UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
RECINTO UNIVERSITARIO “SIMON BOLIVAR”
FACULTAD DE ELECTROTECNIA Y COMPUTACIÓN

TRABAJO MONOGRÁFICO

“TEXTO GUIA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICA I Y III EN LA CARRERA DE INGENIERIA EN COMPUTACIÓN”

PRESENTADO POR:

Br. Marlene Rivera Dávila
Br. Samantha Rodríguez Madriz

TUTOR: Lic. Alberto Silva

Managua, Nicaragua 2003

DEDICATORIA

A mi querida madre Aura Lila Madriz
que ha sido mi guía, el pilar de
mi vida y a quien debo todo
lo que soy.
A mis hermanos Eduardo y Alvaro por
todo su apoyo.

Samantha A. Rodríguez M.

A mis padres los seres más sagrados de la tierra,
Amparo Dávila y Miguel Rivera.
Quienes con sacrificio y amor me brindaron
su ayuda de forma incondicional.
A mi esposo Eliseo, mi hija Anielka y a mi Pequeño Ronier
quienes soportaron mis Angustias durante todo el proyecto.
A mis hermanos por su ayuda.

Marlene Rivera Dávila.

AGRADECIMIENTO

Antes que nada, queremos dar gracias a nuestro Señor Jesucristo por permitirnos la dicha de haber alcanzando el sueño de culminar nuestros estudios universitarios. A nuestras familias por su paciencia, dedicación y apoyo de todos estos años.

Un agradecimiento muy especial a nuestro tutor el Lic. Alberto Silva por no haber perdido nunca la paciencia durante todos estos meses, por ese optimismo y alegría que lo caracterizan, por su dedicación y principalmente por compartir sus conocimientos con nosotros.

A los miembros del Departamento. de Lenguajes y Simulación por toda la colaboración que nos brindaron.

Bueno, y qué creen, qué nos olvidamos de ustedes, claro que no, para ustedes tenemos un agradecimiento, muy, pero muy especial, gracias por toda su ayuda amigos; Candelaria Téllez, Rosa Icela Méndez, Rene Pérez, Félix Ortiz, Luis Bolaños y al Sr. Walter Rodríguez.

RESUMEN

La idea de realizar este trabajo monográfico surge del deseo de colaborar con el Departamento de Lenguajes y Simulación de la carrera de Ingeniería en Computación**,** en la búsqueda de nuevas metodologías que ayuden a mejorar las formas de enseñar e impartir las asignaturas. Con los estudiantes al darles la oportunidad de tener a su alcance un material de estudio que les ayude a comprender y analizar mejor las clases de Matemática I y III, auxiliándose de los nuevos avances que ofrece la tecnología como la computadora y el software.

Este texto, de nombre **"Texto guía para la enseñanza de las asignaturas de Matemática I y III en la carrera de Ingeniería en Computación"** es una guía Teórico Práctica que reúne una colección de temas, ejemplos, ejercicios, programas de computadoras, aplicaciones, etc., que fueron escogidos con mucho cuidado para proveer al estudiante de ing. en computación conceptos y métodos que él pueda utilizar para resolver problemas que involucren análisis matemático.

El software que se utiliza en el texto como herramienta para ayudarnos en esta tarea, es el "Software Mathematica, versión 2.0". Se eligió por estar orientado a la computación simbólica o cálculo simbólico, que es una disciplina que esta cambiando la forma de ver y utilizar las matemáticas por muchos investigadores y usuarios, de forma tal que han surgido nuevos métodos y formas de resolver los problemas matemáticos. El cálculo simbólico plantea que ya no se trata de que el estudiante aprenda métodos y algoritmos (de derivación, integración, resolución de ecuaciones, etc.) sino de que los utilice para reforzar la comprensión de los conceptos y resolver los problemas.

El material se encuentra organizado en 5 unidades de estudio por asignatura:

<u>Asignatura Matemática I</u>

<u>**Primera Unidad**</u>: Esta primera unidad se ha dedicado especialmente al estudio del concepto de una función, haciendo una introducción sobre relaciones, analizándolas e identificándolas por medio de gráficos. Se hace referencia a las funciones como Modelos Matemáticos, a funciones como objeto: Funciones Aditivas, Multiplicativas, Simétricas Par e Impar; Álgebra de Funciones, se estudia la representación de la Función y su Inversa. Finalmente se hace una introducción al Cálculo con la Determinación Experimental de Límite y su explicación geométrica o intuitiva, de esta forma se puede adquirir una idea de la naturaleza de un límite, examinando las gráficas y realizando cálculos numéricos.

Por lo mencionado anteriormente se puede decir que en esta unidad se hace una preparación para aplicaciones posteriores de las derivadas. Los ejemplos y ejercicios incluyen problemas de interpretación e identificación de una función.

Se inicia el uso del software Mathematica para hacer gráficos, interpretación de funciones y cálculos de límites.

Segunda Unidad: Luego de hacer un estudio preliminar sobre funciones y límites, podemos continuar con la definición de la derivada de una función como la pendiente de la tangente a su gráfica. Al igual se explica la interpretación importante de la derivada de una función como su razón de cambio con respecto a la variable independiente, presentando como ejemplo el Modelo de Crecimiento Población versus Alimentación Disponible. Se estudian las Reglas de Derivación, incluyendo las reglas para las funciones circulares.

El Software Mathematica nos sirve de gran ayuda en esta unidad ya que posee comandos para calcular derivadas, además que podemos graficar con mucha precisión las funciones con sus tangentes.

Tercera Unidad: Esta unidad esta dedicada al estudio y análisis de problemas de Valor Inicial, iniciando con el concepto de Ecuación Diferencial ya que con frecuencia los modelos matemáticos de situaciones del mundo real contienen ecuaciones con derivadas de funciones desconocidas. Se presentan varias aplicaciones de la ecuación diferencial y de solución a problemas de Valor Inicial.

El software Mathematica nos provee de comandos o funciones que nos permiten encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales con valor inicial. En esta unidad se hace uso de estos comandos para ejemplificar como podemos usarlos y así resolver problemas de valor inicial.

Cuarta Unidad: Después de iniciar el estudio de las derivadas y ecuaciones diferenciales, tenemos la oportunidad de fortalecer los conocimientos adquiridos con ésta unidad, de nombre Cálculo Diferencial y sus Aplicaciones. Se estudian las derivadas y sus gráficas con problemas de aplicación de Máximos y Mínimos, El criterio de la Primera Derivada, Derivadas Superiores y Concavidad. Además se hace una breve introducción a las aproximaciones de las soluciones de las ecuaciones no lineales.

Se puede usar el Software Mathematica para crear pequeños programas que nos permitan encontrar valores Máximos y Mínimos, también para encontrar aproximaciones de soluciones de ecuaciones no lineales, en esta unidad se muestran ejemplos de estos programas.

Quinta Unidad: Esta orientada al análisis del Método de Euler que calcula aproximaciones numéricas de la solución de problemas de valor inicial. Existen tres versiones de éste método: Euler hacia adelante, Euler modificado y Euler hacia atrás; pero debido a que estamos en la fase inicial del estudio de las ecuaciones diferenciales sólo analizaremos la primera versión Euler hacia adelante.

Se presentan dos aplicaciones o casos de estudio: El Modelo de la Epidemia y el Sistema Masa Resorte. Para el Modelo de la Epidemia se desarrolla un pequeño programa utilizando el software Mathematica, que permite darnos cuenta de las ventajas de usar la computadora para resolver este tipo de problemas.

Asignatura Matemática III:

Todas las unidades contienen la misma estructura definiciones, demostraciones, gráficos, ejemplos y programación.

Primera Unidad: Vectores y curvas planas, se ha hecho énfasis en ecuaciones paramétricas, límites y movimientos en el plano, los cuales son utilizados en muchos temas de esta unidad.

Segunda Unidad: Funciones de dos y tres variables, se hace referencia a gráficas de dos variables, límites de funciones de dos variables y derivadas parciales con sus aplicaciones.

Tercera Unidad: Razón de cambio, se introducen las razones de cambio, además incluye aproximaciones, valores extremos de funciones de dos variables a través de los diferentes métodos para su desarrollo, derivadas direccionales, etc.

Cuarta Unidad: Integrales múltiples, se introdujeron las integrales múltiples y sus aplicaciones, empezando con integrales dobles su definición, evaluación por medio de la fórmulas de sumatoria, particiones regulares y la determinación de áreas .

Quinta Unidad: Campos vectoriales e integrales de línea, trata sobre los campos vectoriales en física, las integrales de línea, teorema de Green en el plano.

Además se presenta un **apéndice** que cuenta con información adicional que puede servir de gran ayuda al momento de resolver algunos de los problemas que se plantean a lo largo del texto. Posee un breve resumen sobre Fórmulas de Álgebra, Trigonometría incluyendo gráficas de áreas y volúmenes, también contiene Tablas de Identidades Trigonométricas, Propiedades de Logaritmos, Teoremas sobre Límites, Reglas Básicas de Derivación en apoyo a las secciones de derivación, integrales y finalmente una colección de comandos del Software Mathematica incluyendo programación que puede ayudar mucho cuando se necesite ejecutar algún comando para encontrar soluciones a problemas, además también sirve de soporte cuando se desee desarrollar alguna función o pequeños programas en la parte práctica.

INDICE

Texto Guía para Matemática III

INTRODUCCION

La realización del “Texto guía para la enseñanza de las asignaturas de Matemática I y Matemática III” pretende servir como soporte o apoyo a la nueva metodología del plan de estudio de la carrera de Ingeniería en Computación en la búsqueda de nuevas alternativas que mejoren el método tradicional de impartir las clases, haciendo uso de avances tecnológicos como las computadoras y el Software Mathematica.

Este material didáctico vendrá a facilitar al estudiante la comprensión de los diferentes temas impartidos en la clase, auxiliándose del uso de la computadora y del software Mathematica versión 2.0 como herramienta. El texto sigue paso a paso el programa analítico de la clase, presentando teoría básica elemental por tema acompañada de una serie de ejemplos explicativos que consisten tanto de ejemplos sencillos como de ejemplos que involucren análisis computacional (Aplicaciones computarizadas), al igual se presenta una variedad de ejercicios para que sean desarrollados por los estudiantes durante las clases prácticas y los laboratorios.

También se presentan propuestas de proyectos por unidad, para que los estudiantes apliquen los conocimientos adquiridos a través del análisis.

Características Didácticas

- Cada unidad inicia con su tabla de contenido, seguida por el desarrollo del mismo, presentando conceptos, demostraciones, gráficas, ejemplos, uso del software Mathematica, ejercicios y proyectos propuestos.
- La mayoría de los temas mas extensos van subdivididos en subtemas para facilitar su estudio.
- Todos los ejemplos se encuentran en color azul, negrita y enumerados de acuerdo a cada tema, esto es con el fin de diferenciarlos del resto del texto y así facilitar su referencia.
- Las definiciones y teoremas van encerrados en un recuadro y con un color de fondo.
- Los temas van encerrados en un recuadro de color e indicados por medio de encabezados en negrita y enumerados de acuerdo a cada unidad, la letra tiene un tamaño considerable para una mejor apariencia del texto.
- En todo el trabajo se presentan gráficas para ilustrar algunos ejemplos que lo ameriten, encerrados en un recuadro y enumerados por tema.
- La parte de programación va en color, negrita para distinguirlo del resto del texto.
- Se incluye una sección para proyectos, y para aquellas unidades que se relacionen se incluye un sólo proyecto.

OBJETIVOS

1. Contribuir en al aprendizaje de la clase Matemática I y III. Desarrollando un texto guía que el estudiante pueda utilizar durante todo el curso.

2. Brindar al estudiante la posibilidad de tener a su alcance de forma rápida y sencilla información dotada de ejemplos y ejercicios prácticos que le permitan comprender mejor la clase auxiliándose de una computadora.

3. Ayudar a promover el interés en el conocimiento de conceptos matemáticos y herramientas computacionales que puedan ser utilizados en la construcción de futuras aplicaciones orientadas al análisis matemático computacional.

4. Tratar de conseguir que los estudiantes consoliden sus conocimientos de programación utilizando el software “Mathematica”.

JUSTIFICACIÓN

Actualmente el Departamento de Lenguajes y Simulación no cuenta con un texto de apoyo que se adapte a la nueva metodología aplicada en la enseñanza de las asignaturas de Matemática I y III por esta razón surgió la idea de crear este texto monográfico, el cual será usado por el instructor para auxiliarse y como guía para las clases prácticas y los laboratorios. También para facilitarle al estudiante la comprensión de los conceptos matemáticos, ya que la metodología esta orientada a potenciar el trabajo del estudiante mediante la solución de problemas y la practica con el software Mathematica, a través del cual el estudiante podrá familiarizarse con la computadora y le ayudará a despertar su interés en el uso de ésta como herramienta, y resolver los problemas planteados.

Matemática I

Introducción

El conocimiento del Cálculo es importante para resolver problemas a través del análisis, problemas que involucran cambios, límites, movimiento, etc. Haciendo un poco de historia, el Cálculo es una disciplina matemática que surge en el siglo XVII de las investigaciones de Isacc Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). La mayoría de los descubrimientos científicos que han contribuido a la configuración de nuestra civilización durante los tres siglos pasados, habrían sido imposibles sin el uso del Cálculo, y hasta hoy continúa prestando un servicio muy importante a la ciencia y tecnología.

Actualmente hay otros elementos que pueden contribuir a nuestro estudio sobre el Cálculo, son las computadoras y el software que hoy día pueden realizar muchas manipulaciones numéricas, algebraicas y gráficas que son el foco de un curso tradicional de Cálculo. Nosotros podemos emplear estas herramientas para ayudarnos a resolver problemas que involucran procesos y datos complicados, exactamente la clase de problemas que encontramos en el mundo real.

Por tanto este texto, la computadora y el instructor son recursos importantes que nos pueden ayudar a conocer el Cálculo y el arte de resolver problemas.

1 Primera Unidad
Funciones y Relaciones

Contenido

1.1 Variables y datos.

La clave del análisis matemático de una situación geométrica o científica, con frecuencia consiste en reconocer una relación entre las variables que describen la situación, y para esto se requiere la clasificación, organización e interpretación de los datos.

Qué significado tiene el término "variable" en este contexto?

