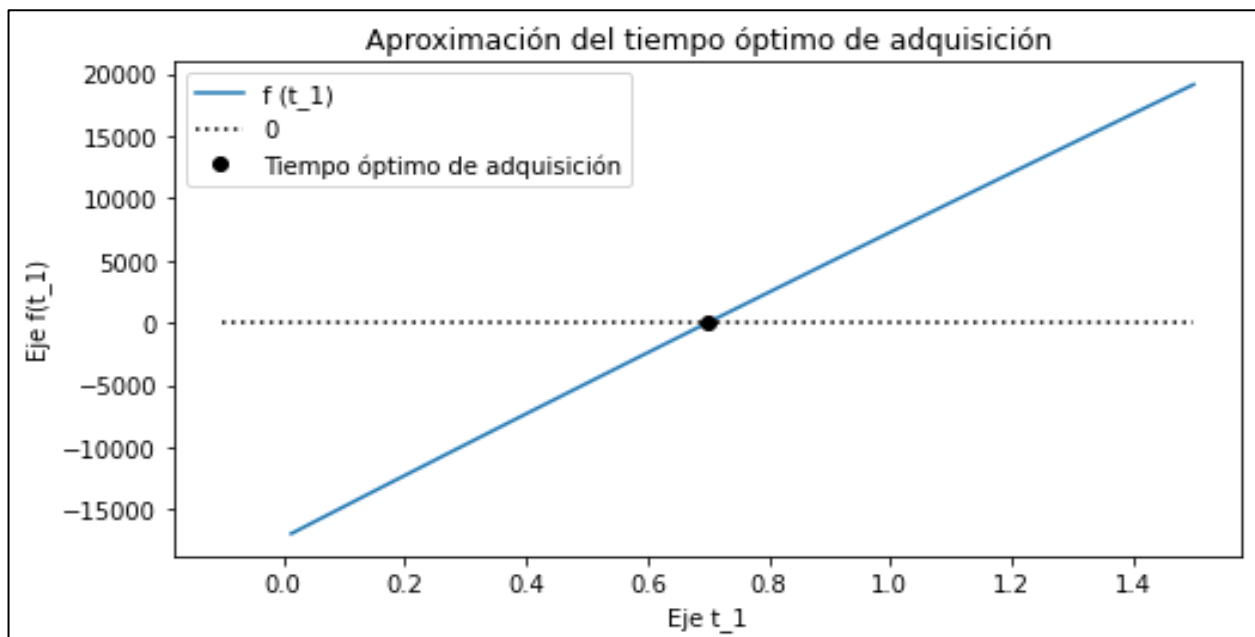


La salida del programa del apéndice 4 se muestra a continuación:

APROXIMACIÓN MEDIANTE MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Tabla de iteraciones del Método de Newton-Raphson

Iteración	t_1	$f'(t_1)$	$f(t_1)$	Error Absoluto	Error Relativo (%)
0	0	25150	-17292.2	--	--
1	0.687564	24312.1	-289.917	0.6875639285300501	100.0
2	0.699489	24299.3	0.134537	0.011924806593538229	1.7047889400865486
3	0.699483	24299.3	-9.73538e-05	5.536641524139796e-06	0.0007915331685099459



POLÍTICA ÓPTIMA DE INVENTARIO

Tiempo óptimo de reabastecimiento t_1^* :

8.39 meses

Nivel óptimo de inventario máximo S^* :

1437 Unidades

Cantidad óptima de pedido Q^* :

2188 Unidades

Costo total de inventario $T(t_1^*)$:

\$ 2423.37 /año

Ilustración 7: Política óptima generada



En la tabla de iteraciones se muestra cómo se satisface la condición de la ecuación (7.37). Graficando⁵ la función de costo total de inventario (La ecuación (7.34) evaluada con los datos del ejemplo numérico) con respecto a t_1 y T se observa la variación del costo total de inventario con respecto a estas variables:

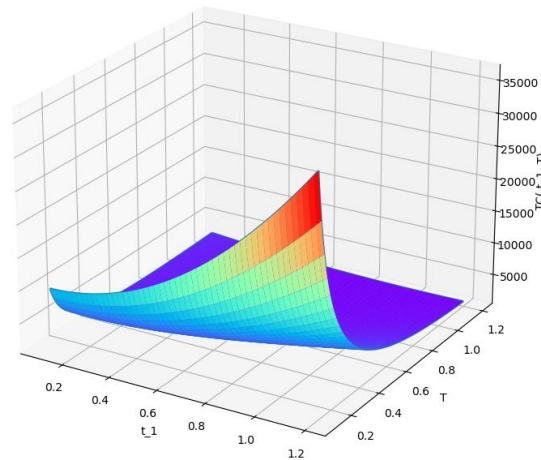


Ilustración 8: Variación del costo total del sistema respecto a t_1 y T

Del gráfico queda claro que la función de costo total de inventario es convexa con respecto a las dos variables.

7.5.3. Análisis de sensibilidad

Con el objetivo de probar la capacidad de respuesta del modelo y analizar el efecto de los parámetros que afectan al modelo desarrollado en esta investigación se realiza un análisis de sensibilidad. (Nahmias, 2007) pág. 199 desarrolló un análisis de sensibilidad para el modelo básico de cantidad económica de pedido determinando la penalización de costo para soluciones subóptimas.

(Chung & Ting, 1994) realizan un análisis de sensibilidad más generalizado y con más parámetros involucrados, también proporcionan la siguiente relación:

⁵ Ver apéndice 5: Gráfico de la función de costo total de inventario



$$\% Var = \left(\frac{x_i}{z_i} - 1 \right) * 100 \quad (7.41)$$

Donde x_i es el valor obtenido al variar cualquier parámetro del modelo mientras los demás parámetros permanecen fijos y z_i es el valor obtenido en la política óptima. Para esta investigación se determina el porcentaje que cambia la política óptima de inventario a medida que se disminuye un parámetro en -25% y -50% y aumenta en 25% y 50% mientras los demás parámetros del modelo se mantienen constantes.

A continuación, se muestra la tabla resumen del análisis de sensibilidad porcentual⁶:

Parametros	Cambio (%)	Cambio Porcentual en			
		t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
C_o	-50%	0.00%	0.00%	0.00%	-2.06%
	-25%	0.00%	0.00%	0.00%	-1.03%
\$ 100.00	25%	0.00%	0.00%	0.00%	1.03%
	50%	0.00%	0.00%	0.00%	2.06%
C_d	-50%	2.94%	3.59%	0.00%	-6.92%
	-25%	1.45%	1.77%	0.00%	-3.41%
\$ 8.00	25%	-1.41%	-1.72%	0.00%	3.31%
	50%	-2.78%	-3.38%	0.00%	6.52%
C_h	-50%	13.47%	16.42%	0.01%	-29.79%
	-25%	6.21%	7.57%	0.00%	-13.74%
\$ 2.50	25%	-5.54%	-6.75%	0.00%	12.26%
	50%	-10.36%	-12.62%	-0.01%	22.94%
C_s	-50%	-22.10%	-26.92%	-0.01%	-23.22%
	-25%	-8.48%	-10.33%	0.00%	-8.91%
\$ 7.00	25%	6.38%	7.77%	0.00%	6.70%
	50%	10.87%	13.24%	0.01%	11.42%

⁶ Ver apéndice 6 al 15, se muestra el análisis de sensibilidad no porcentual de cada parámetro junto con gráficos correspondientes.



Parametros	Cambio (%)	Cambio Porcentual en			
		t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
D_0	-50%	0.00%	-50.00%	-50.00%	-47.94%
	-25%	0.00%	-25.00%	-25.00%	-23.97%
10000	25%	0.00%	25.00%	25.00%	23.97%
	50%	0.00%	50.00%	50.00%	47.94%
μ	-50%	-1.15%	-45.26%	-46.43%	-44.90%
	-25%	-0.57%	-21.27%	-22.14%	-21.48%
0.25	25%	0.58%	19.22%	20.69%	20.14%
	50%	1.15%	35.79%	39.29%	38.23%
α	-50%	0.05%	0.05%	-0.01%	-0.07%
	-25%	0.03%	0.03%	0.00%	-0.03%
0.002	25%	-0.03%	-0.03%	0.00%	0.03%
	50%	-0.05%	-0.05%	0.01%	0.07%
β	-50%	-0.06%	-0.04%	0.03%	0.12%
	-25%	-0.03%	-0.02%	0.01%	0.05%
2.5	25%	0.02%	0.02%	-0.01%	-0.04%
	50%	0.04%	0.03%	-0.01%	-0.06%
R	-50%	3.69%	4.50%	0.00%	-5.95%
	-25%	1.77%	2.16%	0.00%	-2.80%
0.07	25%	-1.83%	-2.23%	0.00%	2.78%
	50%	-3.53%	-4.30%	0.00%	5.23%
T	-50%	-48.43%	-58.98%	-57.15%	-50.00%
	-25%	-24.10%	-29.35%	-28.58%	-25.43%
1	25%	23.86%	29.08%	28.59%	25.63%
	50%	47.48%	57.88%	57.19%	51.23%

Ilustración 9: Análisis de sensibilidad



7.5.4. Conclusiones del análisis de sensibilidad

Del análisis de sensibilidad se obtienen las siguientes conclusiones:

- Las variaciones en el costo de ordenar afectan solamente al costo total por unidad de tiempo.
- Si el costo por deterioro aumenta, el tiempo de adquisición y el nivel máximo de inventario disminuyen, el costo total por unidad de tiempo aumenta y viceversa. La cantidad optima de pedido es insensible a las variaciones del costo por deterioro.
- Si el costo de mantener en inventario aumenta, el tiempo de adquisición y el nivel máximo de inventario disminuyen, el costo total por unidad de tiempo aumenta y viceversa. La cantidad optima de pedido es insensible a las variaciones del costo de mantener.
- Si el costo de escasez aumenta, el tiempo de adquisición y el nivel máximo de inventario y el costo total por unidad de tiempo aumentan. La cantidad optima de pedido es insensible a las variaciones del costo de mantener.
- Si D_0 aumenta, el nivel máximo de inventario, la cantidad optima de pedido y el costo total por unidad de tiempo aumentan y viceversa. El tiempo de adquisición es insensible a las variaciones de D_0 .
- Si μ aumenta, el tiempo de adquisición, el nivel máximo de inventario, cantidad optima de pedido y el costo total por unidad de tiempo aumentan y viceversa.
- Si α aumenta, el tiempo de adquisición y el nivel máximo de inventario disminuyen, la cantidad de pedido y el costo total por unidad de tiempo aumentan y viceversa.
- Si β aumenta, el tiempo de adquisición y el nivel máximo de inventario aumentan, la cantidad de pedido y el costo total por unidad de tiempo disminuyen y viceversa.
- Si R aumenta, el tiempo de adquisición y el nivel máximo de inventario disminuyen, el costo total por unidad de tiempo aumenta y viceversa. La cantidad de pedido es insensible a las variaciones de R .
- Si T aumenta, el tiempo de adquisición, el nivel máximo de inventario, la cantidad de pedido y el costo total por unidad de tiempo aumentan y viceversa.



III. CONCLUSIONES

Con respecto a los objetivos de esta investigación:

1. Se desarrolló un modelo matemático de cantidad económica de pedido para artículos en deterioro con tasa de distribución de Weibull, una demanda tipo rampa además permitiendo faltantes y teniendo en cuenta el efecto de la inflación.
2. Se definió una política óptima de inventario compuesta por el tiempo de adquisición, el nivel máximo de inventario, la cantidad de pedido y el costo total de inventario por unidad de tiempo más apegada a la realidad.
3. Se ilustró un sistema de inventario mediante un ejemplo numérico y se realizó un análisis de sensibilidad que mostró la capacidad de respuesta del modelo matemático, además que permitió medir el efecto de la variación de los parámetros del modelo en la política óptima.

Teniendo en cuenta la situación pandémica por Covid-19 presente mientras se desarrolla esta investigación se concluye que el modelo desarrollado puede ser adoptado por industrias que se encargan de los productos no instantáneos o perecederos como frutas, verduras, carnes, mariscos, lácteos, entre muchos otros, que se han visto afectadas por los confinamientos provocando que se acumulen los artículos en los almacenes. También es útil adoptar el modelo de inventario desarrollado para la industria de productos farmacéuticos, alcohol para desinfección, jabón, mascarillas, guantes, dispositivos tecnológicos, que durante la situación pandémica presentan demanda variable en el tiempo lo cual ha genera que algunas empresas sufran roturas de stock.



IX. RECOMENDACIONES

A continuación, se enlistan recomendaciones y sugerencias para futuras investigaciones que de tenerse en cuenta aportarían al campo de la administración de inventarios y optimización integral de los costes totales de la cadena de suministro.

- Se recomienda utilizar la política óptima de inventario generada por el modelo matemático de esta investigación en una empresa real que se adapte a las características del modelo.
- Se sugiere realizar una investigación alterna donde la minimización del modelo se realice de manera multivariable (tratando a t_1 y T como variable de decisión).
- Se sugiere desarrollar modelos donde la demanda sea en función de uno o varios parámetros de la mercadotecnia (precio de venta, frecuencia de publicidad, facilidad de pago, etc.).
- Desarrollar modelos compatibles con descuentos por cantidad sería de gran interés teniendo en cuenta que en ambientes competitivos es común variar el precio de los productos para estimular la demanda y disminuir el nivel de deterioro de los artículos en almacén.
- Desarrollar modelos de inventarios que consideren varios eslabones de la cadena de abastecimiento (sistema multinivel) pueden ser aportes muy valiosos teniendo en cuenta la variabilidad de la demanda, tiempos de suministro y costos, además de diferentes niveles de deterioro debido que en la cadena de suministro se puede tener materias primas o productos terminados.
- En algunos casos las empresas tienen dos o más almacenes en los que varían los costos, desarrollar modelos de inventarios con dos o más almacenes serían aportes interesantes para la optimización de la cadena de suministro.



APÉNDICES

Apéndice 1: Distribución continua de probabilidad de Weibull.

Recopilado y reajustado de (Walpole, Myers, Myers, & Ye, 2012)

Definición de Weibull: La variable aleatoria continua X tiene una distribución de Weibull, con parámetros α y β , si su función de densidad es dada por:

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} & \text{para } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$

Al igual que la distribución gamma y la exponencial, la distribución de Weibull se aplica a problemas de confiabilidad y de prueba de vida como los de tiempo de operación antes de la falla o la duración de la vida de un componente, que se miden desde algún tiempo específico hasta que falla. Representemos este tiempo de operación antes de la falla mediante la variable aleatoria continua T , con función de densidad de probabilidad $f(t)$, donde $f(t)$ es la distribución de Weibull. Ésta tiene la flexibilidad inherente de no requerir la propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial. La función de distribución acumulativa $F(x)$ para la distribución de Weibull se puede escribir en forma cerrada y realmente es muy útil para calcular probabilidades.

Definición de distribución acumulativa de Weibull:

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x^\beta} \quad \text{para } x \geq 0$$

Cuando se aplica la distribución de Weibull, con frecuencia es útil determinar la tasa de fallas (algunas veces denominada tasa de riesgo) para tener conocimiento del desgaste o deterioro del componente.

Definición de tasa de fallas de Weibull:

La tasa de fallas en el tiempo t para la distribución de Weibull es dada por:

$$Z(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}$$



Sustituyendo se obtiene:

$$Z(x) = \frac{\alpha\beta x^{b-1} e^{-\alpha x^\beta}}{1 - (1 - e^{-\alpha x^\beta})}$$

Simplificando la ecuación finalmente se obtiene la tasa de Weibull con dos parámetros:

$$Z(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} \text{ para } t > 0$$

Interpretación de la tasa de fallas

La cantidad $Z(t)$ es bien llamada tasa de fallas porque realmente cuantifica la tasa de cambio con el tiempo de la probabilidad condicional de que el componente dure una Δt adicional dado que ha durado el tiempo t . La tasa de disminución (o crecimiento) con el tiempo también es importante. Los siguientes puntos son fundamentales:

- a) Si $\beta = 1$, la tasa de fallas es igual a la constante α . Esto es el caso especial de la distribución exponencial en que predomina la falta de memoria.
- b) Si $\beta > 1$, $Z(t)$ es una función creciente del tiempo t que indica que el componente se desgasta con el tiempo.
- c) Si $\beta < 1$, $Z(t)$ es una función decreciente del tiempo t y, por lo tanto, el componente se fortalece o endurece con el paso del tiempo.

Finalmente, para la obtención de la tasa de Weibull de tres parámetros basta con desfasar el tiempo en γ como se muestra a continuación:

$$Z(t) = \alpha\beta(t - \gamma)^{\beta-1} \text{ para } t > 0$$



Apéndice 2: Solución de la integral del factor integrante

A continuación, se obtiene una solución analítica de la integral del factor integrante mediante el uso de la función gamma incompleta:

$$f(t) = \int e^{\alpha t^\beta} dt$$

Realizando a siguiente sustitución:

$$u = \alpha^{\frac{1}{\beta}} t$$

Derivando a ambos lados de la sustitución se obtiene:

$$du = \alpha^{\frac{1}{\beta}} dt$$

$$dt = \frac{du}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}}$$

Sustituyendo en la integral original se tiene:

$$f(u) = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} \int e^{u^\beta} du$$

Se conoce que $\int e^{u^\beta} du$ es la función gamma incompleta, entonces:

$$F(u) = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} * \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}, -u^\beta\right)}{\beta(-1)^{\frac{1}{\beta}}} + C$$

Regresando a la variable original se tiene la solución a la integral propuesta:

$$F(t) = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\beta}}} * \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}, -\alpha t^\beta\right)}{\beta(-1)^{1/\beta}} + C$$



Apéndice 3: Valor actual con una tasa nominal capitalizada continuamente.

Teniendo como punto de partida la fórmula de monto compuesto:

$$C_x = P(1 + i)^n$$

Donde C_x es el monto compuesto o valor futuro del monto P , i es la tasa de interés por periodo de capitalización y n es el número total de periodos de capitalización.

Teniendo en cuenta las relaciones $i = \frac{j}{m}$ y $n = mt$, se puede expresar la ecuación de la siguiente forma:

$$C_x = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mt}$$

Donde j es la tasa de interés compuesta anual, m es la frecuencia de capitalización y t es el tiempo o plazo (en años). Si se hace $v = \frac{m}{j}$, donde $m = vj$ y se sustituye en la ecuación, se obtiene:

$$C_x = P \left(1 + \frac{1}{v} \right)^{vjt}$$

La ecuación también se puede expresar como:

$$C_x = P \left[\left(1 + \frac{1}{v} \right)^v \right]^{jt}$$

La capitalización continua se da cuando la frecuencia de capitalización m aumenta de forma indefinida; es decir, m tiende a infinito. Si m tiende a infinito, entonces v también tiende a infinito y, en ese escenario, el monto vendría dado por:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} C_x = P \lim_{v \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{v} \right)^v \right]^{jt}$$

Se conoce que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$, donde e es la base de los logaritmos naturales, entonces se concluye que:

$$C_x = P e^{jt}$$



Finalmente, para la determinación del valor actual con una tasa nominal capitalizada continuamente se despeja la P de la ecuación y se obtiene:

$$P = C_x e^{-jt}$$

Para el caso aplicado a este estudio, j representa la tasa de descuento neta de la inflación $R = r - f$, donde r es la tasa de descuento para evaluar el valor del dinero en el tiempo, f la tasa de inflación, y C_x representa un monto (costo), entonces se obtiene:

$$P = C_x e^{-Rt}$$



Apéndice 4: Política óptima de inventario.