Podemos decir que son cantidades susceptibles o elementos arbitrarios que tienden a tomar datos o valores diferentes dentro de una determinada situación y que a veces suelen ser la causa_efecto sobre otra variable. Por ejemplo **x** = clase, **y** = nota.

Pero qué es una relación?

Lo sabremos a continuación.

1.2 Relaciones y sus gráficos.

La palabra **relación** implica alguna clase de correspondencia, o conexión, entre dos variables que intervienen en una determinada situación. A veces esta conexión puede depender del tiempo o a veces puede estar determinada por una causa_efecto específica.

Podemos entonces establecer los valores de las variables como los elementos de dos conjuntos de números reales, donde los elementos de uno de los conjuntos son representados por una variable y los elementos del otro conjunto son representados por otra variable.

Ejemplo#1

Analicemos la siguiente tabla#1.2.1.

Tabla # 1.2.1 Café. Evolución de la producción en Nicaragua.

Evolución de la producción				Evolución de las exportaciones		
Período	Área (mls mz)	Rend. (qq/mz)	Producc. (mls qq)	Volumen (mls qq)	Valor (mls US$)	Precio P. US$/qq
1985/1986	121.40	6.3	768.4	739.7	117.1	158.3
1986/1987	110.1	8.6	942.0	803.4	114.8	142.9
1987/1988	103.0	8.2	839.7	698.6	83.8	120.0
1988/1989	102.1	9.3	944.5	737.9	90.2	122.2
1989/1990	99.2	9.9	981.9	799.9	67.9	84.5
1990/1991	100.0	6.0	601.0	504.2	41.0	82.6
1991/1992	106.5	8.9	948.2	764.0	68.7	90.0
1992/1993	107.1	9.1	974.0	828.5	74.6	90.0
1993/1994	97.5	10.8	1,056.3	897.8	80.8	90.0
1994/1995	110.0	11.0	1,279.3	1,087.4	97.9	90.0
1995/1996	130.0	12.0	1,666.5	1,415.6	127.4	90.5
1996/1997	140.0	15.2	2,122.5	1,804.1	162.4	90.5

Fuente : *Tomado del Informe "Estrategia Agropecuaria Forestal y Agroindustrial de Nicaragua".*

La tabla#1.2.1 muestra la evolución de la producción y de las exportaciones del cultivo del café en el período de 1985/1997 en nuestro país.

Tratemos de responder las siguientes preguntas:

a) Ha evolucionado la producción de café con respecto al tiempo?. Será ésta una relación de causa_efecto?.

b) Un aumento en la producción indica un aumento en el rendimiento?. Será ésta una relación de causa_efecto.

c) Podría afirmarse que cada vez que hay un incremento en el volumen de las exportaciones en un período, hay también un incremento en el precio por qq de café?.

Hay dos maneras de identificar o determinar si hay relación entre dos variables o conjuntos de datos. La primera es con una regla de correspondencia establecida por una fórmula o ecuación, y la otra es analizando pares ordenados de datos, donde cada par consiste de un valor de la primera variable y un correspondiente valor de la segunda variable.

Solución:

Cada análisis requiere de la relación entre dos variables.

a) En el primer caso las dos variables son:

x = El tiempo
y = La producción

Analicemos ahora la relación propuesta entre estas dos variables, para esto interpretemos los datos y formemos pares ordenados **(x, y)**.

Los valores para ***x*** y para ***y*** en el período 1985/1990 son:

x	y
1985/1986	768.4
1986/1987	942.0
1987/1988	839.7
1988/1989	944.5
1989/1990	981.9
...	...

Según los valores de ***x*** y ***y*** para este período, la producción aumenta en la mayoría de los casos y tiende a disminuir muy pocas veces con respecto al tiempo.

En el período 1990/1997 la relación entre el tiempo y la producción es igual que en el período anterior. Podemos entonces decir que el comportamiento de la producción se da en el tiempo, pero no es la causa de su decrecimiento o crecimiento. Por tanto la relación propuesta es una relación de tiempo no de causa_efecto.

b) En el segundo caso las variables son:

x = Producción
y = Rendimiento

Analicemos ahora la relación propuesta entre ellas para esto interpretemos los datos y formemos pares ordenados:

x	y
768.4	6.3
942.0	8.6
839.7	8.2
944.5	9.3
981.9	9.9
...	...

Como podemos observar, un incremento en la producción causa un incremento en el rendimiento, ya que el rendimiento no es más que la producción por manzana de tierra sembrada. Por lo tanto la relación es una relación de causa_efecto.

c) En el tercer caso las variables son:

x = Volumen
y = Precio/ qq

Analicemos algunos pares ordenados de datos en la tabla. En 1988/1989 el volumen fue de 737.9 (msl,qq) y el precio fue de 122.2 us.qq es decir:

x = 737.9
y = 122.2

En 1989/1990 **x** = 799.9 y **y** = 84.5 como vemos el volumen fue mayor pero el precio disminuyó.

En 1991/1997 el volumen aumentó pero el precio permaneció constante. Por tanto tal relación no existe, ya que el precio del café esta determinado por otras regulaciones.

PROGRAMACION

Utilizando una computadora y el Sw. Mathematica podemos comprobar la relación:

Rendimiento = Producción / Area

Utilizar los datos de la tabla #1.2.1.

Si en el período 1985/1986 el área sembrada fue de 121.40 mz y la producción fue de 768.4.

Cuál es el rendimiento?

La función es:

```
CalRend[Area_,Produc_]:= Module[{Rend = 0.0},
                          Rend = N[(Produc/Area),4];
                          Print[StringForm["El Rendimiento es: ``",Rend]]]
```

Llamado de la función CalRend

CalRend[121.40,768.4]
El Rendimiento es: 6.32

Podemos observar que el resultado de la función coincide con el dato de la tabla para este período. Por tanto podemos decir que la relación es válida.

Gráficos de Relaciones:

Una forma de mostrar la relación entre variables, es a través de un plano de coordenadas. Este es un gráfico en un sistema de coordenadas rectangulares de todos los pares de datos.

Ejemplo#3

Representar con un gráfico la relación Tiempo_Producción.

Solución:

Primero ubiquemos algunos de los pares ordenados de datos en el plano de coordenadas **(x,y)** de la figura#1.2.1, etiquetando los ejes con la información de la relación.

Segundo, unamos los puntos siguiendo el orden de ubicación, y tendremos el gráfico de la figura#1.2.2 que representa la relación.

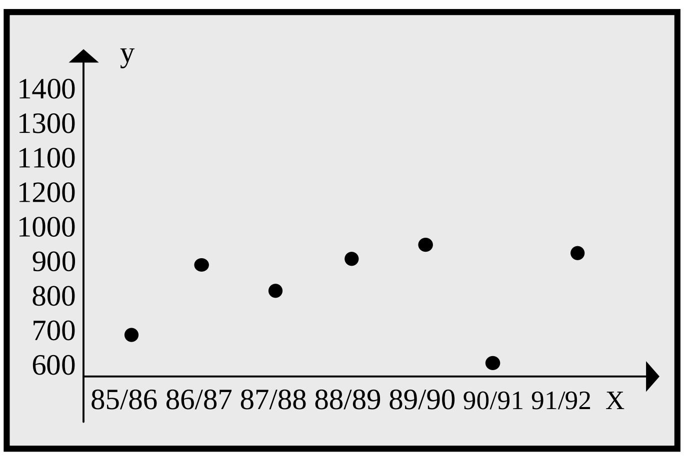
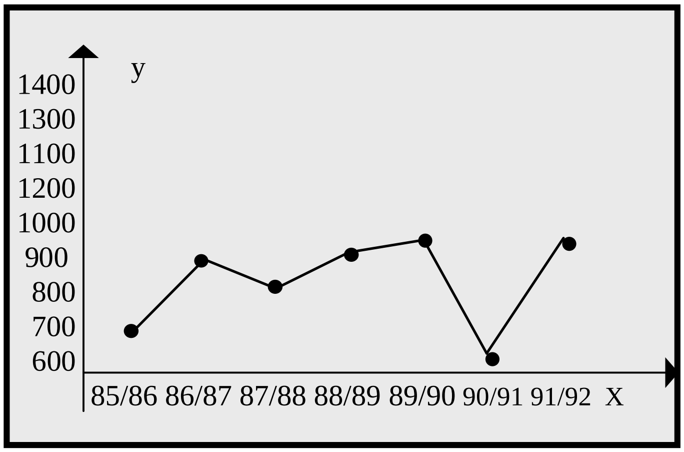


Figura #1.2.1.



Figura#1.2.2.

1.3 Dominio y Rango de una Relación.

El comportamiento de una relación puede ser más claro si conocemos su dominio y rango.

Una relación puede ser expresada por una ecuación. Si ***x*** y ***y*** son las variables, entonces los posibles valores que ***x*** puede asumir constituyen el dominio, y los valores tomados por ***y*** constituyen el rango.

En cualquier relación definida por una ecuación, cada elemento del rango es determinado por los elementos asociados al dominio. Es decir, el valor de un elemento del Rango ***y*** depende del valor de un elemento del Dominio ***x***.

Definición:

El Dominio de una relación es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados de la relación, y el Rango es el conjunto de todos los segundos elementos de los pares ordenados.

La variable usada para representar los elementos del rango de una relación es llamada **variable dependiente.** La variable usada para representar los elementos del dominio es llamada **variable independiente.**

Ejemplo#1

Retomando la relación Tiempo_Producción del ejemplo de la evolución del café, podemos:

a) Listar parte de su dominio y rango.
b) Determinar la variable independiente y dependiente.

Solución:

Relación:

{(1985/1986, 768), (1986/1987, 942.0), (1987/1988, 839.7), (1988/1989, 944.5), (1989/1990, 981.9)}

Solución (a):

El dominio es el conjunto de los primeros elementos de los pares ordenados de la relación:

{1985/1986, 1986/1987, 1987/1988, 1988/1989, 1989/1990}

El rango es el conjunto de los segundos elementos:

{768.4, 942.0, 839.7, 944.5, 981.9}

Solución (b):

En el análisis de esta relación se determinaron las variables:
x: tiempo y **y: Producción**, vimos que ***y*** aumenta o decrece con respecto a x_1 por tanto ***x* es la variable independiente** y ***y* es la variable dependiente**.

Ejemplo#2

Encuentre el dominio de la relación y =3x + 5

Solución:

Por la propiedad de clausura, de adición y multiplicación para algún número real ***x***, 3x y 3x+5 son números reales. Así, el dominio es el conjunto de los números reales.

Ejemplo#3

Encuentre el dominio de la relación y = $\sqrt{x+5}$

Solución :

El radical de una raíz cuadrada produce un número real sí y solo sí el radicando es un número positivo.

x + 5 >= 0 conjunto de los radicales >= 0
x >= -5 agregando -5 en ambas partes.
Así, el dominio es todo x, tal que x >= -5

Ejemplo#4

Encuentre el dominio de la relación y = x / (x^2 - 9)

Solución:

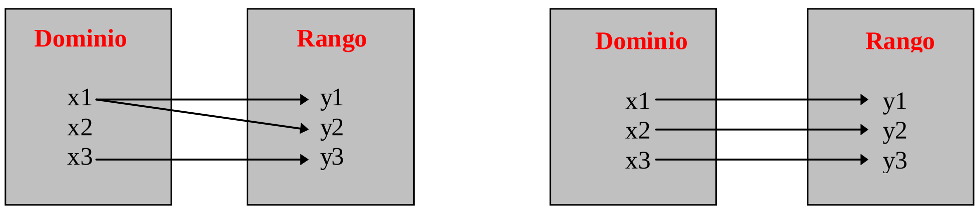
La expresión racional es definida por todos los números reales, excepto los valores que hacen al denominador igual a 0.

$x^2 - 9 = 0$ denominador igual a 0.
$(x+3)(x-3)$ $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
$x= -3$ o $x=3$ restric. de valores de x.
Así, el dominio es toda x, tal que x es diferente 3 o -3

1.4 Funciones y notación f(x).

En algunas relaciones el valor de la variable independiente es único para la variable dependiente, en estos casos la relación es llamada **función**.

Una relación puede emparejar cada elemento del dominio con uno o más elementos del rango como se puede observar en la figura#1.4.1(a). Pero a diferencia también vemos en la figura#1.4.1(b) una relación en la cual cada elemento del dominio es emparejado con sólo un elemento del rango.



(a) Figura#1.4.1. (b)

> **Definición de función:**
>
> **Una función es una relación en la cual cada elemento del dominio es emparejado exactamente con un elemento del rango.**

Las letras tales como **f, g y h** son usadas muchas veces para simbolizar funciones.

Una función en la cual ***y*** es escrita en términos de ***x***, la variable ***y*** puede ser reemplazada por **f(x)**.

> **Definición de f(x):**
>
> **Si f es una función y *x* es un elemento del dominio de f, entonces f(x), la cual es leída "f de x", es el elemento correspondiente al rango de f.**

Ejemplo#1

Tabla # 1.4.1.
Datos de "Caída de los Cuerpos "

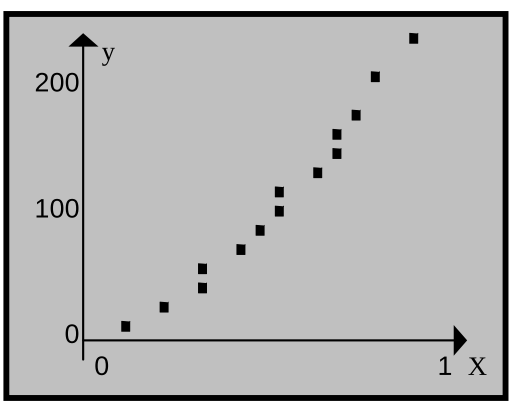
Tiempo (Seg)	Distancia (cm)
0.16	12.1
0.24	29.8
0.25	32.7
0.30	42.8
0.30	44.2
0.32	55.8
0.36	63.5
0.36	65.1
0.50	124.6
0.50	129.7
0.57	150.2

Los datos en la tabla#1.4.1 fueron reunidos por un equipo de dos estudiantes en un laboratorio físico; cada uno usando un detector de movimiento para medir en un rango aproximado de tiempo la distancia que recorre un objeto al caer. Los tiempos que aparecen dos veces en la tabla fueron seleccionados por ambos estudiantes.

a). Existe relación entre el tiempo y la distancia para un objeto cayendo en un campo gravitacional?. Justificar la respuesta.
b). Determinar la variable independiente y dependiente.
c). Será esta relación una función?.