Las siguientes líneas de código de lenguaje Python aproximan el tiempo óptimo de adquisición de inventario mediante el método numérico abierto Newton-Raphson. Al ejecutar el código se muestra la tabla resumen de iteraciones y el análisis gráfico del método de aproximación. El valor obtenido de t_1^* se evalúa en la ecuación (7.38), ecuación (7.39) y ecuación (7.40) y se genera la política óptima de inventario compuesta por t_1^* , S^* , Q^* y $TC(t_1^*)$.

```
#Created on Wed Apr 20 14:48:13 2022.
#@author: Claudio Chavarria Altamirano.

#MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON PARA APROXIMAR EL TIEMPO ÓPTIMO DE
#ADQUISICIÓN.
#La función NewtonRaphsonMethod tiene como variables de entrada:
#1) t_1aprox que es el valor inicial para hacer la aproximación.
#2) EMaxP que es el error máximo permitido.
#3) Imax que es el número máximo de iteraciones.
def NewtonRaphsonMethod(t_1aprox, EMaxP, Imax ):
    t_1 = t_1aprox          #aproximaciones de la raiz de la función.
    Vectort_1 = []         #Vector de almacenamiento de aproximaciones.
    Eabs = 2*EMaxP        #Error absoluto.
    VectorEabs =[]        #Vector de almacenamiento de Error absoluto.
    i = 0                 #Contador de iteraciones.
    Ni = []               #Vector de almacenamiento de iteraciones.
    Vectorfx = []         #Vector almacenamiento para Función f(t_1).
    NewtonRaphson_table =[] #Tabla de datos del método de Newton-Raphson

#Append()es un método nos permite agregar nuevos elementos a una lista
#.Podemos agregar cualquier tipo de elemento a una lista, pero se debe
#tener en cuenta lo que pasa cuando agregamos una lista dentro de otra
#,esta lista se agrega como uno y solo un elemento.

#Asignación de los valores iniciales a NewtonRaphson_table y Vectort_1
NewtonRaphson_table.append([i, t_1, f1(t_1) ,f(t_1) , "--", "--"])
Vectort_1.append(t_1)
```



Propuesta de modelo matemático de cantidad económica de pedido para artículos en deterioro con tasa de distribución de Weibull, demanda tipo rampa, desarrollado en escenarios de escasez e inflación, con ejemplo numérico y sensibilidad.

```
#El bucle while evalúa una condición y luego ejecuta un bloque de
#código si la condición es verdadera. El bloque de código se ejecuta
#repetidamente hasta que la condición llega a ser falsa.
```

```
while Eabs > EMaxP and i <= Imax:
```

```
#Fórmula del método de Newton-Raphson.
```

```
t_1 = t_1 - f(t_1)/f1(t_1)
```

```
Vectort_1.append(t_1)
```

```
Vectorfx.append(f(t_1))
```

```
i += 1
```

```
Ni.append(i)
```

```
#Formulación del Error absoluto y Error relativo porcentual.
```

```
if t_1 !=0:
```

```
    #Error absoluto.
```

```
    Eabs = abs((Vectort_1[i] - Vectort_1[i-1]))
```

```
    #Error relativo porcentual.
```

```
    Er = abs((Vectort_1[i] - Vectort_1[i-1])/Vectort_1[i])*100
```

```
    VectorEabs.append(Eabs)
```

```
#Registro de iteraciones en la tabla.
```

```
NewtonRaphson_table.append([i, t_1, f1(t_1) ,f(t_1) ,Eabs, Er ])
```

```
#Presentación de tabla de iteraciones.
```

```
print()
```

```
print("APROXIMACIÓN MEDIANTE MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON")
```

```
print("Tabla de iteraciones del Método de Newton-Raphson")
```

```
print(tabulate(NewtonRaphson_table, headers = ["Iteración", "t_1",
    "f'(t_1)", "f(t_1)", "Error Absoluto", "Error Relativo (%)"] ))
```

```
print()
```

```
#Retorno de variables.
```

```
return(t_1, f(t_1))
```

```
#Numpy es una biblioteca para el lenguaje de programación Python
```

```
#que brinda soporte para crear vectores y matrices grandes
```

```
#multidimensionales, junto con una gran colección de funciones
```

```
#matemáticas de alto nivel para operar con ellas.
```

```
#matplotlib es una biblioteca para la generación de gráficos a
```

```
#partir de datos contenidos en listas o arrays en el lenguaje
```



```
#de programación Python y su extensión matemática NumPy.

#tabulate es un módulo para imprimir datos en formato de tabla
#en Python. Tiene métodos disponibles para imprimir datos en
#estructuras de tablas simples y elegantes.

#Importar las librerías Numpy, Matplotlib y Tabulate.
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from tabulate import tabulate

#Parámetros para graficar el método de Newton-Raphson.
d1 = -0.1    #Valor inicial del intervalo para graficar.
d2 = 1.5    #Valor inicial del intervalo para graficar.

#Definición de densidad de puntos para graficar función.
nplot = 100    #Cantidad de puntos.

#linspace devuelve números espaciados uniformemente en
#un intervalo específico. Generación de valores de t_1
#para construir la gráfica.
t_1 = np.linspace(d1, d2, nplot)

#Parámetros de del sistema de inventario
print("PARÁMETROS DEL SISTEMA DE INVENTARIO")
R = float(input(" Tasa de inflación: "))
D_0 = float(input(" Parámetro de la demanda: "))
μ = float(input(" Parámetro de tiempo donde la demanda se vuelve con
stante: "))
C_o = float(input(" Costo de ordenar: " ))
C_d = float(input(" Costo por unidad deteriorada: "))
C_s = float(input(" Costo unitario por faltantes: "))
C_h = float(input(" Costo de mantener en inventario una unidad: "))
α = float(input(" Parámetro de escala de la función de Weibull: "))
β = float(input(" Parámetro de forma de la función de Weibull: "))
T = float(input(" Duración del tiempo de cada ciclo de pedido: "))
print("-----")
print("-----")

#Condiciones para el método de Newton-Raphson.
print("CONDICIONES PARA EL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON")
EMaxP = float(input(" Error máximo permitido de la aproximación: "))
Imax = float(input(" Cantidad de iteraciones máximas permitidas: "))
t_1aprox = float(input(" Valor inicial de la aproximación: "))
```



```
print("-----")
print("-----")

#DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN f(t_1)
def f(t_1s):
    f_t_1 = (C_d*(D_0*t_1s**β*α*β*μ/(β+1)+D_0*μ*(t_1s**β*α/(β+1)+1)
            -D_0*μ*np.exp(-R*t_1s))
            + C_h*t_1s*(D_0*t_1s**β*α*β*μ/(β+1)+D_0*μ*(t_1s**β*α/(β+1)+1))/2
            + C_h*(D_0*t_1s*μ*(t_1s**β*α/(β+1)+1)-
            D_0*μ**2*(2*α*μ**β*(β+2)/(β+1)+1)/2)/2
            + C_s*(-D_0*μ*np.exp(-R*t_1s)/R+D_0*μ*np.exp(-R*T)/R))/T

    return (f_t_1)

#PRIMERA DERIVADA DE LA FUNCIÓN f(t_1)
def f1(t_1s):
    f1_t_1 = D_0*μ*(C_d*(R*np.exp(-R*t_1s)+t_1s**β*α*β**2/((β+1))
            +t_1s**β*α*β/((β + 1)))
            +C_h*t_1s**β*α*β/2+C_h*(t_1s**β*α*β/(β+1)+t_1s**β*α/(β+1)+1)
            +C_s*np.exp(-R*t_1s))/T

    return (f1_t_1)

ft_1 = f(t_1)

#PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS.
t_1r, frt_1 = NewtonRaphsonMethod(t_1aprox, EMaxP, Imax )
print("Análisis gráfico del método de Newton-Raphson")
plt.figure(figsize=(8, 4))
plt.plot(t_1, ft_1, label=("f (t_1)"))
plt.plot(t_1, np.zeros(len(t_1)), 'k:', label=("0"))
plt.plot(t_1r, frt_1, 'ko', label=("Tiempo óptimo de adquisición"))
plt.xlabel("Eje t_1")
plt.ylabel("Eje f(t_1)")
plt.title("Aproximación del tiempo óptimo de adquisición")
plt.legend()
plt.show()
print()
```



Propuesta de modelo matemático de cantidad económica de pedido para artículos en deterioro con tasa de distribución de Weibull, demanda tipo rampa, desarrollado en escenarios de escasez e inflación, con ejemplo numérico y sensibilidad.

```
#Política óptima de inventario.
print('POLÍTICA ÓPTIMA DE INVENTARIO')

#Tiempo óptimo de reabastecimiento t_1*.
print('Tiempo óptimo de reabastecimiento t_1*: ')
print(str(round(t_1r*12 , 2)) + " meses")

#Nivel óptimo de inventario máximo S*.
optimal_inventory_level = D_0*μ*t_1r*(1+(α*t_1r**β)/(β+1))-
D_0*μ**2/2*(1+2*α*μ**β/((β+1)*(β+2)))
print('Nivel óptimo de inventario máximo S*: ')
print(str(round(optimal_inventory_level)) + " Unidades")

#Cantidad óptima de pedido Q*.
shortage = D_0*μ*(T-t_1r)
optimal_order_quantity = optimal_inventory_level + shortage
print('Cantidad óptima de pedido Q*: ')
print(str(round(optimal_order_quantity))+ " Unidades")

#Costo total de del sistema de inventario.
Inventory_total_cost = 1/T*(C_o
+C_d*(D_0*μ*t_1r*(1+(α*t_1r**β)/(β+1))-
D_0*μ**2/2*(1+2*α*μ**β/((β+1)*(β+2)))
-(D_0/R**2+((-D_0*R*μ-D_0)*np.exp(-R*μ))/R**2)-((D_0*μ*np.exp(-
R*μ))/R-(D_0*μ*np.exp(-R*t_1r))/R))
+C_h*(t_1r/2*(D_0*μ*t_1r*(1+(α*t_1r**β)/(β+1))-
D_0*μ**2/2*(1+2*α*μ**β/((β+1)*(β+2))))
+C_s*((D_0*μ*np.exp(-R*t_1r))/R**2+((-D_0*R*T*μ+D_0*R*μ*t_1r-
D_0*μ)*np.exp(-R*T))/R**2))

print('Costo total de inventario T(t_1*): ')
print("$ " + str(round(Inventory_total_cost, 2)) + " /año")
```



Apéndice 5: Gráfico de la función de costo total de inventario

Para graficar la función de costo total de inventario se hace uso del siguiente código de programación en Python:

```
#Created on Sat Jun 25 22:23:37 2022
#@author: Claudio Chavarria

#Parámetros de la función
R = float(input(" Tasa de inflación: "))
D_0 = float(input(" Parámetro de la demanda: "))
μ = float(input(" Parámetro de tiempo donde la demanda se vuelve con
stante: "))
C_o = float(input(" Costo de ordenar: " ))
C_d = float(input(" Costo por unidad deteriorada: "))
C_s = float(input(" Costo unitario por faltantes: "))
C_h = float(input(" Costo de mantener en inventario una unidad: "))
α = float(input(" Parámetro de escala de la función de Weibull: "))
β = float(input(" Parámetro de forma de la función de Weibull: "))
T = float(input(" Duración del tiempo de cada ciclo de pedido: "))
#Importar mpl_toolkits.mplot3d, matplotlib.pyplot, numpy
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
#Crear una figura
figura = plt.figure()
#Crear ejes de la grafica
ejes = Axes3D(figura)
#Definir funcion
def f(t_1, T):
    return (1/T*(C_o
        +C_d*(D_0*μ*t_1*(1+(α*t_1**β)/(β+1))-
D_0*μ**2/2*(1+(2*α*μ**β)/((β+1)*(β+2)))-(D_0/R**2
        +((-D_0*R*μ-D_0 )*np.exp(-R*μ))/R**2 )-((D_0*μ*np.exp(-
R*μ))/R-(D_0*μ*np.exp(-R*t_1))/R))
        +C_h*(t_1/2*(D_0*μ*t_1*(1+(α*t_1**β)/(β+1))-
D_0*μ**2/2*(1+(2*α*μ**β)/((β+1)*(β+2))))))
```

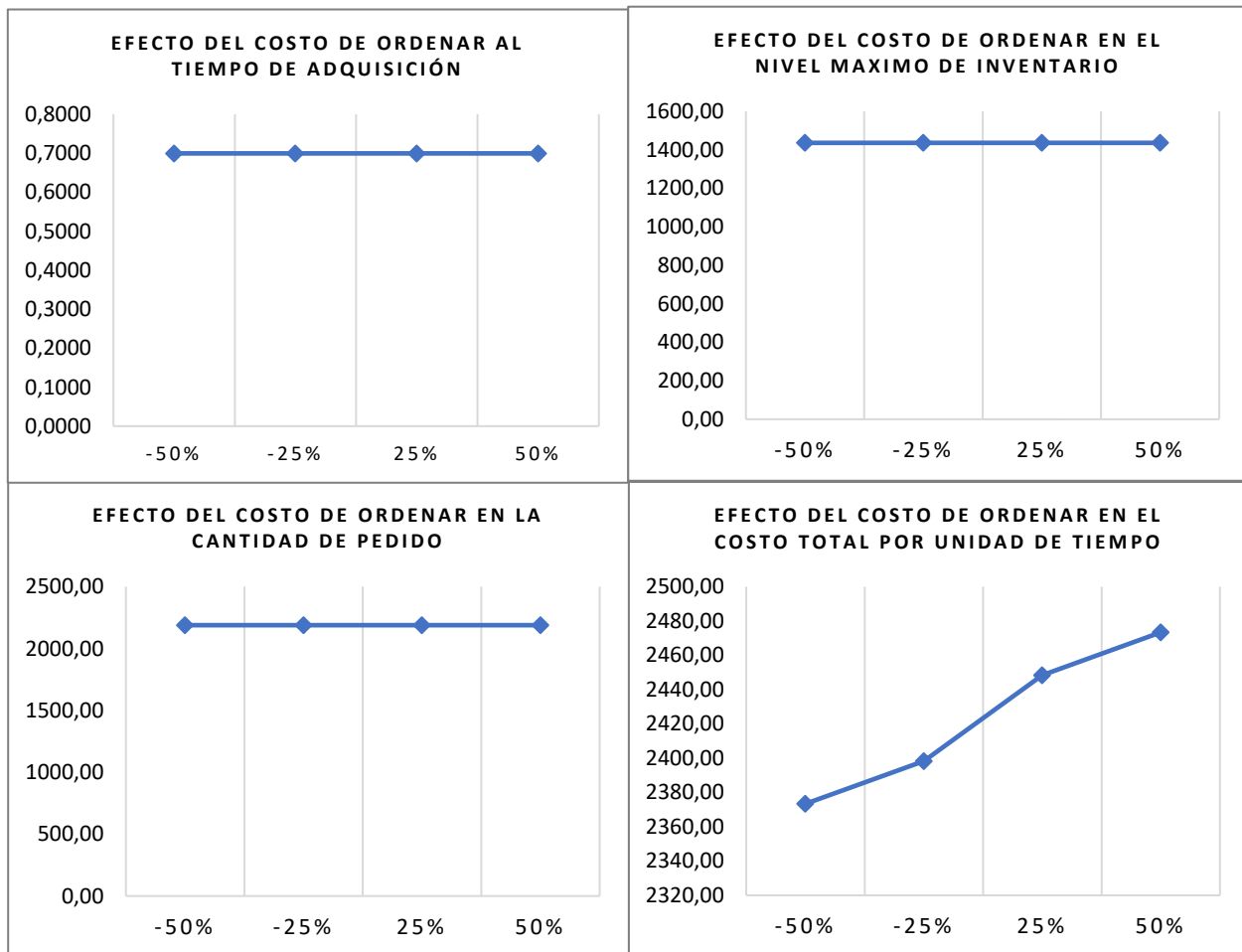


```
+C_s*((D_0*μ*np.exp(-R*t_1))/R**2 +((-D_0*R*T*μ+D_0*R*μ*t_1-
D_0*μ)*np.exp(-R*T))/R**2))
)
limiteMint_1=0.1
limiteMaxt_1=1.2
limiteMinT=0.1
limiteMaxT=1.2
#Crear puntos para las variables
t_1 = np.linspace(limiteMint_1, limiteMaxt_1, 120)
T = np.linspace(limiteMinT, limiteMaxT, 120)
#Crear una malla
t_1,T = np.meshgrid(t_1, T)
#Definir función a graficar
Z = f(t_1, T)
#Graficar
ejes.plot_wireframe(t_1,T,Z)
#APARIENCIA DE LA SUPERFICIE
ejes.plot_surface(t_1,T, Z, cmap="rainbow")
#ejes.plot_surface(X, Y, Z, cmap="Spectral")
#ejes.plot_surface(X, Y, Z, cmap="nipy_spectral")
#ejes.plot_surface(X, Y, Z, cmap="gist_rainbow_r")
#ejes.plot_surface(X, Y, Z, cmap="coolwarm")
#Nombre de los ejes
ejes.set_xlabel('t_1')
ejes.set_ylabel('T')
ejes.set_zlabel('TC( t_1, T)')
```



Apéndice 6: Análisis de sensibilidad: Costo de ordenar

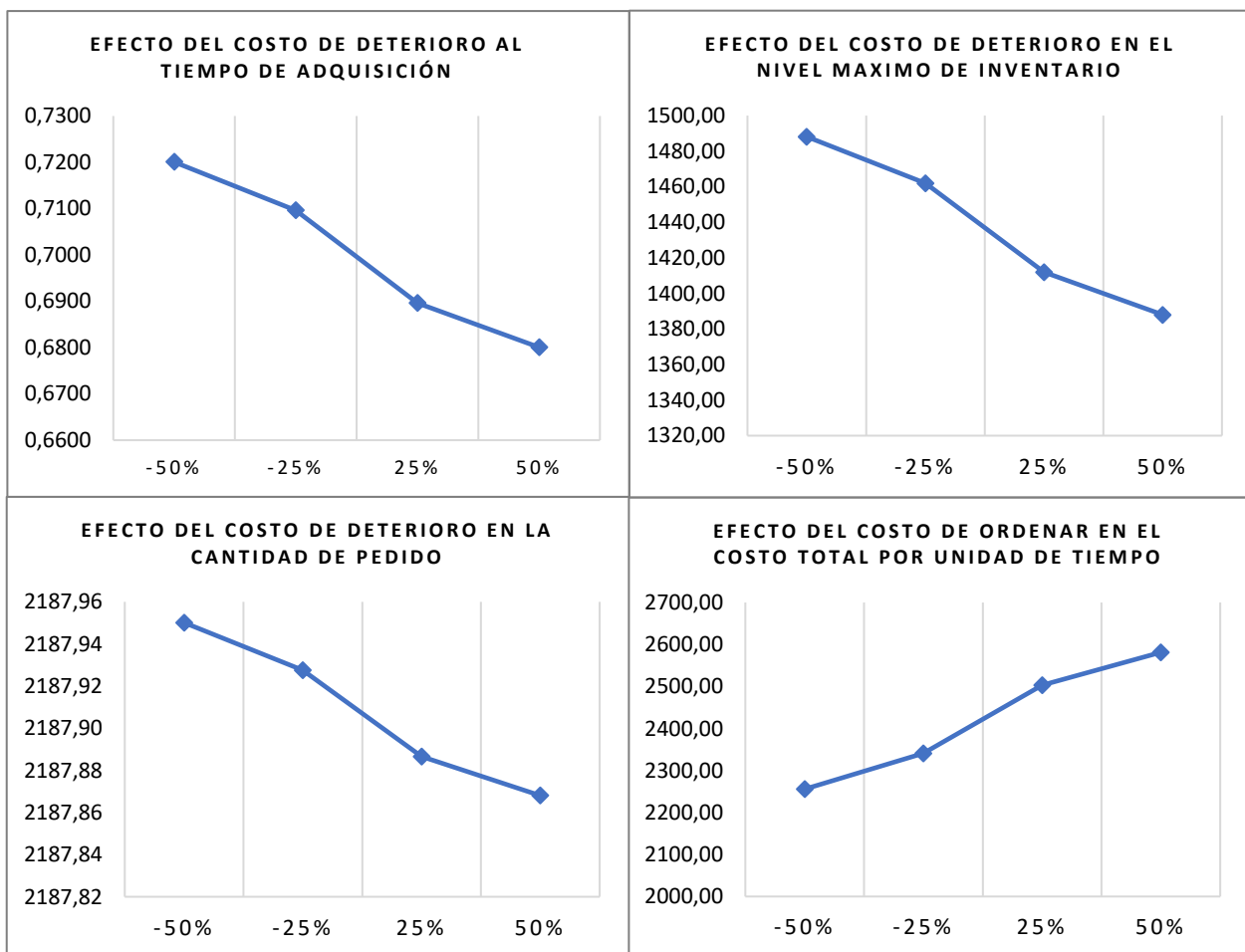
Parametros	Cambio (%)	Cambio	Cambio en			
			t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
C_o	-50%	50	0.6995	1436.61	2187.91	2373.37
	-25%	75	0.6995	1436.61	2187.91	2398.37
100	25%	125	0.6995	1436.61	2187.91	2448.37
	50%	150	0.6995	1436.61	2187.91	2473.37