Solución:

El gráfico de la relación aparece en la figura#1.4.2.



Figura#1.4.2.

(a) Analizando los pares de datos de la tabla#1.4.1 y los puntos de la gráfica de la figura#1.4.2, en cada instante hay una distancia definida que el objeto recorre al caer, la cual puede ser medida si deseamos. De esta forma la distancia de caída es una relación de tiempo aunque el medir con cronómetro no es precisamente la causa de caída o de la ocurrencia de una distancia en particular.

(b) Si lo que estamos midiendo es la distancia que recorre el objeto al caer en un tiempo dado podemos decir que la distancia que el objeto recorre depende del tiempo, así que:

x : La variable independiente es el tiempo.
y: La variable dependiente es la distancia de caída.

(c) El resultado de aplicar la función física de la distancia de caída es diferente a los datos reportados en la tabla en dos aspectos. Primero, solamente hay que tomar un número finito de puntos de datos, la tabla muestra que durante el experimento no se pudo tomar una medida exacta en cada tiempo durante la caída, a causa de los cambios continuos de tiempo.

Segundo, porque fueron dos experimentos, y se escogieron algunos tiempos en común que no determinan distancias únicas. En la tabla y la gráfica se puede ver que hay tiempos iguales que son emparejados con distancias diferentes. Así, en este caso los datos describen una relación **que no es una función**, aunque se aproxima.

Ejemplo#2

Consideremos la relación entre el costo de una piza y su diámetro.

(a) Identificar la variable independiente y dependiente.
(b) Determinar si la relación es o no una función.

Solución:

Condición: **El precio de venta de una piza no esta determinado sólo por su diámetro, sino también por los ingredientes (tipo); es por esto que hay pizas que tienen el mismo diámetro y precios de venta diferentes, pero en este caso vamos hacer una excepción. Cuando hablemos de piza, vamos a ser referencia a un tipo de piza específico (con los mismos ingredientes).**

(a) Según los precios de venta de las pizas, cuanto mayor es el diámetro de ésta, mayor es su precio.

De esta relación podemos establecer dos variables:

x: diámetro de la piza,
y: el costo o precio de venta de la piza,

donde **y** depende de **x**, así, la variable independiente es **x** y **y** es la variable dependiente.

(b) Para que una relación sea una función el valor de la variable independiente debe ser único para la variable dependiente, será posible que pizas de igual diámetro tengan precios diferentes?, no **por tanto la relación es una función**.

Ejemplo#3

Determine si cada relación definida por una ecuación dada es o no una función, donde x y y son números reales.

a). $y = \sqrt{x}$ **b).** $y = \dfrac{x+5}{2x}$ **donde x es diferente de 0.**

Solución:

a). Para ***x*** diferente de 0, se obtienen dos elementos de ***y***.
Por ejemplo si x=9, entonces y=3 o -3. Así, la relación no es una función.

b). Para ***x*** diferente de 0, un y solamente un valor de ***y*** es obtenido. Así que la relación es una función.

Ejemplo#4

Escribir las siguientes ecuaciones usando la notación f(x).

d) $y = 2x^2 + x - 3$

e) $y = \sqrt{16 - x^2}$

f) $y = x / (2x - 1)$

Solución:

d) $f(x) = 2x^2 + x - 3$

e) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

f) $f(x) = x / (2x - 1)$

PROGRAMACION

Usando la computadora y el Sw. Mathematica podemos programar una función para implementar el siguiente ejercicio:

Encuentre una función f(x) que describa la condición: El interés simple de un principal de $ 5,000 con intereses anuales a razón de %16.2 por ***x*** años.

Solución:

$f(x) = 5000(16.2)x / 100$
$f(x) = 810x$

```
CalInteres[X_]:= Module[{InteX=0.0},
                        InteX= 810*X;
                        Print[StringForm["El interés es: ``",InteX]]]
```

Llamado a la función CalInteres[]

```
CalInteres[1];   (* Para x = 1 *)
El interés es: 810
```

1.5 Gráficos de funciones.

Cuando ambos, el dominio y el rango de una función constan de números reales, podemos representar la función dibujando su gráfica en un plano coordenado. Y la gráfica de la función **f** no es más que la gráfica de la ecuación **y = f(x).**

Ejemplo #1

Dibujar las gráficas de:

(a) f(x) = x^2 - 4
(b) f(x) = x^3 - x
(c) f(x) = 2 / (x - 1)

Soluciones:

Ejemplo (a)

El Dominio de f(x) son los números reales (R).
El Rango de f(x) son los números reales >= -4

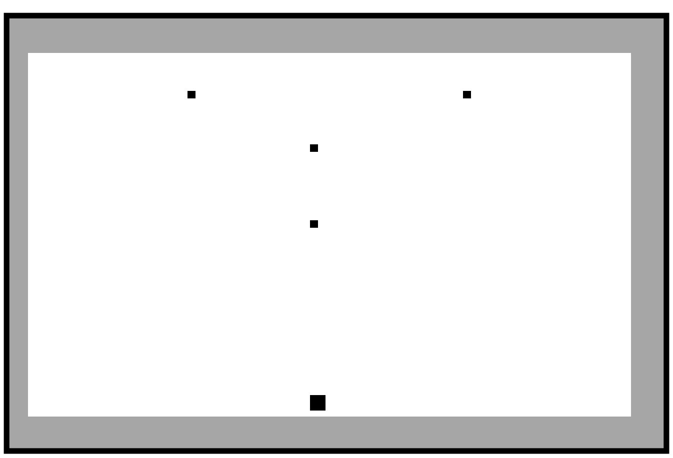
Construyendo la tabla de valores:

x	-2	-1.5	-1	0	1	1.5	2
y	0	-1.75	-3	-4	-3	-1.75	0

Podemos utilizar el Sw. Mathematica para hacer la gráfica usando el comando **Plot**.
La sintaxis es:

Plot[Función,{variable,Xmínima,Xmáxima}].

Aplicamos el comando y obtenemos la gráfica de la figura#1.5.1:
Plot[X^2 - 4,{X,-2,2}];



Figura#1.5.1.

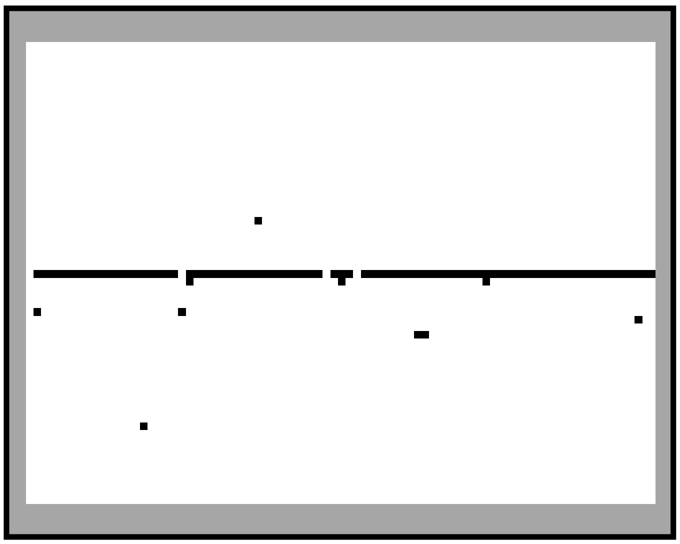
Ejemplo (b)

El Dominio de f(x) son los números reales (R).
El Rango de f(x) son los números reales (R).
Construyendo la tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	0	0	0	6

Aquí también podemos utilizar el sw Mathematica.
Aplicamos el comando Plot y obtenemos la gráfica de la figura#1.5.2 siguiente.

Plot[X^3 - X,{X,-2,2}];



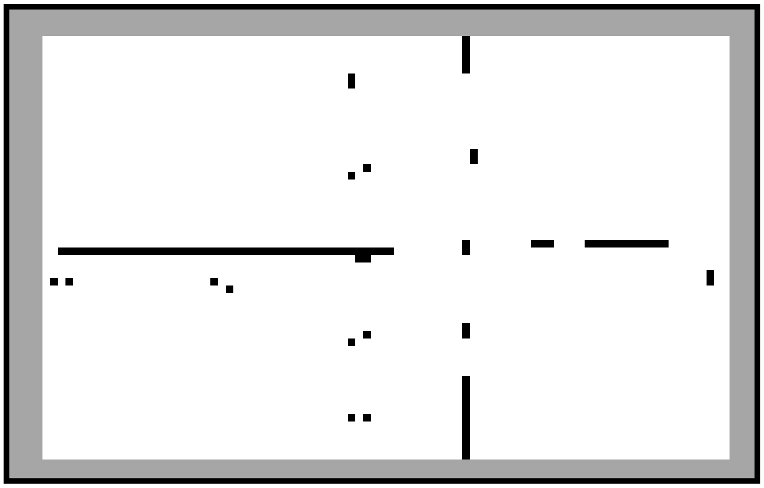
Figura#1.5.2.

Ejemplo (c)
El Dominio de f(x) son los números reales excluyendo el 1.
El Rango de f(x) son los números reales excluyendo el 0.

Igual que en los ejemplos anteriores aplicamos el comando Plot del sw Mathematica.

La gráfica es la que aparece en la figura#1.5.3.

Plot[2/(X-1),{X,-4,4}];



Figura#1.5.3.

1.5.1 Identificación de funciones por medio de gráficos.

Es cierto que, muchos gráficos (no todos) son justamente representaciones de funciones. Así, si desde el inicio se imagina en la mente el gráfico, será más fácil tener una imagen mental de la función. La parte central será conectar la imagen geométrica con las propiedades algebraicas de las funciones. Hay que mantener en la mente las características que separan las funciones de las relaciones en general; el hecho de que cada primer coordenada es emparejada exactamente con una segunda coordenada, es una propiedad que puede ser usada como característica para decidir si un gráfico en particular es o no una representación de una función.

Existe una prueba gráfica, que puede ayudar mucho a identificar una función, es la **"Prueba de la Línea Vertical"**.

Prueba de la Línea Vertical:

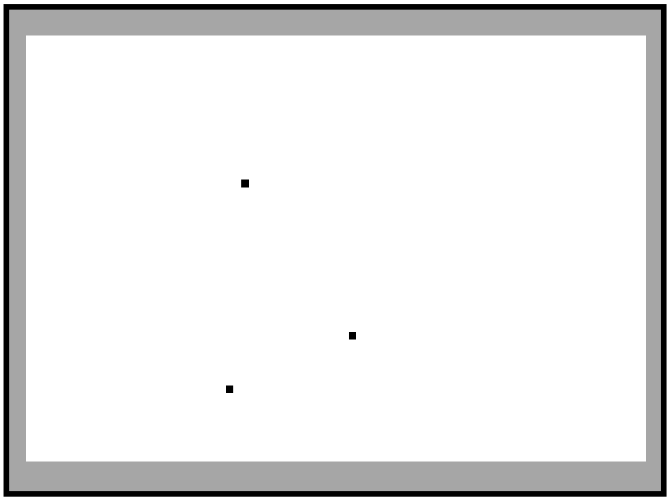
Al dibujar una línea paralela al eje *y* en el mismo conjunto de ejes del gráfico de una función, esta debe intersectar al gráfico solamente en un punto.

Ejemplo#2

Para cada una de las gráficas, hechas con el Sw. Mathematica, decidir si el gráfico es o no el gráfico de una función. Fundamentar la respuesta.

********Gráfico # 1**

Plot[2-2x,{x,-1,2}];



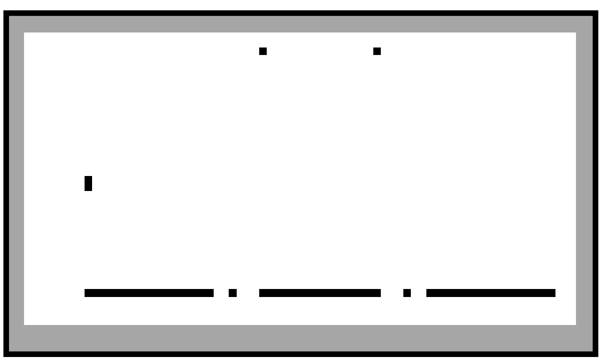
Figura#1.5.4.

Solución:

La figura#1.5.4 representa el gráfico de una función, porque al trazar una línea vertical en el plano ésta intersecta al gráfico exactamente en un punto.

***********Gráfico #2**

Show[Graphics[Circle[{2,2},{1,1}]],Axes->True, AspectRatio->0.5];



Figura#1.5.5.

Solución:

El gráfico de la figura#1.5.5 no representa una función, porque al trazar una línea vertical en el plano ésta intersecta la figura en dos punto.

Aquí, como se pudo observar se usaron otros comandos del sw para gráficar la figura#1.5.5, estos fueron:

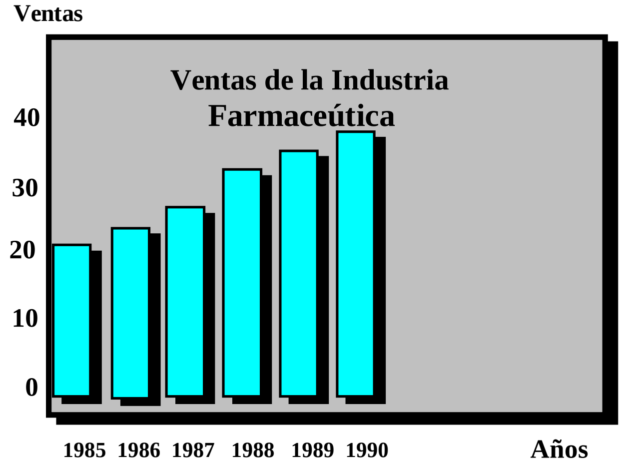
- El comando Show, utilizado para mostrar la figura gráfica.
- El comando Circle, que dibuja la elipse(figura gráfica).

1.6 Funciones como Modelos Matemáticos.

Cuando una relación entre cantidades variantes es sugerida por un gráfico, y se desea describir matemáticamente, se describe la relación encontrando una ecuación que reúna la manera en que dos variables están relacionadas; tal que una ecuación es un **"Modelo Matemático".**

Un buen modelo simplifica el fenómeno representado y da la habilidad para predecir. Si se puede encontrar una ecuación de una línea o curva que de entrada a un plano de coordenadas, podemos concentrarnos en las características importantes de la relación entre las variables. Podemos también usar esta ecuación para predecir los valores de una variable para especificar valores de otra variable.