Apéndice 7: Análisis de sensibilidad: Costo por deterioro

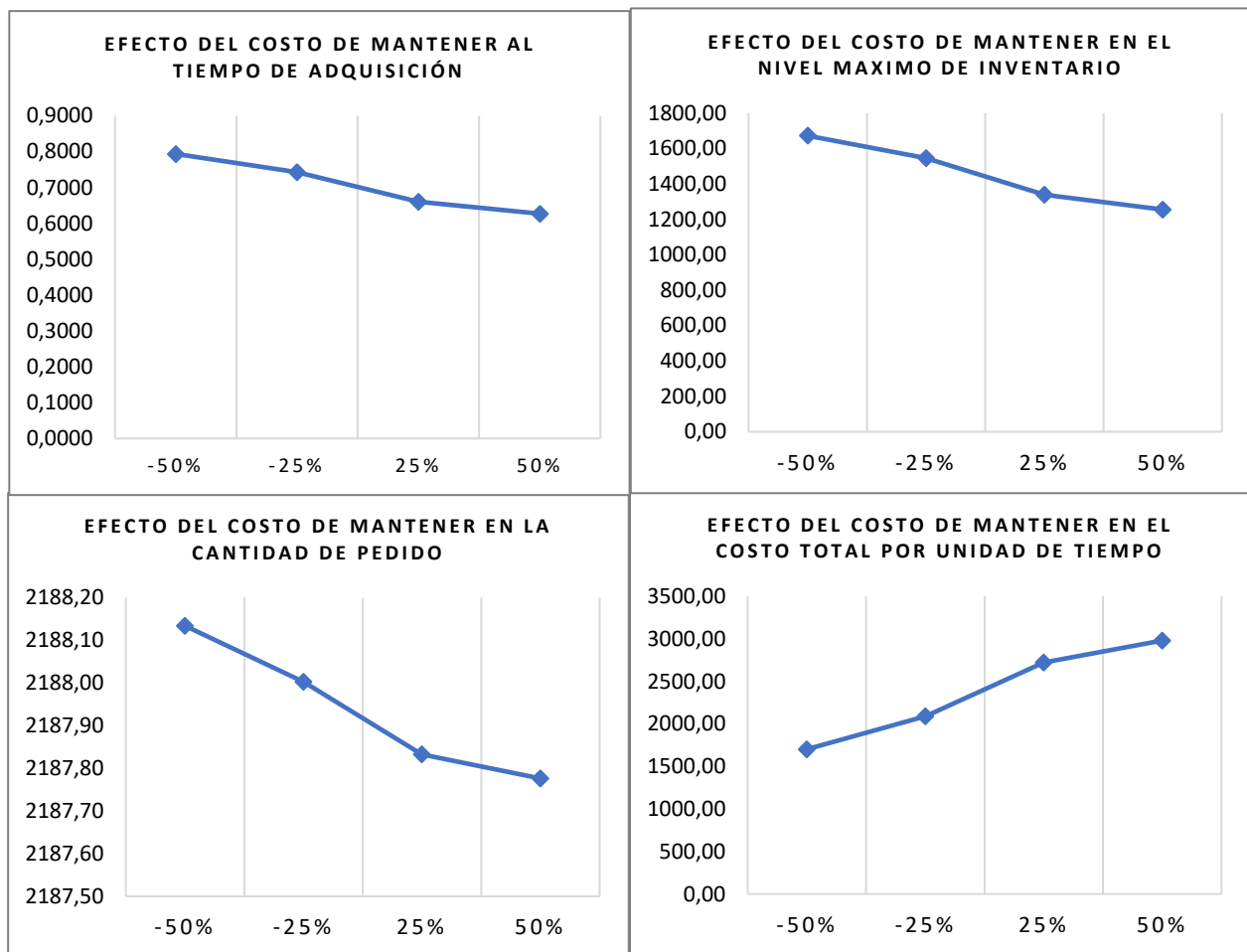
Parametros	Cambio (%)	Cambio	Cambio en			
			t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
C_d	-50%	4	0.7201	1488.12	2187.95	2255.71
	-25%	6	0.7096	1461.99	2187.93	2340.81
δ	25%	10	0.6896	1411.97	2187.89	2503.51
	50%	12	0.6801	1388.02	2187.87	2581.31





Apéndice 8: Análisis de sensibilidad: Costo de mantener

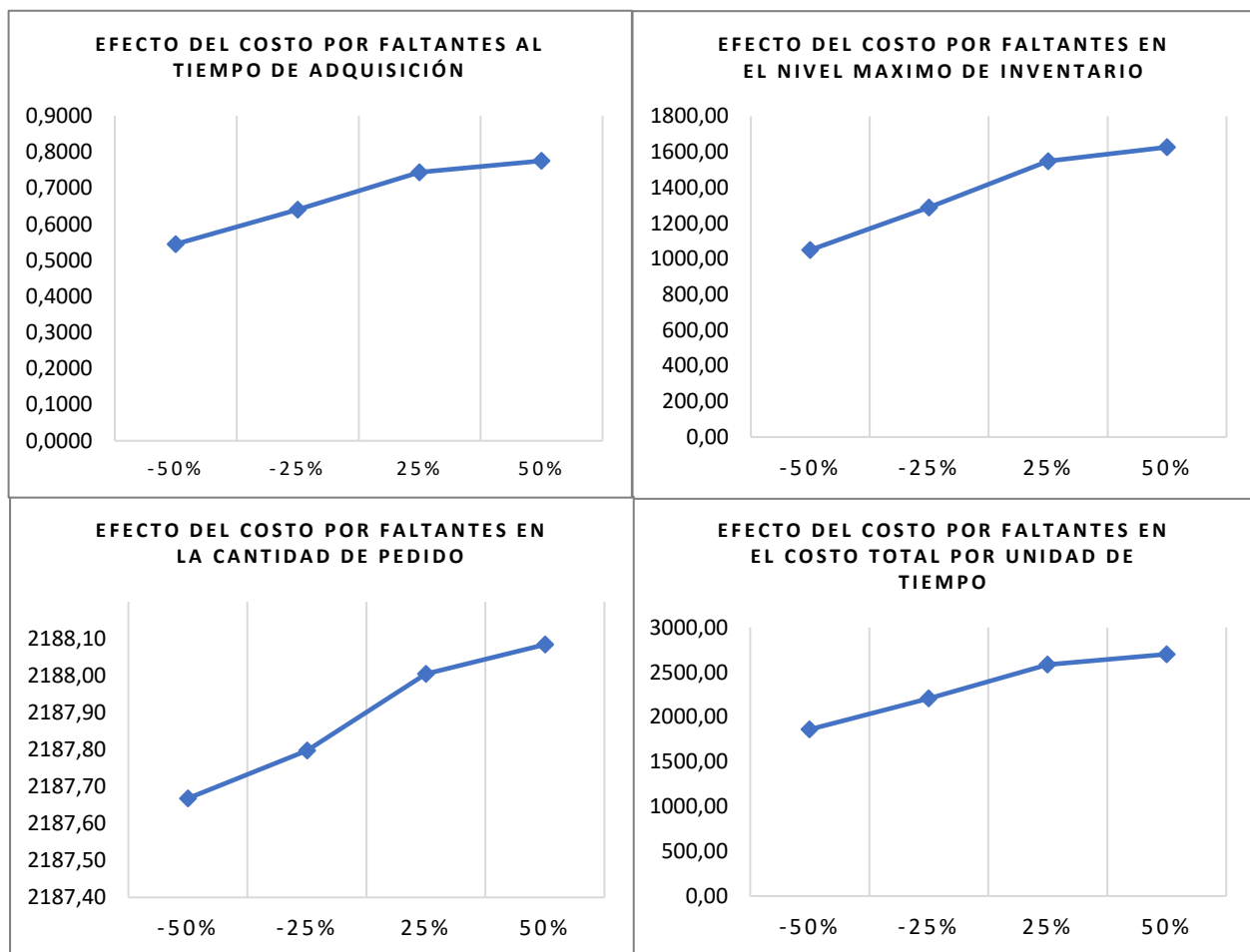
Parametros	Cambio (%)	Cambio	Cambio en			
			t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
C_h	-50%	1.25	0.7937	1672.44	2188.13	1701.57
	-25%	1.88	0.7429	1545.32	2188.00	2090.42
2.5	25%	3.13	0.6607	1339.71	2187.83	2720.46
	50%	3.75	0.6270	1255.33	2187.78	2979.22