Ejemplo #1

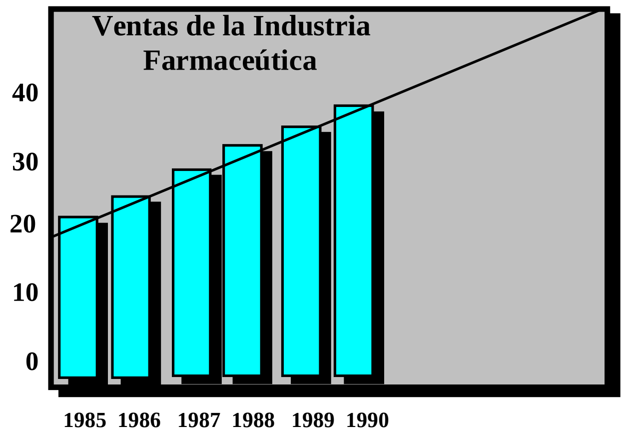


Figura#1.6.1.

a). En la figura#1.6.1 dibuje una línea recta ya sea desde la esquina superior derecha de la barra 1985, hasta la esquina superior derecha de la barra 1990 pueden tomarse las esquinas superiores izquierdas.

Solución:

La gráfica resultante aparece en la figura#1.6.2.



Figura#1.6.2.

b). Encuentre la ecuación para la recta de la forma y = mx + b, donde ***x*** representa los años y ***y*** representa las ventas.

Solución :

Dado que la ecuación **y = mx+b** define la ecuación de la recta con pendiente $\mathbf{m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}$

Tomamos dos puntos de la recta (1986,25) y (1989,35) los introducimos en la ecuación y obtenemos la pendiente :

$$m = \frac{35 - 25}{1989 - 1986}, \quad m = \frac{10}{3}$$

Ahora que ya se tiene la pendiente sólo sustituimos valores en la ecuación **y = mx + b** y obtenemos la ecuación de la recta de la figura#1.6.2:

$$y - 25 = \frac{10}{3}(x - 1986)$$

$$y = \frac{10}{3}x - 6595$$ **Ecuación de la recta**.

c). Use la ecuación para estimar las ventas en los años 1986, 1987, 1988 y 1989 y compare con el modelo estimado en la figura#1.6.2.

Solución:

Para 1986
sustituyendo valores en la ecuación:

$$y = \frac{10}{3}(1986) - 6595$$

y = 25 (ventas para 1986)
Para 1987

sustituyendo valores en la ecuación:

$y = \frac{10}{3}(1987) - 6595$

y = 28.333 (ventas para 1987)

Para 1988
sustituyendo valores en la ecuación:

$y = \frac{10}{3}(1988) - 6595$

y = 31.66 (ventas para 1988)

Para 1989
sustituyendo valores en la ecuación:

$y = \frac{10}{3}(1989) - 6595$

y = 35 (ventas para 1989)

d). Use la ecuación para estimar las ventas en 1991.

Solución:

sustituyendo valores en la ecuación:
y = 10/3(1991) - 6595
y = 41.66 (ventas para 1991)

Ejemplo#2

Una planta tiene capacidad para producir de 0 a 100 refrigeradores diarios. Los gastos generales fijos de la planta son de $2200 y el costo directo (material y mano de obra) para producir un refrigerador es de $151. Escriba una fórmula para T(x) el costo total de producir *x* refrigeradores al día y también el costo unitario U(x) (costo medio por refrigerador). Cuáles son los dominios de estas funciones?.

Solución:
Analizando los datos podemos establecer lo siguiente:

El costo total de producir *x* refrigeradores al día es :

T(x) = 151 x + 2200 Dominio los Números Reales de 1 a 100

El costo unitario es:
U(x) = (151 x + 2200) / x Dominio los Números Reales de 1 a 100

PROGRAMACION

Utilicemos el sw Mathematica para crear una pequeña función para implementar las operaciones del modelo matemático del ejemplo # 1.

(b) y = m(x)+b donde y1 - yo = m(x1-xo) y m =(y1 - yo) /(x1 - xo)
los puntos son (xo,yo)=(1986,25), (x1,y1)=(1989,35)

La función Calpend calcula la pendiente.

```
Calpend:=Module[{M,Xo,X1,Yo,Y1},
Xo=1986;
Yo=25;
X1=1989;
Y1=35;
M=(Y1-Yo)/(X1-Xo);
Return[M];]
```

La función Ventas calcula y predice las ventas para un año dado.

```
Ventas[X_] := Module[{Y},
Y=N[(Calpend*X)-6595];
Print["Ventas : "];
Print["La predicción de las ventas para : ",X," es ",Y];]
```

LLamados de la función Ventas:

Ventas[1986];
La predicción de las ventas para : 1986 es 25.

Ventas[1991];
La predicción de las ventas para : 1991 es 41.6667

1.7 Funciones como objeto: Aditiva, Multiplicativa, Simétrica par e impar.

El objeto de interpretar la función es importante dado que en algún momento podría ser la respuesta a nuestras preguntas, la solución a nuestros problemas y frecuentemente ser la entrada a otras funciones o colección de funciones.

1.7.1. Función Aditiva.

El orden de discusión de las propiedades algebraicas de los objetos llamados funciones se iniciará con el estudio de la función aditiva.

Definición:

Una función es llamada aditiva si la suma de las dos entradas es la suma de las correspondientes salidas.

En símbolos una función f es aditiva si $f(a+b) = f(a) + f(b)$ para cada par de números a y b en el dominio.

Ejemplo #1

Considere la función cuya regla es “multiplicar por 5”.
En símbolo, la función es:

f(x) = 5x , demostrar que la f(x) es una función aditiva.

Solución:

Aplicando la definición a f(x) = 5x podemos decir que :

f(a+b) = f(a)+f(b) para a= 2 y b=3 en el dominio será :

f(5) = f(2) + f(3) donde f(5) = 25 y f(2)+ f(3) = 25

Por lo tanto f(x) = 5x es una función aditiva.

Ejemplo#2

Para cada una de las funciones siguientes, demostrar si la función es o no aditiva:

a). f(x) = -2x

Solución:

Para a = 6 y b = 7
f(13) = f(6) + f(7)
donde f(13) = - 26
y f(6) + f(7) = - 26 por lo tanto f(x) es aditiva

b). f(x) = -2x + 7

Solución:

Para a = 5 y b = 3
f(8) = f(5) + f(3)
donde f(8) = -7
y f(5) + f(3) = -2 por lo tanto f(x) no es aditiva

c). f(x) = x^2

d). f x) = $\sqrt{x}$

f). f(x) = log x

g). f(x) = 2/x

PROGRAMACION

La siguiente es una pequeña función para investigar si una función es Aditiva, recibe la función, la variable y los valores a evaluar.

```
FuncAditiva[F_,X_,A_,B_]:=Module[{Suma,Rsuma,Sum1,Sum2,Rsum1y2},
Suma=A+B;
Rsuma=N[F /.X->Suma,4];
Sum1=N[F /.X->A,4];
Sum2=N[F /.X->B,4];
Rsum1y2=N[Sum1+Sum2,4];
Print[StringForm[" f ( `` ) =  ``", Suma,Rsuma]];
Print[StringForm[" f ( `` ) + f ( `` ) =  ``", A,B,Rsum1y2]];
If [Rsuma==Rsum1y2,Print["La función" ,F," es Aditiva"],Print["La Función ",F, " no es Aditiva"]];]
```

LLAMADOS de la FuncAditiva

FuncAditiva[-2X,X,8,2]
f (10) = -20.
f (8) + f (2) = -20.
La función -2X es aditiva

FuncAditiva[-2X+7,X,8,2]
f (10) = -13.
f (8) + f (2) = -6.
La Función -2X+7 no es Aditiva

FuncAditiva[X^2,X,8,2]
f (10) = 100.
f (8) + f (2) = 68.
La Función X^2 no es Aditiva

FuncAditiva[Sqrt[X],X,8,2]
f (10) = 3.162
f (8) + f (2) = 4.243
La Función Sqrt[X]no es Aditiva

FuncAditiva[Log[X],X,8,2];
f (10) = 2.303
f (8) + f (2) = 2.773
La Función Log[X] no es Aditiva

FuncAditiva[2/X,X,8,2];
f (10) = 0.2
f (8) + f (2) = 1.25
La Función 2/X no es Aditiva

1.7.2. Función Multiplicativa.

Definición:

Una función es llamada multiplicativa si satisface la ecuación funcional.
f(ab)=f(a) . f(b)

Ejemplo#3

Para cada una las siguientes funciones, demostrar si la función es o no multiplicativa.

a). f(x)= -2x

solución:

Aplicando la definición f(ab)=f(a)f(b)
Para a=8 y b= 2
f(16) = -32
f(8)f(2) = -20
Por tanto f(x) no es multiplicativa

b). f(x)= -2x+7

solución:

Para a=8 y b=2
f(16)= -25
f(8)f(2) = -27
Por tanto f(x) no es multiplicativa

c). f(x) = x^2

d). f(x) = $\sqrt{x}$

f). f(x) = log x

g). f(x) = 2/x

PROGRAMACION

La siguiente es una pequeña función para investigar si una función es Multiplicativa, recibe la función, la variable y los valores a evaluar.

```
FuncMultip[F_,X_,A_,B_]:=Module[{Prod,Rprod,Prod1,Prod2,Rprod1y2},
Prod=A*B;
Rprod=N[F /.X->Prod,4];
Prod1=N[F /.X->A,4];
Prod2=N[F /.X->B,4];
Rprod1y2=N[Prod1*Prod2,4];
Print[StringForm[" f ( `` ) =  ``", Prod,Rprod]];
Print[StringForm[" f ( `` ) * f ( `` ) =  ``", A,B,Rprod1y2]];
If [Parte1==Parte2,Print["La función ",F, " es Multiplicativa"],
Print["La Función ",F, " no es Multiplicativa"]];]
```

LLAMADOS de la FuncMultip

```
FuncMultip[-2X,X,8,2]
 f ( 16 ) =  -32.
 f ( 8 ) * f ( 2 ) =  64.
La Función -2X no es Multiplicativa
```

```
FuncMultip[-2X+7,X,8,2]
 f ( 16 ) =  -25.
 f ( 8 ) * f ( 2 ) =  -27.
La Función -2X+7 no es Multiplicativa
```

FuncMultip[X^2,X,8,2]
f (16) = 256.
f (8) * f (2) = 256.
La función X^2 es Multiplicativa

```
FuncMultip[Log[X],X,8,2];
 f ( 16 ) =  2.773
 f ( 8 ) * f ( 2 ) =  1.441
La Función Log[X] no es Multiplicativa
```

FuncMultip[Sqrt[X],X,8,2]
f (16) = 4.
f (8) * f (2) = 4.
La función Sqrt[X] es Multiplicativa

FuncMultip[2/X,X,8,2]
f (16) = 0.125
f (8) * f (2) = 0.25
La Función 2/X no es Multiplicativa

1.7.3 Función: Simétrica, par e impar.

Otras ecuaciones funcionales importantes, son las que describen simetrías.

Definición:

Una función tiene simetría par (o es una "función par") si satisface la ecuación funcional f(-a)=f(a).

Por ejemplo la función $f(x) = x^2$ tiene esta simetría, porque
$$f(-a) = (-a)^2 = a^2 = f(a).$$

Similarmente una función tiene simetría impar (o es una " función impar") si satisface la ecuación f(-a)= -f(a) por ejemplo f(x)=5x, tiene esta simetría, porque
$$f(-a)=5(-a)=-5a=-f(a).$$

Ejemplo#4

(a) Sea $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$. Demostrar que f es una función par.

Solución: Aplicando la definición.

$$f(-x) = 3(-x)^4 - 2(-x)^2 + 5$$
$$= 3x^4 - 2x^2 + 5$$
$$= f(x) \qquad \text{La función es par.}$$

(b) Sea $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$. Demostrar que f es una función impar.

Solución: Aplicando la definición.

$$f(-x) = 2(-x)^5 - 7(-x)^3 + 4(-x)$$
$$= -2x^5 + 7x^3 - 4x$$
$$= -(2x^5 - 7x^3 + 4x)$$
$$= -f(x) \qquad \text{La función es impar.}$$

(i) La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.
(ii) La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Ejemplo#5

Trazar la gráfica de la función f dada por f(x) = |x|

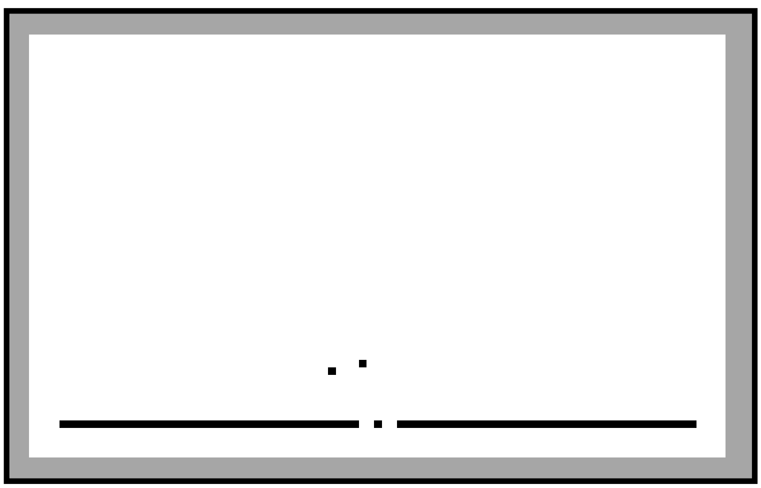
Solución:

PROGRAMACION

Tracemos la gráfica usando el comando Plot del sw Mathematica.

Plot[Abs[x],{x,-3,3}];

Obtenemos la gráfica de la figura#1.7.1.



Figura#1.7.1.

Si $x \geq 0$, entonces $f(x) = x$ y por lo tanto, la parte de la gráfica que se encuentra a la derecha del eje ***x*** es idéntica a la gráfica de $y = x$, que es una recta que pasa por el origen y tiene pendiente 1.
Si $x < 0$, entonces por definición $f(x) = |x| = -x$, y por lo tanto, la parte de la gráfica que se encuentra a izquierda del eje ***y*** es igual a la gráfica de $y = -x$. Por tanto **f** es una función par y la gráfica es simétrica con respecto al eje ***y***.

1.8 Álgebra de Funciones: Suma, resta, multiplicación, y división de funciones.

Hay, una manera natural de aplicar las operaciones de álgebra (adición, multiplicación, división, extracción de raíces, valor absoluto, y otras) en funciones objetos para producir nuevas funciones.

Las funciones suelen definirse en términos de sumas, restas, productos y cocientes de varias expresiones.

Por ejemplo:

Si h(x) = x^2 + $\sqrt{5x+1}$
puede considerarse a **h(x)** como la suma de los valores de dos funciones más simples **f** y **g** definidas por:

f(x) = x^2 y g(x) = $\sqrt{5x+1}$

La función **h** se denomina suma de **f** y **g**.

En general suponemos que **f** y **g** son dos funciones cualesquiera y sea " **I** " la intersección de sus dominios es decir, los números que ambos **f** y **g** tienen en común.

Es conveniente denotar h por el símbolo **f+g** como **f** y **g** son funciones y no números, el **+** entre **f** y **g** no significa suma de números reales, sino que sirve para indicar que el valor de **f+g** en **x** es **f(x)+g(x)**, es decir:

f+g)(x) = f(x) + g(x) para toda x en I.

La resta (o diferencia) **f - g** y el producto **f . g** de **f** y **g** se definen por:

(f-g)(x) = f(x) - g(x) y
(fg) (x) = f(x)g(x) para toda x en I.

El cociente **f / g** de **f** entre **g** está dado por:

(f / g) (x) = f(x) / g(x) con g(x) $\neq$ 0

Ejemplo#1

Sean f(x) = $\sqrt{4-x^2}$ **y g(x) = 3x +1**
Encontrar la suma, la resta, el producto, y el cociente.

Solución:

$(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + (3x + 1)$

$(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - (3x + 1)$

$(fg)(x) = (\sqrt{4 - x^2})(3x + 1)$

$(f/g)(x) = (\sqrt{4 - x^2}) / (3x + 1)$

Ejemplo#2

Para las funciones f y g dadas escribir las ecuaciones que definen.
a.) f + g b.) f-g c.) f . g d.) f / g

1. f(x) = 2x + 3 y g(x)= x - 3

Solución:

a. (f+g)(x) = 2x +3 + x - 3
a. (f+g)(x) = 3x (simplificando)

b. (f -g)(x) = 2x + 3 - (x - 3)
b. (f- g)(x) = 2x + 3 - x + 3
b. (f -g)(x) = x + 6 (simplificando)

c. (f . g)(x) = (2x + 3)(x - 3)
c. (f . g)(x) = $2x^2$ -6x +3x -9
c. (f. g)(x) = $2x^2$ -3x - 9 (simplificando)

d.(f / g)(x) = (2x + 3) / (x - 3)

2. f(x) = (x^3 - 8) / (x + 2) y g(x) = (x - 2) / (x + 2)

Solución:

a. (f+g)(x) = (x^3- 8) / (x + 2) + (x - 2) / (x + 2)
a. (f+g)(x) = (x^3 - 8 + x - 2) / (x + 2) (simplificando)
a. (f+g)(x) = (x^3 + x -10) / (x + 2)

b. (f -g)(x) = (x^3 - 8) / (x + 2) - (x - 2) / (x + 2)
b. (f -g)(x) = (x^3 - 8 - x + 2) / (x + 2) (simplificando)
b. (f -g)(x) = (x^3 - x - 6) / (x + 2)

c. (f .g)(x) = ((x^3 - 8) / (x + 2)) ((x - 2) / (x + 2))
c. (f .g)(x) = (x^3 - 8) (x - 2)/ $(x + 2)^2$ (simplificando)

d. (f / g)(x) = ((x^3 - 8) / (x + 2)) / ((x - 2) / (x + 2))
d. (f / g)(x) = (x^3 - 8) / (x - 2) (simplificando)
d. (f / g)(x) = ((x - 2)(x^2 + 2x + 4)) / (x - 2)
d. (f / g)(x) = x^2 + 2x + 4

Podemos obtener los mismos resultados usando el Sw. Mathematica.

PROGRAMACION

Usemos definición de funciones y el comando Simplify para encontrar las ecuaciones que definen la suma, resta, multiplicación o división de las funciones propuestas en el ejemplo#2.

(*Definimos las funciones*)

F[X_]:=2X+3
G[X_]:=X-3

(*Usamos Simplify para reducir la expresión resultante de la operación y obtenemos*)

Simplify[F[X]+G[X]]
3X (*resultado*)

Simplify[F[X]-G[X]]
6 + X (*resultado*)

Simplify[F[X]*G[X]]
$-9 - 3X + 2X^2$ (*resultado*)

Simplify[F[X]/G[X]]
$\frac{3+2X}{-3+X}$ (*resultado*)

F[X_]:=((X^3)-8)/(X+2) (*definición de funciones*)
G[X_]:=(X-2)/(X+2)

Simplify[F[X]+G[X]]
$\frac{-10+X+X^3}{2+X}$ (*resultado*)

Simplify[F[X]-G[X]]
$\frac{-6-X+X^3}{2+X}$ (*resultado*)

Simplify[F[X]*G[X]]

$$\frac{(-2+X)(-8+X^3)}{(2+X)^2}$$ (*resultado*)

Simplify[F[X]/G[X]]
$4 + 2\ X + X^2$ (*resultado*)

1.9 Funciones Inversas.

1.9.1 Representación de la función y su inversa.

Antes de empezar con las funciones inversas, hay que explicar lo que es una función biunívoca, ya que es un concepto base para entender la definición de las funciones inversas.

Función biunívoca:

Una función **f** puede tomar el mismo valor para distintos números de un dominio.

Por ejemplo, **si $f(x) = x^2$ entonces $f(2) = 4$ y $f(-2) = 4$, pero $2 \neq -2$.**

Si los valores de una función son siempre diferentes, entonces la función es biunívoca o (uno a uno).

Definición:

Una función f con dominio D y rango E, es una función biunívoca, si siempre que $a \neq b$ en D entonces $f(a) \neq f(b)$ en E.

Función inversa:

Definición:

Sea f una función biunívoca con dominio D y rango E.
Una función f^{-1} con dominio E y Rango D es la función inversa a f si:
$f^{-1}(f(x)) = x$ para todo x en D
$f(f^{-1}(y)) = y$ para todo y en E

El símbolo **-1** que se usa en la notación **f^{-1}** no debe confundirse con un exponente.

Es importante recordar que para definir la función inversa de una función **f** es absolutamente esencial que **f** sea biunívoca.

Como a menudo ***x*** denota un número arbitrario en el dominio de una función, cuando la función es $\mathbf{f^{-1}}$, se desea considerar $\mathbf{f^{-1}(x)}$ para ***x*** en el dominio **E** de $\mathbf{f^{-1}}$, entonces las dos fórmulas de la definición se pueden escribir:

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } D$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ para toda } x \text{ en } E$$

GUÍA PARA OBTENER LA FUNCIÓN INVERSA EN CASOS SENCILLOS:

1. Verificar que **f** es una función biunívoca (o que f es creciente o decreciente) en todo su dominio.

2. Despejar **x** en términos de **y** de la ecuación y = f(x), obteniendo una ecuación de la forma $\mathbf{x = f^{-1}(y)}$.

3. Verificar las condiciones:
   $\mathbf{f^{-1}(f(x)) = x}$ **y** $\mathbf{f(f^{-1}(x)) = x}$
   para toda x en los dominios de f y f^{-1}, respectivamente.

Ejemplo#1

Sea f(x) = 3x - 5. Encontrar la función inversa de f y trazar las gráficas de f(x) y $\mathbf{f^{-1}(x)}$.

Solución:

Siguiendo los pasos de la guía:

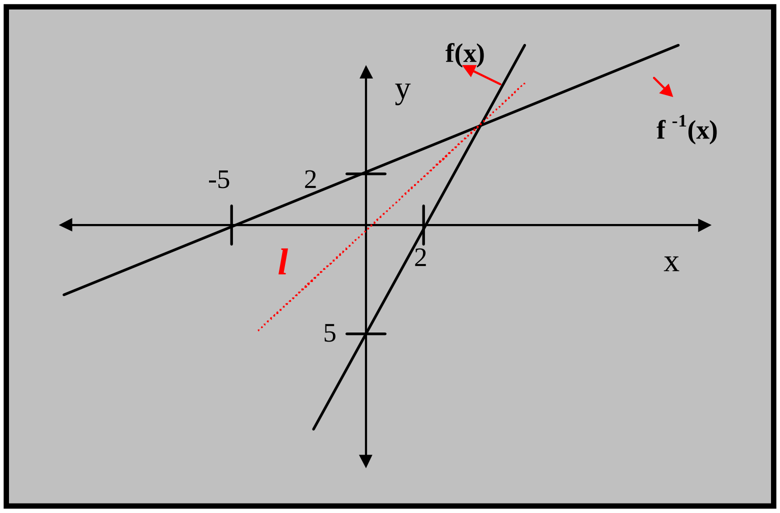
Paso 1.
La función es biunívoca porque f es creciente en todo su dominio, ya que es una recta con pendiente 3. Entonces la función inversa f^{-1} existe. Como además el dominio y el rango de f son R, lo mismo sucede para f^{-1}.

Paso 2.
Despejamos x de y=3x - 5 obteniendo x = (y + 5) / 3
formalmente se escribe $f^{-1}(y) = (y + 5) / 3$ como no importa el símbolo que se usa para la variable, también podemos escribir $f^{-1}(x) = (x+5) / 3$.

Paso 3.
Verificar que se satisfacen las dos condiciones $f^{-1}f(x)) = x$ y $f(f^{-1}(x)) = x$ así:

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}3x - 5) = ((3x - 5) +5) / 3 = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = f((x+5)/3) = 3((x+5) / 3 + 5) = x$$

La gráfica es la figura#1.9.1:



Figura#1.9.1

En el ejemplo se vio que las funciones f(x) y f^{-1} (x) dadas por: f (x) = 3x -5 f^{-1} (x)=(x+5)/3 son una inversa de la otra, siempre y cuando la variable ***x*** esté debidamente restringida. Algunos de los puntos de la gráfica de f(x) son (0,-5), (1,-2), (2,1), (3,4), (-1,-8). Los puntos correspondientes sobre la gráfica de f^{-1} (x) son (-5,0), (-2,1), (1,2), (4,3), (-8,-1).

En la figura#1.9.1 aparecen los croquis de las gráficas f y f^{-1} sobre los mismo ejes coordenados, si se dobla la hoja a lo largo de la recta "**l**" que biseca los cuadrantes **I** y **III**, las gráficas de f y f^{-1} coinciden. Observe que y = x es la ecuación de "**l**" . **Cada gráfica es un reflejo** de la otra con respecto a la recta "**l**". Esto sucede siempre que se tengan las gráficas de una función f y de su inversa f^{-1}.

1.10 Determinación Experimental de Límite.

El concepto de límite de una función es una de las nociones que distinguen al cálculo de otras ramas de las matemáticas. De hecho se podría definir el cálculo como un estudio de los límites, y desarrollar así fácilmente una idea intuitiva sobre estos.

En el cálculo y sus aplicaciones se analiza la forma en que varían ciertas cantidades y si éstas tienden a valores específicos, bajo ciertas condiciones. Estas cantidades a menudo involucran los valores de algunas funciones.

1.10.1 Concepto Geométrico o Intuitivo de Límite

Sea ***c*** un número real contenido en un intervalo abierto y sea **f** una función definida en todo el intervalo, excepto posiblemente en ***c*** mismo. Algunas veces es de interés conocer los valores **f(x)** de la función para ***x*** muy cercano a ***c*,** pero no necesariamente igual a ***c*.** En muchos casos, el número ***c*** no se encuentra en el dominio de **f,** es decir, **f(c)** no está definido. Informalmente hablando, a veces se formula la siguiente pregunta: Cuando ***x*** se acerca cada vez más a ***c*** (pero ***x*** es diferente de ***c***), acaso **f(x)** se acerca también a un número **"L"?.** Si la respuesta es afirmativa se dice que **f(x)** tiende a **"L"** cuando ***x*** tiende a ***c*,** o que el límite de **f(x)** cuando ***x*** tiende a ***c*** es **"L",** y se escribe:

Definición (significado intuitivo de límite):

Decir que $\lim_{x \to c} f(x) = L$
Significa que cuando *x* está cerca, pero difiere de *c*, f(x) está cerca de "L".

Si se sabe que f(x) tiende a algún número cuando ***x*** tiende a ***c***, pero tal número no se conoce, entonces se dice que el límite de **f(x)** cuando ***x*** tiende a ***c*** existe o simplemente que $\lim_{x \to c} f(x)$ existe**.**

si $\lim_{x \to c} f(x) = L$

entonces, cuando ***x*** tiende a ***c***, entonces **f(x)** tiende a **"L"**. Cuando esto sucede no importa el modo en que ***x*** tiende a ***c***. Así, en el gráfico ***x*** puede acercarse a ***c*** por la izquierda (lo que se denota por $x \to c-$), o por la derecha (lo que se señala por $x \to c+$), o bien oscilando de un lado a otro de ***c***. Análogamente, el valor **f(x)** de la función puede acercarse a **"L"** de muchas maneras diferentes, dependiendo de las propiedades de **f** .

Límites Unilaterales:

Definición (límites por la derecha y por la izquierda):

Decir que $\lim_{x \to c+} f(x) = L$
Significa que cuando *x* está cerca , pero a la derecha de *c*, entonces f(x) está cerca de "L".
En forma semejante decir que $\lim_{x \to c-} f(x) = L$
Significa que cuando *x* está cerca, pero a la izquierda de *c*, f(x) está cerca de "L".

Entonces el $\lim_{x \to c} f(x) = L$

si y sólo $\lim_{x \to c-} f(x) = L$

y $\lim_{x \to c+} f(x) = L$

Ejemplo#1

Sea f(x) = $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

Calcular el $\lim\limits_{x \to c} f(x)$

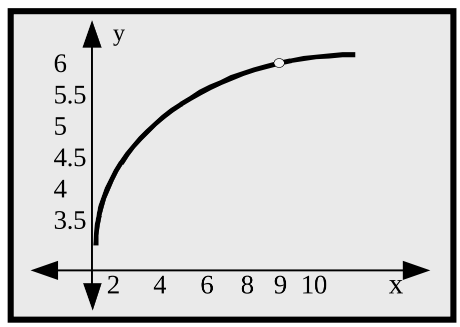
Solución:

Notemos que el número 9 no está en el dominio de **f**, ya que al sustituir ***x*** por 9 se llega a la expresión 0/0 que no tiene sentido. Pero todavía se puede averiguar que sucede a **f(x)** cuando ***x*** se aproxima a 9. Es decir, se aproxima **f(x)** a algún número específico cuando ***x*** tiende a 9 ?, para dar respuesta a esta pregunta se calculan algunos valores de **f(x)** para ***x*** próxima a 9 y se presentan en la siguiente tabla#1.10.1.