Apéndice 9: Análisis de sensibilidad: Costo por faltantes

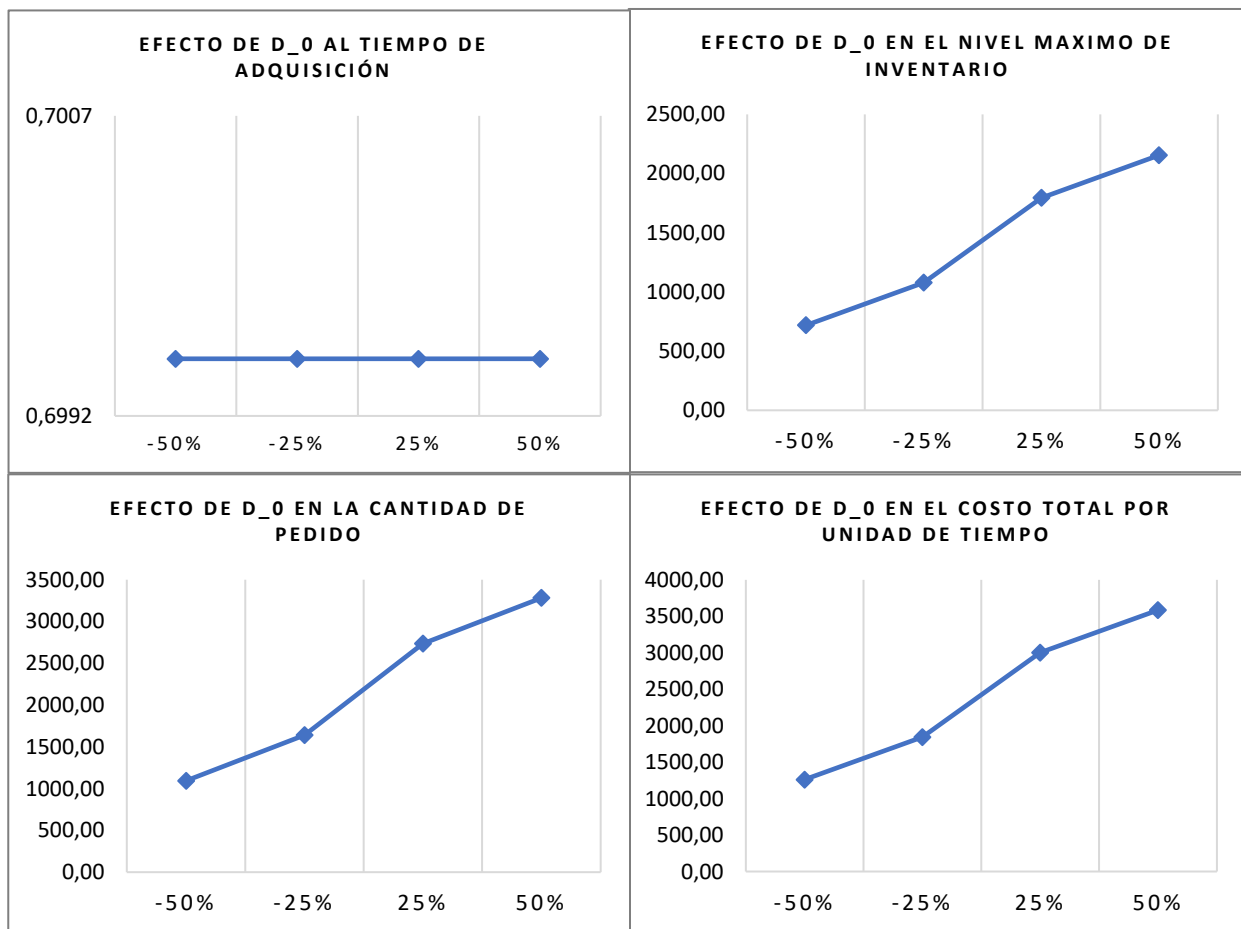
Parametros	Cambio (%)	Cambio	Cambio en			
			t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
C_s	-50%	3.5	0.5449	1049.84	2187.67	1860.68
	-25%	5.3	0.6402	1288.25	2187.80	2207.48
7	25%	8.8	0.7441	1548.21	2188.01	2585.77
	50%	10.5	0.7755	1626.89	2188.08	2700.23





Apéndice 10: Análisis de sensibilidad: Parámetro de la demanda D_0

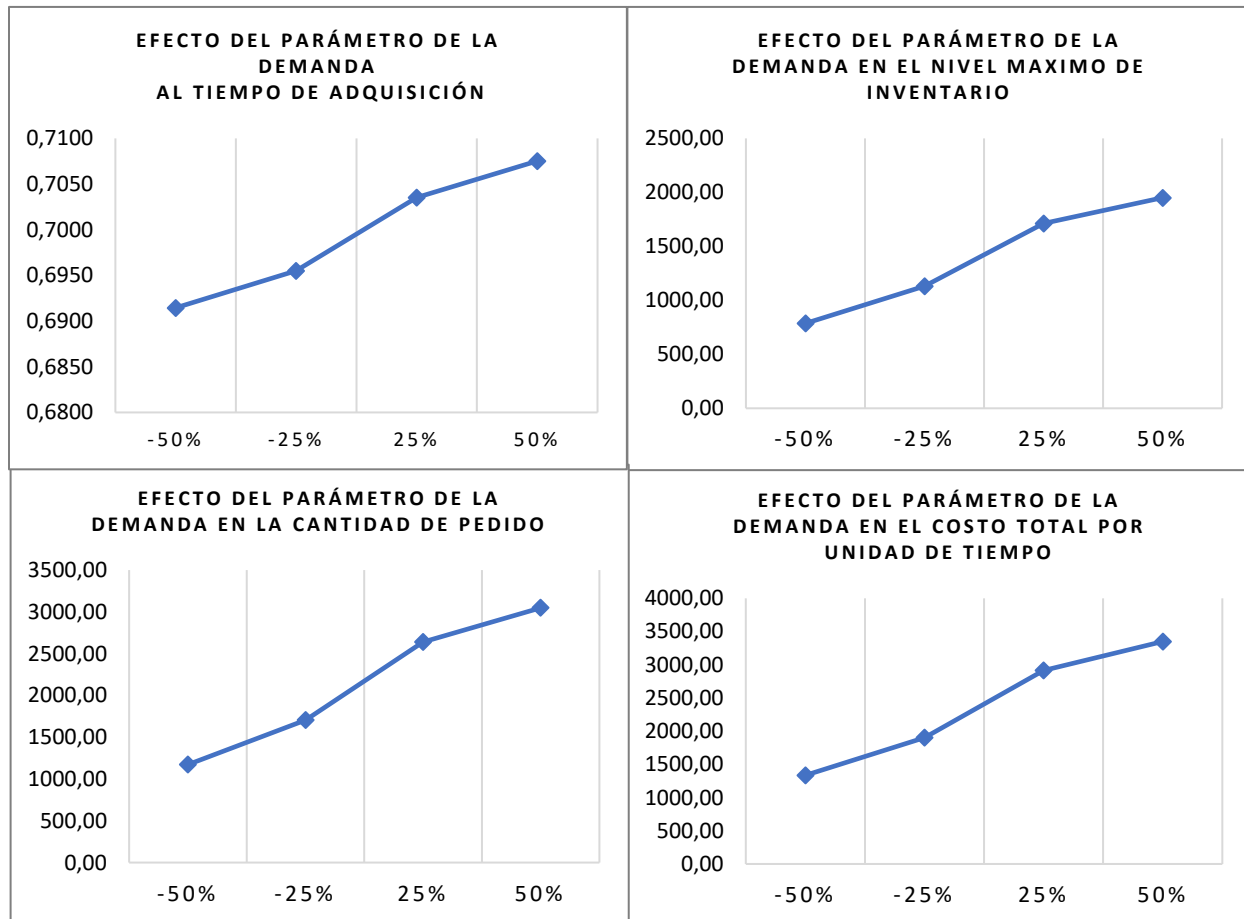
Parametros	Cambio (%)	Cambio	Cambio en			
			t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
D_0	-50%	5000	0.6995	718.31	1093.95	1261.69
	-25%	7500	0.6995	1077.46	1640.93	1842.53
10000	25%	12500	0.6995	1795.77	2734.88	3004.22
	50%	15000	0.6995	2154.92	3281.86	3585.06





Apéndice 11: Análisis de sensibilidad: Parámetro de la demanda μ

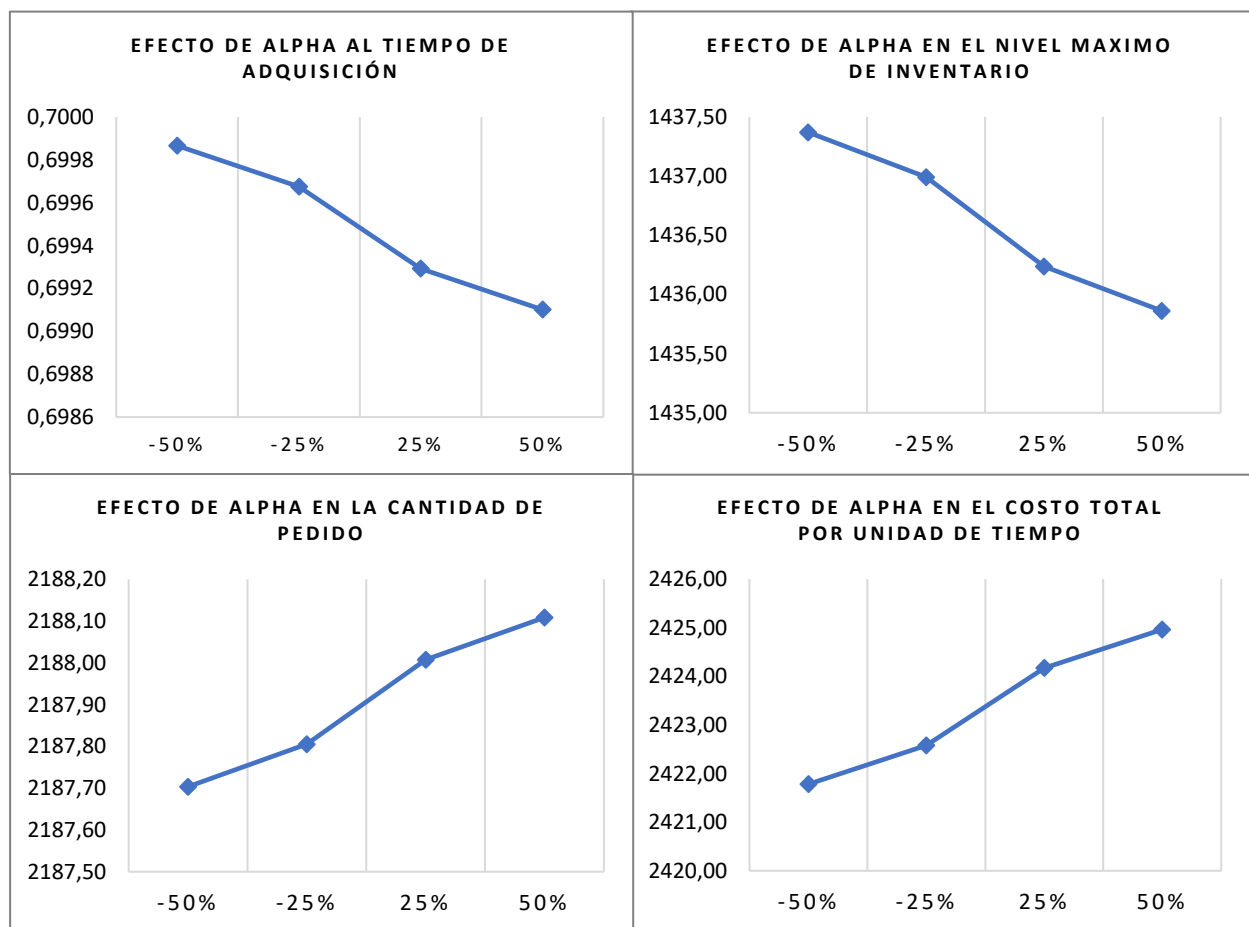
Parametros	Cambio (%)	Cambio	Cambio en			
			t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
μ	-50%	0.125	0.6915	786.38	1172.07	1335.25
	-25%	0.188	0.6955	1131.12	1703.58	1902.94
0.25	25%	0.313	0.7035	1712.73	2640.67	2911.46
	50%	0.375	0.7075	1950.72	3047.50	3349.74