Tabla#1.10.1.

x	f(x)
9.30	6.0495
9.10	6.0166
9.05	6.0083
9.001	6.0001
↓	↓
9.000	?
↑	↑
8.99	5.998
8.90	5.98
8.88	5.97
7	5.645

La gráfica para f(x) será:



Figura#1.10.1

Por lo que se puede observar en la tabla#1.10.1 y el gráfico de la figura#1.10.1 se puede decir que:

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = 6$$

pero para asegurarnos podemos hacer lo siguiente:

$$\lim_{x \to 9} f(x) = \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = 6$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} * \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \lim_{x \to 9} \frac{(x-9) * (\sqrt{x}+3)}{x-9}$$

Por definición, para calcular el límite de f(x) cuando $x \to 9$, se puede suponer que ***x*** es diferente de 9. Por lo tanto, x - 9 es diferente de 0 y es posible dividir el numerador y el denominador entre x - 9, es decir se puede cancelar la expresión x - 9 y esto da:

$$\lim_{x \to 9} f(x) = \lim_{x \to 9} \sqrt{x} + 3 = \sqrt{9} + 3 = 6$$

Cuando ***x*** se acerca a 9, f(x) se acerca al número 6, pero nunca toma ese valor; sin embargo, se puede hacer tan cercano a 6 como se desee, escogiendo ***x*** suficientemente cerca de 9.

PROGRAMACION

Comprobemos utilizando el Sw. Mathematica

Podemos calcular límites usando el comando Limit[ ].

La sintaxis es: Limit[expresion,x->x_0]

este comando encuentra el límite de la expresión cuando x se aproxima a x_0.

Para: **f(x) =** $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ **Calcular el** $\lim\limits_{x \to c} f(x)$

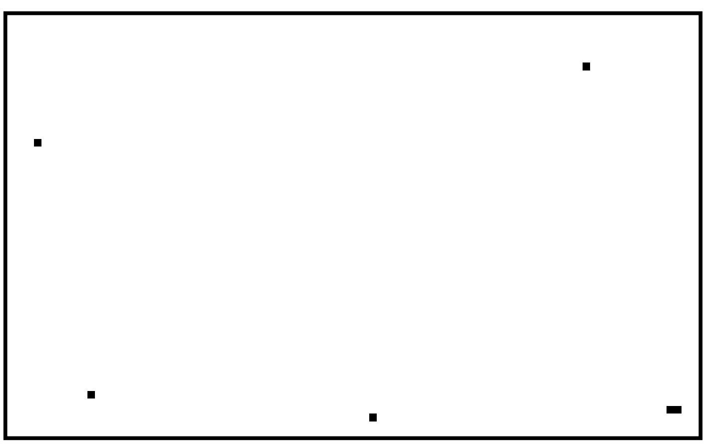
La instrucción será:

Ln[] = Limit[(x-9)/(Sqrt[x]-3),x->9]

El resultado es: Out[] = 6

Ahora usemos el comando Plot para graficar la función.

Ln[] = Plot[(x-9)/(Sqrt[x]-3),{x,2,10}];
Out[] =



En ambos casos obtenemos los mismos resultados que en el ejemplo #1, cuando $x \to 9$, **f(x)** se acerca a **6**.

Ejemplo#2

Sea f(x) = $\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$

Calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Solución:

Podemos calcular un conjunto de valores para f(x) y así investigar el límite, pero también podemos usar un poco de álgebra.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+4)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1} x+4 = 1+4=5$$

Ejemplo#3

Sea f(x) = Sen(x) / x

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Solución:

Como se observará ni usando álgebra se podrán cancelar las ***x.*** Por tanto para tener una idea del valor del límite construiremos una tabla con los valores de ***x*** y **f(x)**.

Tabla#1.10.2.

x	f(x)
1.0	0.84147
0.5	0.95885
0.1	0.99833
0.01	0.99998
↓	↓
0	?
↑	↑
-0.01	0.99998
-0.1	0.99833
-0.5	0.95885
-1.0	0.84147

La tabla#1.10.2 muestra que cuando $x\to 0$, f(x) se acerca a 1.

Por tanto esta vez podemos decir que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right) = 1$$

Aunque algunas veces este tipo de demostración puede engañarnos. Analicemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo#4

Sea f(x) = x^2 - Cos x / 10,000

Calcular $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Solución :

Siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior, construimos la tabla de valores.

Tabla#1.10.3.

x	f(x)
±1	0.99995
±0.5	0.24991
±0.1	0.00990
±0.01	0.0000000005
↓	↓
0	?

La conclusión que la tabla#1.10.3 sugiere, es que el valor del límite es **0**. Pero no es así, ya que el **cos x** tiende a **1** cuando **x** tiende a **0**.
Por tanto

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 - \frac{Cos(x)}{10,000} \right] = -\frac{1}{10,000}$$

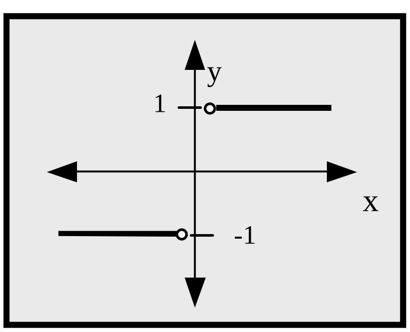
Ejemplo#5 (Usando límites por la derecha y por la izquierda)

Sea f(x) = |x| / x

Calcular el $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

Solución:

Primero construiremos la gráfica de f(x).



Figura#1.10.2.

Como se puede observar en la gráfica de f(x) de la figura#1.10.2, f no esta definida para x = 0.
Si x > 0, entonces **|x| = x y f(x) = |x| / x = 1**.
Por tanto $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} (1) = 1$

Si x < 0, entonces **|x| = -x y f(x) = -x / x = -1**.
Por tanto $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (-1) = -1$

Como los límites por la derecha y por la izquierda no son iguales por definición se deduce que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe

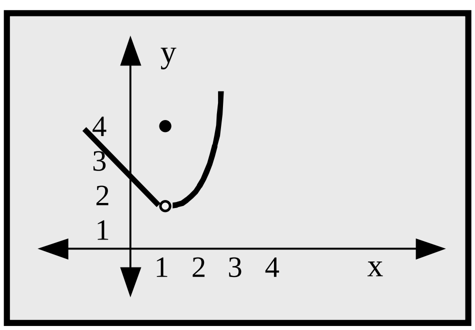
Ejemplo#6

Trazar la gráfica de la función f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{para } x < 1 \\ 4 & \text{para } x = 1 \\ x^2 + 1 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

Determinar el $\lim_{x \to 1-} f(x)$, $\lim_{x \to 1+} f(x)$ y $\lim_{x \to 1} f(x)$

Solución:
La gráfica es:



Figura#1.10.3.

Vemos en la gráfica dela figura#1.10.3 que:

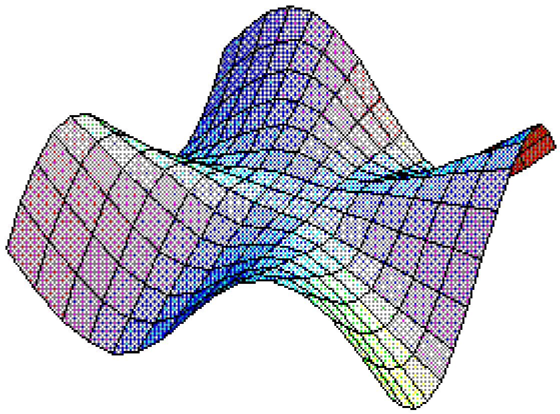
$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (3 - x) = 2$$

y el

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (x^2 + 1) = 2$$

Como los límites por la derecha y por la izquierda son iguales, por definición se deduce que: $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

El valor de la función f(1) = 4 no es importante al calcular el límite.



Primera Unidad
Funciones y Relaciones
Problemas y Ejercicios

Introducción:

La siguiente guía práctica tiene como objetivo poner a prueba los conocimientos adquiridos durante las sesiones teóricas de la primera unidad del curso de matemática I y los conocimientos en programación.

El Software Mathematica es la herramienta de programación sugerida para ayudar a resolver los ejercicios planteados porque es un software amigable y con utilidades que harán el trabajo más dinámico.

Tienes que tener presente que primero debes de intentar resolver los ejercicios tú sólo y si se presentara alguna dificultad puedes pedir ayuda al instructor o tratar de leer otros textos de cálculo.

1.1 Variables y Datos, 1.2 Relaciones y sus gráficas, 1.3 Dominio y Rango.

»Para cada conjunto de pares de datos, ubique con un punto cada par en un plano de coordenadas, utilice el Sw Mathematica para ello. Luego auxiliándose del gráfico, liste los elementos del Dominio y Rango.

Sugerencia : Usar el comando ListPlot[{{x_1, y_1},{x_2, y_2),...,{x_n, y_n}}]

1. {(-2,3), (-1,0), (0, -1), (1,0), (2,3)}
2. {(-5,2), (0,3), (7,4),(10,$\sqrt{19}$), (16,5)}
3. {(3,10), (3,5), (3,0), (3, -5), (3, -10)}

»Grafique las siguientes relaciones usando el Sw. Mathematica y encuentre el dominio.

4. $y = 3x + 7$
5. $y = 10 - 3x$
6. $y = 1 - x^2$
7. $y = \dfrac{x^2}{x-4}$
8. $y = \sqrt{9-5x}$
9. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-16}}$
10. $y = \dfrac{-8}{3x^2-2x-1}$

»Para los siguientes gráficos, determinar cuáles representan una función. Fundamente su respuesta.

Gráfico # 1

Plot[{Sqrt[x],-Sqrt[x]},{x, 0,2}];

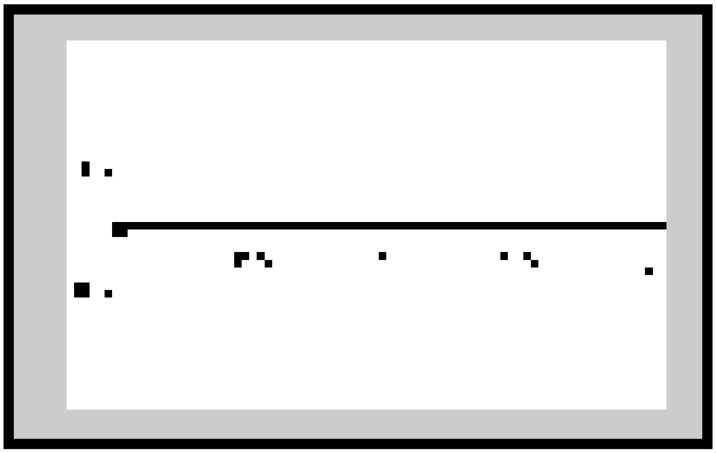


Gráfico # 2

Plot[(x + 1)^2,{x, -2,2}];

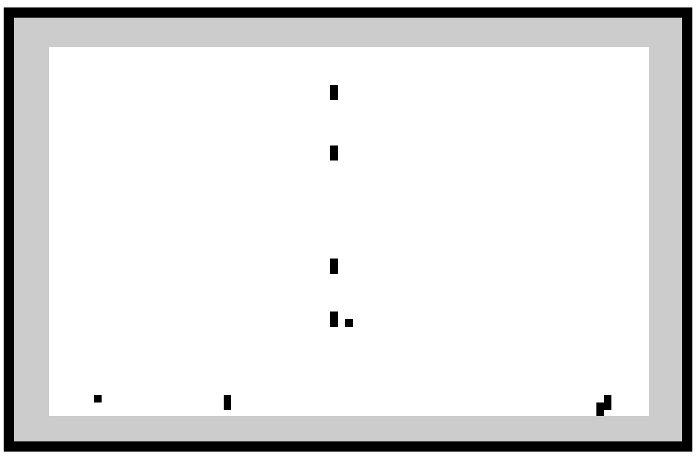
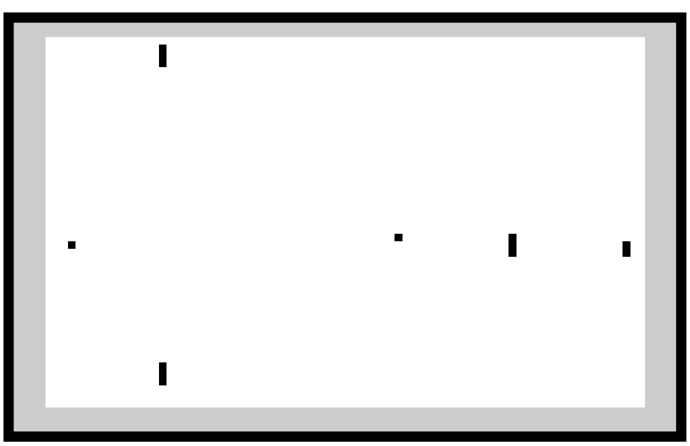


Gráfico # 3

Plot[{5x^2/3 - x^5/3},{x, -1,4}];



»Grafique cada relación en un plano de coordenadas, utilice el Sw. Mathematica para ello, y determine si cada relación es o no una función.
Sugerencia: Utilice el comando ListPlot[Lista,PlotJoined→True]
donde "Lista" es cada conjunto de pares de datos.

11. {(-3,6), (-2,5), (-1,8), (0,-2), (1,8), (2,5)}
12. {(-4,-10), (-2,-6), (0,-2), (2, -6), (4,-10)}
13. {(3,3), (2,2), (1,1), (0,0), (-1,-1), (-2,-2)}
14. {(5,25), (3,9), (1,1), (-1,1), (-3,9), (-5,25)}
15. {(0,9), ($\sqrt{2}$,5), ($\sqrt{2}$, -5), ($\sqrt{3}$,10), ($\sqrt{3}$, -10)}

»Grafique usando el Sw. Mathematica y determine las relaciones que son funciones.