Apéndice 12: Análisis de sensibilidad: Parámetro de la función Weibull α

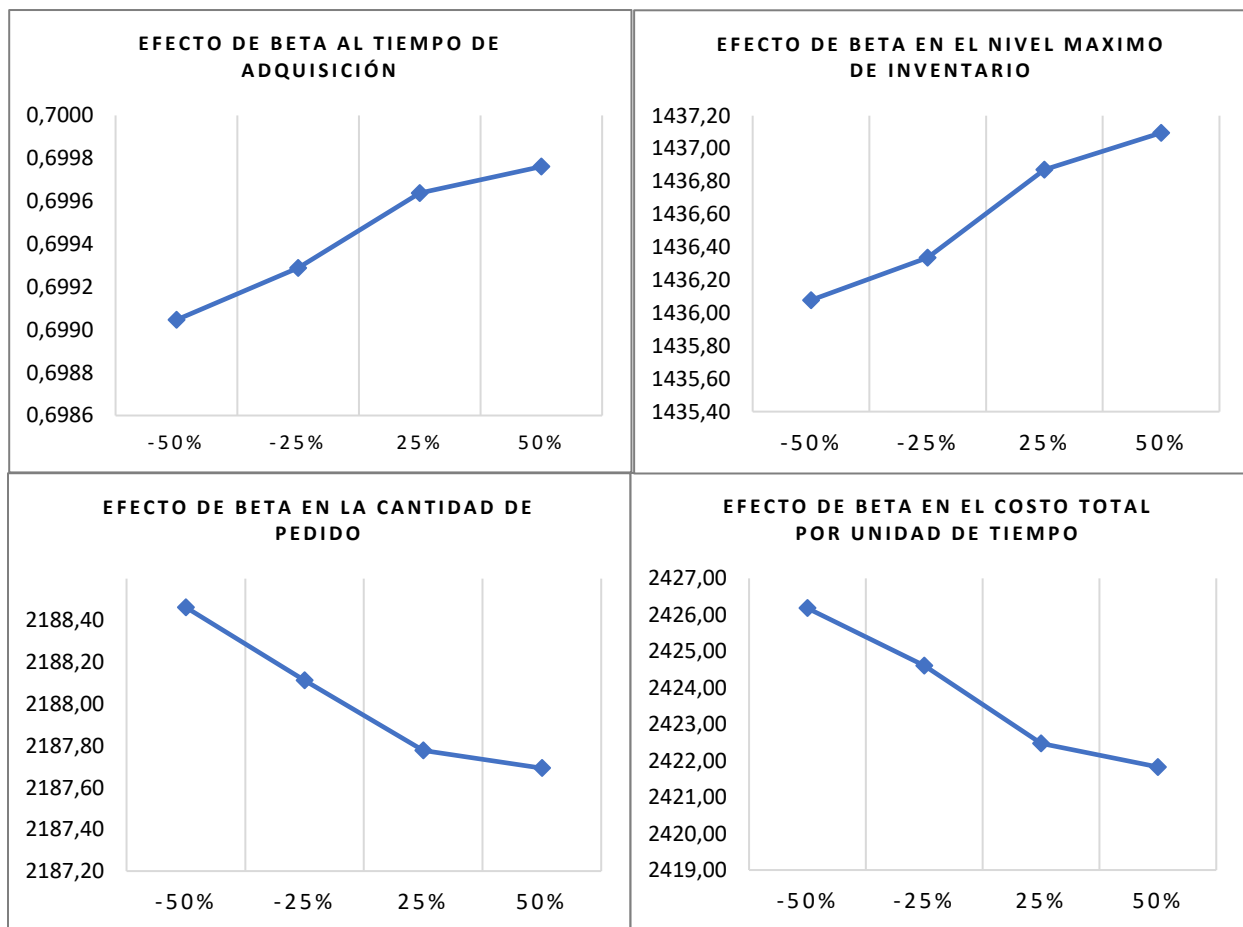
Parametros	Cambio (%)	Cambio	Cambio en			
			t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
α	-50%	0.0010	0.6999	1437.37	2187.70	2421.78
	-25%	0.0015	0.6997	1436.99	2187.81	2422.58
0.002	25%	0.0025	0.6993	1436.24	2188.01	2424.17
	50%	0.0030	0.6991	1435.86	2188.11	2424.96





Apéndice 13: Análisis de sensibilidad: Parámetro de la función Weibull β

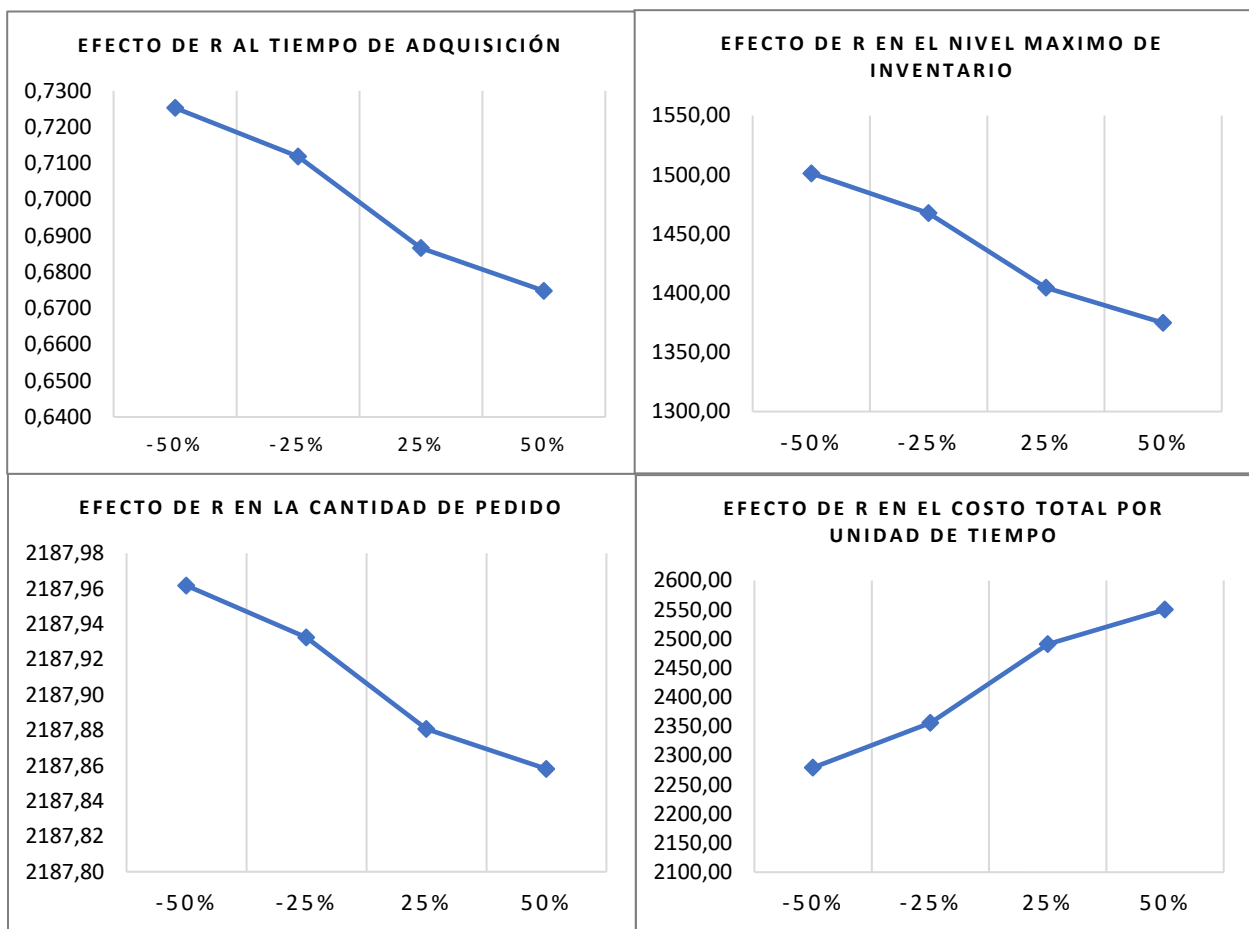
Parametros	Cambio (%)	Cambio	Cambio en			
			t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
β	-50%	1.250	0.6990	1436.08	2188.46	2426.18
	-25%	1.875	0.6993	1436.34	2188.11	2424.60
2.5	25%	3.125	0.6996	1436.87	2187.78	2422.47
	50%	3.750	0.6998	1437.10	2187.69	2421.83