16. $x + 3y = 9$
17. $x = 3/4y - 2$
18. $x^2 + 2y = 10$
19. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4$
20. $x^2 + 4y^2 = 16$
21. $4x^2 - y^2 = 4$
22. $y = -\sqrt{9 - x^2}$
23. $y = \sqrt{x^2 - 9}$
24. $x + 4y^2 = 8$
25. $y = (2x - 5) / (5x - 2)$
26. $x^2 - 2xy = 16$

»Para cada una de las siguientes relaciones:

a). Identificar las variables independiente y dependiente.

b). Graficar la relación entre las dos variables, use el Sw. Mathemática para ello.
(Gráfico básico, sin puntos particulares)

c). Determinar si la relación es o no una función, justificar la respuesta.

27. La altura de un individuo versus su edad.

28. La cantidad de tiempo que le toma a una persona correr una milla versus su edad.

29. Una cantidad de dinero en una cuenta de ahorros versus el tiempo.

30. El cultivo de un número de bacterias en un laboratorio versus el tiempo.

»Encuentre una función f(x) que describa cada condición.

31. El número de días en x semanas.

32. El número de minutos en x horas.

33. El área de un rectángulo con longitud 4.5pies y ancho x.

34. El área de un triángulo con base de 16cm y altura x.

35. El volumen de un cubo con aristas de x cm

36. La agencia de renta de automóviles ABC cobra $24 diarios por el alquiler de un automóvil más $0.40 por milla.

a). Escriba la fórmula del costo total de la renta E(x) por día, si "x" es el número de millas recorridas.

b). Si usted renta un carro por un día. Cuántas millas podría recorrer por $120?

»Realice pequeñas funciones programadas para implementar las condiciones 31, 33, 34 y 36.

» Encuentre la ecuación para la recta de la forma y=mx+b, la recta pasa por el origen y tiene pendiente $\frac{1}{2}$. Luego grafique la recta usando el sw mathematica.

» Encuentre la ecuación para la recta de la forma y=mx+b, la recta pasa por el punto (-1,-0.5) y tiene pendiente $\frac{3}{2}$. Luego grafique la recta usando el sw mathemática.

» Encuentre la ecuación para la recta de la forma y=mx+b, la recta pasa por los puntos (-1,-0.5),(1.5,2). Luego grafique la recta usando el sw mathematica.

1.7 Funciones como objeto y 1.8 Algebra de Funciones

»Para cada una de las siguientes funciones decidir si la función es aditiva y compruebe usando la función hecha con el Sw. Mathematica que aparece en esta sección 1.7. (Si es necesario modifique la función)

a). $f(x) = 6x^2 + 5$
b). $f(x) = (x + 1) / 2x$
c). $f(x) = x^2 + 3x + 4$
d). $f(x) = x^3 + x$

»Determinar si f es par o impar, o ninguna de las dos y graficar en el caso de que la función sea par o impar.

1. $f(x) = 3x^3 - 4x$
2. $f(x) = 9 - 5x^2$
3. $f(x) = 2$
4. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$
5. $f(x) = (x^3 - 4)^{1/3}$
6. $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$
7. $f(x) = 2x^5 - 4x^3$
8. $f(x) = 2x^3 + x^2$
9. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
10. $f(x) = |x| + 5$

»Para las funciones f y g dadas escribir las ecuaciones que definen a.) f + g b.) f - g c.) f . g d.) f / g.

11. $f(x) = x^2 - 9$ $g(x) = x + 3$
12. $f(x) = 2x^2$ $g(x) = 1$
13. $f(x) = 1 / (x + 2)$ $g(x) = 1 / (x - 2)$

»A la compañía ABC le cuesta 400 + 5Sqrt(x(x - 4)) dólares fabricar x estufas de juguete que vende a 6 dólares cada una.

a). Encuentre una fórmula para P(x), que es la utilidad de fabricar x estufas.

b). Evaluar P(200) y P(1000)

c). Cuántas estufas tiene que fabricar la ABC sólo para romper el equilibrio ?
d). Implemente usando el Sw. Mathematica.(Hacer una función.)

1.9 Funciones Inversas

»Encuentre la función inversa de f(x) y luego grafique usando el Sw. Mathematica.

a). f(x) = 1 / 2x + 5 , x > -3/2
b). f(x) = 9 - x^2 , x >= 0
c). f(x) = $\sqrt{3x-5}$, x >= 5/3

»Encuentre el límite indicado especificando el desarrollo y luego compruebe usando el Sw. Mathematica.

1. $\lim_{x \to 1} (2x-8)$

2. $\lim_{x \to 3} (\frac{2}{x}+1)$

3. $\lim_{x \to -2} (x^2 - 3x + 1)$

4. $\lim_{x \to 4} \left[\frac{\sqrt{9+x^2}}{x-3} \right]$

5. $\lim_{x \to \sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{12-x^2}}{x^4} \right]$

6. $\lim_{x \to 1} \left[\frac{5x - x^2}{x^2+2x+4} \right]$

7. $\lim_{x \to -3} \left[\frac{2x^2+5x-3}{x+3} \right]$

8. $\lim_{x \to 2} \left[\frac{x^2+x-6}{x+2} \right]$

9. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{x^3-16x}{x^2+4x} \right]$

10. $\lim_{x \to 2} \left[\frac{-x^3-8}{x-2} \right]$

»Auxiliándose del Sw. Mathematica encuentre los límites de las siguientes funciones, si es que existen.

11. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{\tan x}{2x} \right]$

12. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1-\cos x}{x} \right]$

13. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \right]$

14. $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{\text{sen}3x}{x - 1} \right]$

15. $\lim\limits_{x \to \pi} \left[\dfrac{1 + \cos x}{\text{sen}2x} \right]$

16. $\lim\limits_{t \to 0} \left[\dfrac{\text{sen}^2 t}{t} \right]$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{\tan x - \text{sen}x}{x^3} \right]$

» 18. Usando el Sw. Mathematica grafique las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y encuentre después cada uno de los siguientes límites:

a). $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

b). f(1)

c). $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

d). $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

» 19. Usando el Sw. Mathematica grafique las siguientes funciones:

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ 5 - x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

y encuentre después cada uno de los siguientes límites.

a). $\lim\limits_{x \to 2+} g(x)$

b). $\lim\limits_{x \to 2-} g(x)$

c). $\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

d). g(1)

PROYECTOS DE LA PRIMERA UNIDAD.

Proyecto #1.

Los datos de la tabla siguiente muestran que el promedio de ingresos en los Estados Unidos depende del nivel de educación de las personas. En particular, la tabla sugiere tres relaciones funcionales diferentes, con el promedio de entrada como una función de años de educación, uno para mujeres, hombres y el promedio combinado.

EDUCACION	HOMBRE	MUJER	COMBINADO
Abandono High School	$13,655	$7,004	$10,326
Graduado High School	$21,583	$11,143	$15,886
Estudios Universitarios	$37,002	$19,215	$28,406
Estud. Universit. con título.	?	?	$38,604

Promedio de ingresos por nivel de educación.

Nota: Este problema esta basado en el artículo “Education Does Pay!” emitido en febrero 1992 de T1-81 Newsletter. Los datos fueron obtenidos de un survey a 58,000 americanos.

a). Establecer el dominio para cada una de las tres funciones.

b). Hacer una tabla separada para representar cada función.

c). Graficar las tres funciones de promedio de ingreso utilizando un plano de ejes coordenados.
Sugerencia: Utilizar el Sw. Mathematica para graficar, puede dibujar los puntos y luego unirlos.

d). Luego para cada una de las tres funciones encontrar una función lineal que aproxime los datos razonablemente.

e). Cuáles son las pendientes de las funciones lineales.

f). Utilizando el Sw. hacer una función para cada una de las tres funciones lineales que permita estimar las entradas de la tabla incluyendo las que hacen falta.

g). Estimar para:
- **g.1)** Una persona con dos años de estudios universitarios.
- **g.2)** Una persona con once años de educación.

los promedios de ingreso con las funciones hechas en el Sw.

Proyecto #2.

El siguiente programa escrito en lenguaje BASIC investiga numéricamente el caso

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

El programa hace que la computadora calcule los valores de **$f(x)=(1+x)^{1/x}$** para x=1, 0.1, 0.001, etc. Se detiene cuando la diferencia entre dos valores sucesivos sea menor que 0.000001. Se espera entonces haber encontrado el límite con una exactitud de cinco cifras decimales.

```
 10 X=1
 20 E=2                    (*f (1)=2*)
 30 X=X/10                 (*siguiente valor de X*)
 40 F=(1+X)^1/X            (*siguiente valor de f (x)*)
 50 PRINT X, F
 60 IF ABS(F- E) < 1.0E-06 THEN GO 90
 70 E=F
 80 GOTO 30
 90 PRINT "LIMITE ALCANZADO"
100 END
```

La salida es :

X	**(1+X)^1/X**
0.1	2.59374
0.01	2.70481
0.001	2.71692
0.0001	2.71815
10^{-5}	2.71857
10^{-6}	2.71828
10^{-7}	2.71828
10^{-8}	2.71828

LIMITE ALCANZADO

Hay que tener en cuenta que estos datos son sólo sugerentes y no concluyentes, si, investiga un poco más se dará cuenta que el $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$ existe y que su valor es el número **$e \approx 2.718281828459045$** que juega un papel importante en el cálculo.

Bien, el ejercicio consiste en:

a). Hacer una función en el Sw. Mathematica que permita obtener los mismos resultados que el programa.

b). El programa usa valores de X sólo en el lado positivo de cero. Modifique o realice una nueva función para que permita calcular valores de f(x) para X=-1, -0.01, -0.001, etc.

c). Modifique o realice una nueva función para que permita investigar numéricamente los siguientes casos.

c.1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+5} - \frac{1}{5}\right)$

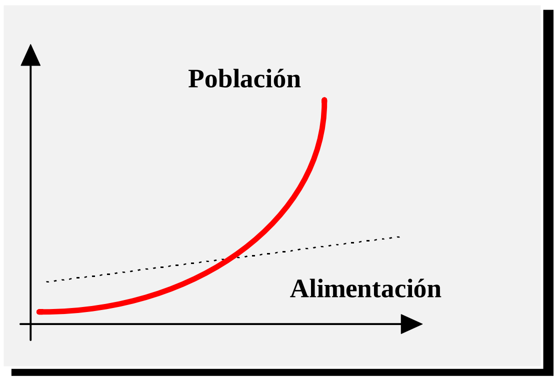
c.2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{3^x - 1}{x}\right)$

2 Segunda Unidad
Razón de Cambio

Contenido

2.1 Modelo de Crecimiento; Población versus alimentación disponible.

El británico economista Malthus en 1798 hizo algunas predicciones acerca de la población. El concepto del problema es mostrado en la siguiente figura#2.1.1.



Figura#2.1.1. Población versus Alimentación disponible.

El observó que la alimentación disponible fue creciendo solamente linealmente y la población, a una razón mucho más rápida. Así, si la alimentación disponible fue adecuada en el tiempo, el crecimiento de la población pudo pronto sobrepasarla. A menos que algún desastre natural o artificial asesinara una gran parte de la primera población, o bien que el hambre generalizada provocara un desastre similar.

Malthus pudo bien haber errado en ambos, la alimentación y la población. Sin embargo hemos escuchado, al menos desde los años 1960 más predicciones anticipadas acerca de la sobrepoblación en el siglo XXI. Así, esto es claramente importante para conocer las razones de crecimiento del tamaño de la población y del sobreuso de los recursos esenciales.

Para analizar los problemas de la población debemos entender y comparar el índice de crecimiento de la población y el índice de crecimiento de los alimentos. Los índices de crecimiento son ejemplos de la razón de cambio de funciones. Ahora no todas las funciones crecen al mismo tiempo y todo el tiempo. El estudio de la Razón de Cambio de funciones es el motivo del primer curso de cálculo.

Se estudia el problema de la población porque es un problema real para nuestra generación y porque nos sirve como un prototipo a problemas que pueden ser entendidos, analizados y solucionados por métodos de cálculos, pero no por métodos de álgebra y otras matemáticas típicamente estudiadas antes del cálculo.

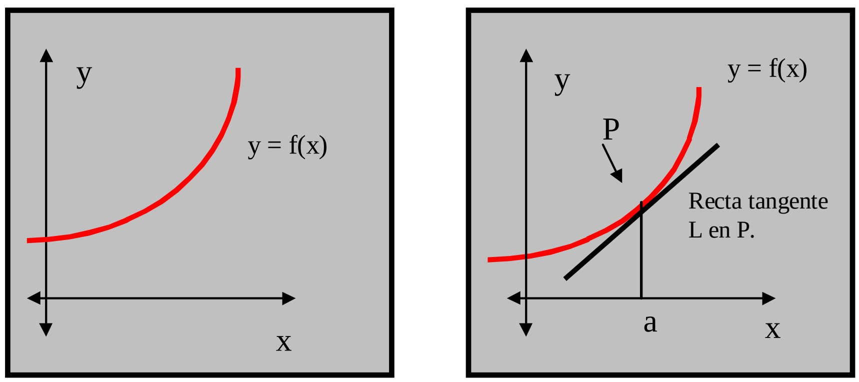
Otros fenómenos importantes pueden ser descritos y analizados por estudios de la razón de cambio. Por ejemplo si un objeto cae de una altura; ambas, su distancia y velocidad viajarán en función del tiempo.

2.2 Derivada : Razón de Cambio Instantánea

Antes de iniciar el estudio sobre razón de cambio, se introducira el tema de la derivada con su interpretación geométrica.

2.2.1 Derivada: Interpretación geométrica.

Las rectas tangentes a gráficas y la velocidad de un objeto que se mueve sobre una línea recta son aplicaciones de la derivada, en estos términos podemos introducir la **definición de la derivada de una función** como la pendiente de la tangente a su gráfica.



(a) **(b)**

Figura#2.2.1.