Apéndice 14: Análisis de sensibilidad: Tasa de descuento neta de la inflación

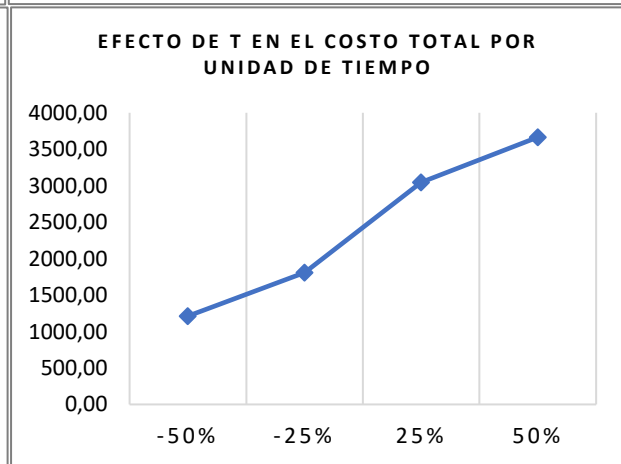
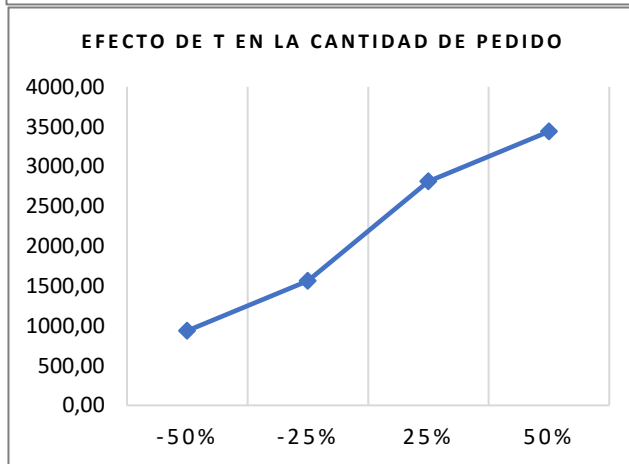
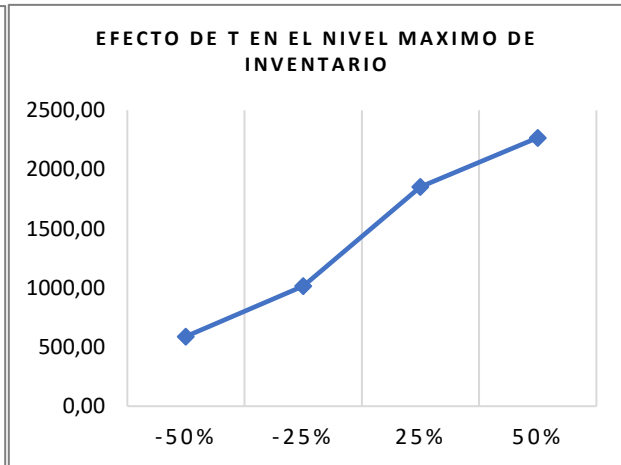
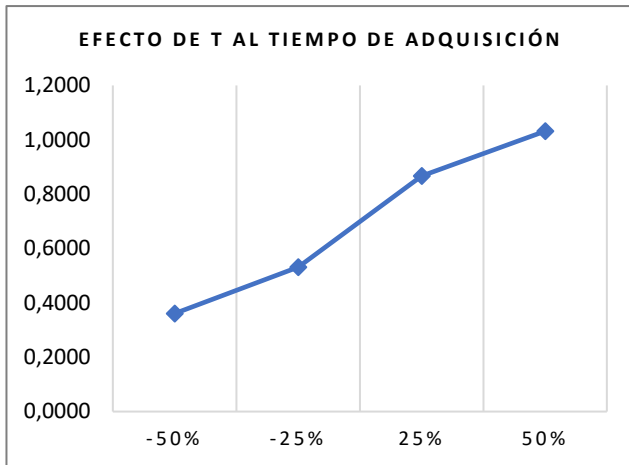
Parametros	Cambio (%)	Cambio	Cambio en			
			t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
R	-50%	0.035	0.7253	1501.21	2187.96	2279.22
	-25%	0.053	0.7119	1467.62	2187.93	2355.64
0.07	25%	0.088	0.6867	1404.53	2187.88	2490.63
	50%	0.105	0.6748	1374.90	2187.86	2550.12





Apéndice 15: Analisis de sensibilidad: Duración del tiempo de cada ciclo de pedido

Parametros	Cambio (%)	Cambio	Cambio en			
			t_1^*	S^*	Q^*	$TC(t_1^*)$
T	-50%	0.50	0.3607	589.26	937.54	1211.74
	-25%	0.75	0.5309	1014.91	1562.65	1807.05
I	25%	1.25	0.8664	1854.35	2813.36	3044.42
	50%	1.50	1.0316	2268.08	3439.09	3664.81





BIBLIOGRAFÍA

- Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración* (Quinta ed.). México: Pearson Educación.
- Blank, L., & Tarquin, A. (2006). *Ingeniería Económica* (Sexta ed.). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Chakrabarty, T., Giri, B. C., & Chaudhuri, K. S. (1998). An EOQ model for items with Weibull distribution deterioration, shortages and trended demand, an extension of Philip's Model. *Computers & Operations Research*, 25, 649-657.
- Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*. (Sexta ed.). México: McGraw-Hill Education.
- Chase, R. B., & Jacobs, R. F. (2014). *Administración de operaciones. Producción y cadena de suministros* (Decimotercera ed.). México: McGrawHill Education.
- Chopra, S., & Meindl, P. (2013). *Administración de la cadena de suministro* (Quinta ed.). México: Pearson Educación.
- Chung, K.-J., & Ting, P.-S. (1994). On replenishment schedule for deteriorating items with time-proportional demand. *Production Planning & Control*, 5(4), 392-396. doi:<https://doi.org/10.1080/09537289408919510>
- Covert, R. P., & Philip, G. C. (1972). An EOQ Model for Items with Weibull Distribution Deterioration. *A I I E Transactions*, 323-326.



- Donaldson, W. A. (1977). Inventory Replenishment Policy for a Linear Trend in Demand -- An Analytical Solution. *Operational Research Quarterly*, 28(3), 663-670. doi:<https://doi.org/10.2307/3008916>
- Giri, B. C., Jalan, A. K., & Chaudhuri, K. S. (2003). Economic Order Quantity model with Weibull deterioration distribution, shortage and ramp-type demand. *International Journal of Systems Science*, 34(4), 237-243. doi:<https://doi.org/10.1080/0020772131000158500>
- Hariga, M. A., & Goyal, S. K. (1995). An Alternative Procedure for Determining the Optimal Policy for an Inventory Item Having Linear Trend in Demand. *Journal of the Operational Research Society*, 46(4), 521-527. doi:<https://doi.org/10.1057/jors.1995.71>
- Harris, F. W. (1913). How Many Parts To Make At Once. *Factory, The Magazine of Management*, 10(2), 135-136, 152.
- Indrajitsingha, S., Sahoo, A., Samanta, P., Misra, U., & Raju, d. L. (2020). Fuzzy EOQ Inventory Model for Price-Dependent-Demand of Deteriorating Items. *Indian Journal of Natural Sciences*, 11.
- Jain, S., & Kumar, M. (2007). An EOQ Inventory Model with Ramp Type Demand, Weibull Distribution Deterioration and Starting with Shortage. *Operational Research Society of India*, 240-249.
- Krajewski, L. J., Ritzman, L. P., & Malhotra, M. K. (2008). *Administración de operaciones Procesos y cadena de valor* (Octava ed.). México: Pearson Educación.
- Kumar, N., & Kumar, S. (2016). Inventory Model for Non Instantaneous Deteriorating Items, stock dependent demand, partial backlogging,



and inflation over a finite time horizon. *International Journal of Supply and Operations Management*, 3, 1168-1191.

Kumar, N., Singh, S. R., & Kumari, R. (2012). An Inventory Model with Time-Dependent Demand and Limited Storage Facility under Inflation. *Advances in Operations Research*, 1-17. doi:10.1155/2012/321471

M. Hariga, M., & Benkherouf, L. (1994). Optimal and heuristic inventory replenishment models for deteriorating items with exponential time-varying demand. *European Journal of Operational Research*, 123-137. doi:https://doi.org/10.1016/0377-2217%2894%2990400-6

Mandal., B. (2010). An EOQ inventory model for Weibull distributed deteriorating items under ramp type demand and shortages. *Opsearch*, 158–165. doi:10.1007/s12597-010-0018-x

Mandal., B., & A, P. (1998). Order level inventory system with ramp type demand rate for deteriorating items. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 49-66. doi:https://doi.org/10.1080/09720502.1998.10700243

Mishra, U. (2015). An inventory model for deteriorating items under trapezoidal type demand and controllable deterioration rate. *German Academic Society for Production Engineering*. doi: 10.1007/s11740-015-0625-08

Nahmias, S. (2007). *Análisis de la producción y las operaciones*. (Quinta ed.). México: The McGraw-Hil.

S. Bose, A. G., & Chaudhuri, K. S. (1995). An EOQ model for deteriorating item with linear time-dependent Demand Rate and shortages under



- inflation and time discounting. *Journal of the Operational Research Society*, 46(6), 771-782. doi:<https://doi.org/10.1057/jors.1995.107>
- S.K.Ghosh, & K.S.Chaudhuri. (2004). An order-level inventory model for a deteriorating item with Weibull distribution deterioration, Time-Quadratic demand and Shortages. *Advanced Modeling and Optimization*, 6(1), 21-35.
- Sanni, S., & Chukwu, W. (2013). An Economic order quantity model for Items with Three-parameter Weibull distribution Deterioration, Ramp-type Demand and Shortages. *Applied Mathematical Modelling*, 9698-9706. doi:<https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.05.017>
- Singh, T., & Pattnayak, H. (2013). An EOQ Model for Deteriorating Items with Linear Demand, Variable Deterioration and Partial Backlogging. *Journal of Service Science and Management*, 186-190.
- Singh, T., & Pattnayak, H. (2014). An EOQ inventory model for deteriorating items with varying trapezoidal type demand rate and Weibull distribution deterioration. *Journal of Information and Optimization*, 37-41. doi:10.1080/02522667.2013.838445
- Steven C. Chapra, R. P. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros*. México: McGraw-Hill Educación.
- Sundararajan, R., Palanivel, M., & Uthayakumar, R. (2019). An EOQ model of non-instantaneous deteriorating items with price, time-dependent demand and backlogging. *Journal of Control and Decision*, 135-154. doi:<https://www.tandfonline.com/action/showCitFormats?doi=10.1080/23307706.2019.1656560>



- Sundnes, J. (2020). *Introduction to Scientific Programming with Python* (Vol. 6). Springer Open. Obtenido de <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-50356-7>
- Taha, H. A. (2017). *Operations Research An Introduction Global Edition* (10th ed.). Harlow, England: Pearson Education Limited.
- Tripathya, C. K., & Mishra, U. (2011). An EOQ model with time dependent Weibull deterioration and ramp type demand. *International Journal of Industrial Engineering Computations*, 307-318. doi:<https://doi.org/10.5267/J.IJIEC.2010.07.007>
- Verma, V., Vijay, K., & Azeez, K. N. (2017). An Inventory Model for Gompertz Distribution Deterioration Rate with Ramp Type Demand Rate and Shortages. *International Journal of Statistics and Systems*, 363-373.
- Walpole, R. E., Myers, R. H., Myers, S. L., & Ye, K. (2012). *Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias*. Mexico: Pearson Educación.
- Wee, H.-M. (1995). A Deterministic Lot-Size Inventory Model for Deteriorating Items with Shortages and a Declining Marke. *Computer and Operations Research Society*, 345-356. doi:[https://doi.org/10.1016/0305-0548\(94\)E0005-R](https://doi.org/10.1016/0305-0548(94)E0005-R)
- Wilson, R. (1934). A Scientific Routine for Stock Control. *Harvard Business Review*, 13, 116-128.