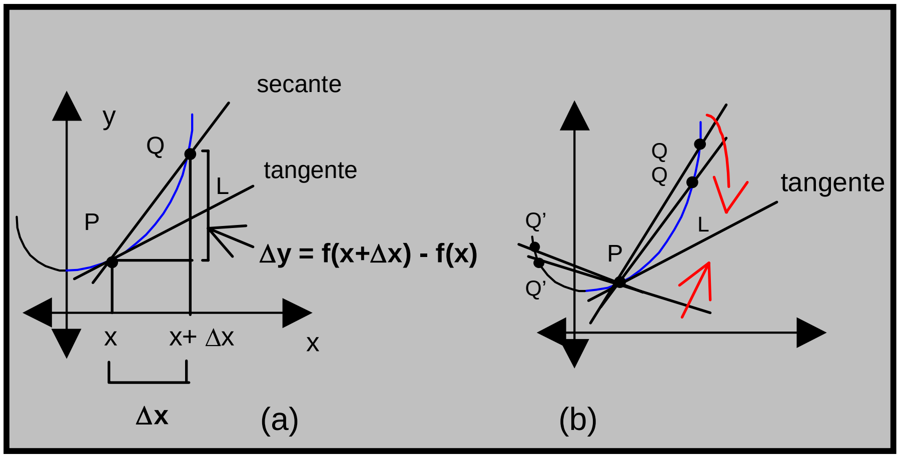
Partiendo de esta definición inicial, necesitamos primero decidir cómo se define la tangente L en un punto arbitrario P de una curva y = f(x), cuya gráfica se muestra en la figura#2.2.1(a). Una idea intuitiva es que: ***La tangente*** debe ser la recta que pase por P con la misma dirección que lleva ahí la curva. Ya que la dirección de una recta se determina por su pendiente, el problema será determinar una ecuación que permita obtener la pendiente adecuada para la tangente deseada, mirar figura#2.2.1.(b).

Para encontrar esta ecuación se necesita:

⇒ **1) Las coordenadas de P.**
⇒ **2) La pendiente m_{tan}.**

⇒ Las coordenadas de P no representan dificultad, puesto que un punto de la gráfica se obtiene especificando un valor de x. Por ejemplo, x=a, en el dominio de f. Las coordenadas del punto de tangencia P son (a, f(a)).

⇒ Una manera de aproximar la pendiente m_{tan} consiste en determinar la pendiente de las rectas secantes que pasen por el punto P(x,f(x)) y cualquier otro punto Q de la gráfica de la figura#2.2.2.(a).



Figura#2.2.2.

Si P tiene coordenadas (x,f(x)) y se hacen Q por coordenadas (x + Δx, f(x+Δx)), entonces, como se muestra en la gráfica de la figura#2.2.2.(a) la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q es :

$$\mathbf{m_{sec}} = \frac{\textbf{cambio en la coordenada de y}}{\textbf{cambio en la coordenada de x}}$$

$$= \frac{\mathbf{f(x+\Delta x) - f(x)}}{\mathbf{(x+\Delta x) - x}}$$

Si $\mathbf{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}$

entonces $\mathbf{m_{sec}} = \dfrac{\mathbf{\Delta y}}{\mathbf{\Delta x}}$

Cuando el valor de Δx es pequeño, ya sea positivo o negativo, se obtienen puntos Q y Q' de la gráfica de f a cada lado del punto P, pero cercanos a él. Es de esperar que a su vez, la pendiente m_{pq} y $m_{pq'}$ estén muy cerca de la pendiente de la recta tangente L, ver figura#2.2.2.(b). Por lo tanto si la gráfica de una función y = f(x) tiene una recta tangente L en un punto P, entonces L debe ser la recta que es el límite de las secantes que pasan por P y Q cuando Q→P, y de las secantes que pasan por P y Q' cuando Q'→P. Además la pendiente m_{tan} de L debe ser el valor límite de los valores m_{sec} cuando Δx→0.

En resumen:

Definición:

Sea y = f(x) una función continua. **La recta tangente** a la gráfica en el punto (a,f(a)), es la que pasa por tal punto y su pendiente es

$$\mathbf{m_{tan}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{\Delta y}}{\mathbf{\Delta x}}$$

siempre que el límite exista.

Y por tanto:

La derivada de una función y = f(x) con respecto a x es:

$$\mathbf{f'(x) = m_{tan}}$$

Esta definición implica que una tangente en (a,f(a)) es única, puesto que un punto y una pendiente determinan una sola recta.

Podemos sintetizar la definición anterior en cuatro pasos:

Calcular:

(i) f(a) y f(a+Δx)

(ii) Δy = f(a+Δx) - f(a)

(iii) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

(iv) $m_{tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Ejemplo#1

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en (1,f(1)).

Solución :

Primero : encontremos la pendiente.

Utilicemos la definición sintetizada en cuatro pasos :

(i) $f(1)= 1^2 = 1$
para cualquier $\Delta x \neq 0$.
$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$
(ii) $\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = [1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2] - 1$
$= 2\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x + (2 + \Delta x)$
(iii) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} = 2 + \Delta x$

De esta manera la pendiente de la tangente en (1,f(1)) está dada por:

$$\text{(iv)} \quad m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2$$

Segundo : encontremos la ecuación de la recta tangente.

Ya que tenemos la pendiente, usamos la forma punto-pendiente y obtenemos

y - 1 = 2(x-1) o bien

$\boxed{y = 2x - 1}$ Ecuación de la recta.

Tercero : grafiquemos la curva y su tangente. Para esto utilicemos el Sw. Mathematica, usando el comando Plot con una sintaxis diferente:

PROGRAMACION

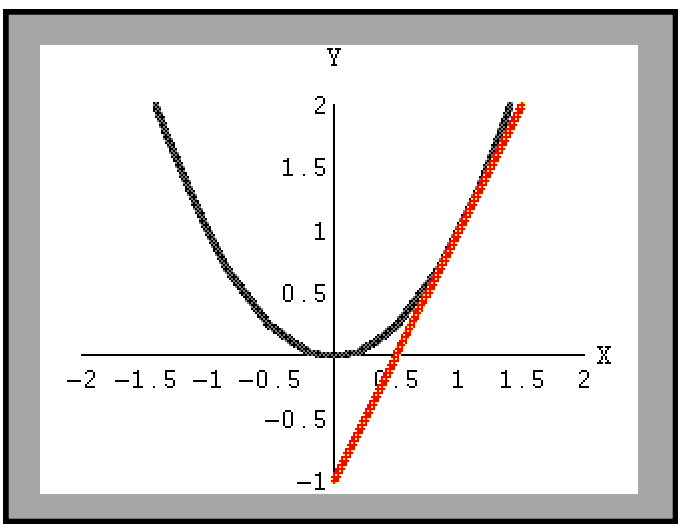
Plot[{f$_1$,f$_2$,...,f$_n$},{X,Xmin,Xmax}]

en esta sintaxis el comando Plot dibuja todas las funciones f_1, f_2, ...,f_n para valores de X correspondientes entre Xmin y Xmax.

Entonces usamos Plot y:

```
Plot[{X^2,2X-1},{X,-2,2},
    PlotRange→{{-2,2},{-1,2}},
    AspectRatio→Automatic,
    AxesLabel→{X,Y},
    PlotStyle→{{Thickness[0.01],
    GrayLevel[0.2]
    },
    {Thickness[0.01],
     RGBColor[1,0.2,0]
     }
    }];
```

obtenemos la gráfica de la figura#2.2.3:



Figura#2.2.3.

2.2.2 Razón de Cambio.

Ahora estudiaremos la interpretación de la derivada de una función como su razón de cambio con respecto a la variable independiente.

La mayoría de las cantidades que aparecen en la vida diaria cambian o varían en el tiempo. Esto es evidente en las investigaciones científicas. Un químico puede estar interesado en la rapidez con la que cierta sustancia se disuelve en agua. Un ingeniero electrónico quizá necesite conocer la intensidad con la que la corriente varía en alguna parte de un circuito, abordaremos una situación general, que podría aplicarse a todos los ejemplos anteriores.

Comencemos con la razón de cambio instantánea de una función que tiene al tiempo t como una variable independiente. Suponer que Q es una cantidad que varía con el tiempo y escribamos Q = f(t) para representar su valor en el tiempo t. Por ejemplo Q podría ser:

1. El número de dólares en una cuenta bancaria.
2. El volumen de un balón que está siendo inflado.
3. La cantidad de agua en un depósito con flujo variable de ingreso y egreso.
4. La cantidad de cierto producto químico producido en una reacción en el instante t.
5. La distancia recorrida en el tiempo t desde el comienzo de una jornada.
6. El tamaño de una población (tal como conejos, gente o bacterias).

El cambio en Q desde el tiempo t hasta el tiempo $t+\Delta t$ es el incremento,

$$\Delta Q = f(t+\Delta t) - f(t)$$

2.2.3 Cociente diferencia.

La razón de cambio promedio o cociente diferencia de Q es, por definición, el cociente :

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

2.2.4 Cálculo algebraico de la razón de cambio.

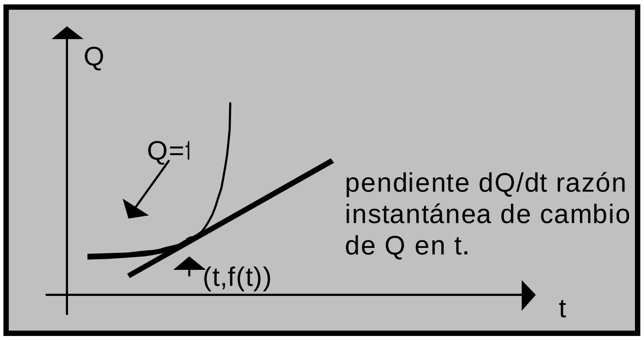
Definimos ***la razón de cambio instantánea*** de Q (por unidad de tiempo) como el límite de su razón de cambio promedio cuando $\Delta t \to 0$. Es decir, la razón de cambio instantánea es:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(f+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

pero este último límite no es más que la derivada de **f '(t).** Por tanto observamos que la razón de cambio instantánea de **Q = f(t)** es $\frac{dQ}{dt} = f'(t)$

2.2.5 Cálculo Gráfico de la razón de cambio.

El concepto anterior concuerda con nuestra idea intuitiva de lo que debe ser. Si pensamos en Q como cambio con respecto al tiempo, pero que de repente en el instante t, continúa en la dirección de su gráfica en el tiempo t, sin curvatura subsecuente, la gráfica de Q aparecería como se muestra en la figura#2.2.4.



Figura#2.2.4

La línea tenue de la figura#2.2.4 sirve para indicar como sería el comportamiento normal de Q = f(t). Pero si Q continuase en línea recta, eso sería un **cambio a una razón constante.** Puesto que la recta es tangente a la gráfica de Q, podemos interpretar $\frac{dQ}{dt}$ como la razón instantánea de cambio Q en el tiempo t. En resumen.

La razón de cambio instantánea de Q = f(t) en el tiempo t es igual a la pendiente de la tangente a la curva Q=f(t) en el punto (t, f(t)).

Hay otras conclusiones adicionales importantes que podemos deducir. Ya que una pendiente positiva corresponde a una tangente ascendente y una pendiente negativa corresponde a una tangente descendente, decimos que:

Q es creciente en el momento t si $\frac{dQ}{dt} > 0$

Q es decreciente en el momento t si $\frac{dQ}{dt} < 0$

Ejemplo#2

Un físico descubre que cuando cierta sustancia se calienta, la temperatura, medida en grados Celcius (o centígrados) después de t minutos, está dada por

$$g(t) = 30t + 6\sqrt{t} + 8 \text{ para } 0 \le t \le 5$$

(a) Calcular la razón de cambio promedio de g(t) durante el intervalo de tiempo [4,4.41].
(b) Calcular la razón de cambio instantánea de g(t) en t = 4.

Solución:

(a) Sustituyendo t=4 , $\Delta t = 0.41$ y Q = g(t) en la definición se obtiene que la razón de cambio promedio de g en [4, 4.41] es:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{g(4.41) - g(4)}{0.41} = \frac{[30(4.41) + 6\sqrt{4.41} + 8] - [120 + 6\sqrt{4} + 8]}{0.41}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{12.9}{0.41} \approx 31.46 \ {}^{o}C/\min$$

(b) De acuerdo con la definición la razón de cambio instantánea de g(t) al tiempo t es $g'(t)$ y es igual a:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{[30(t + \Delta t) + 6\sqrt{t + \Delta t} + 8] - [30t + 6\sqrt{t} + 8]}{\Delta t} \right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{30t + 30\Delta t + 6\sqrt{t + \Delta t} + 8 - 30t - 6\sqrt{t} - 8}{\Delta t} \right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{30\Delta t + 6\sqrt{t + \Delta t} - 6\sqrt{t}}{\Delta t} \right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{30\Delta t + 6(\sqrt{\Delta t + t} - \sqrt{t})}{\Delta t} * \frac{\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t}}{\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t}} \right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{30\Delta t(\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t}) + 6(\Delta t + t - t)}{\Delta t(\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t})} \right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{30\Delta t(\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t}) + 6\Delta t}{\Delta t(\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t})} \right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta t(30(\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t}) + 6)}{\Delta t(\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t})} \right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{30(\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t}) + 6}{\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t}} \right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{30(\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t})}{\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t}} + \frac{6}{\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t}} \right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} 30 + \frac{6}{\sqrt{t + \Delta t} + \sqrt{t}} = 30 + \frac{6}{2\sqrt{t}} = 30 + \frac{3}{\sqrt{t}}$$

En particular, la razón de cambio instantánea de g(t) en t = 4 es:

$$30 + \frac{3}{\sqrt{4}} = 30 + \frac{3}{2} = 30 + 1.5 = 31.5 \ {}^{0}\text{ C/min}$$

Ejemplo #3

Una piedra se deja caer a un estanque y produce ondas de agua que forman círculos concéntricos. El radio de una onda es de 40t cm a los t seg . Calcular la razón de cambio con respecto a t del área del círculo en **(a)** t = 1, **(b)** t = 2, **(c)** t = 3.

Solución:

El área de un círculo es: A=πr^2, por tanto en este caso A= $\pi(40t)^2$, apliquemos la definición de razón de cambio instantánea a la fórmula.

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\pi 1600(\Delta t + t)^2 - \pi 1600 t^2}{\Delta t}\right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\pi 1600[(\Delta t + t)^2 - t^2]}{\Delta t}\right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\pi 1600[(\Delta t)^2 + 2\Delta t(t) + t^2 - t^2]}{\Delta t}\right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\pi 1600[(\Delta t)^2 + 2\Delta t(t)]}{\Delta t}\right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta t \pi 1600[\Delta t + 2t]}{\Delta t}\right] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \pi 1600\Delta t + \pi 1600(2t) = \pi 1600(2t)$$

La razón de cambio instantánea de:

(a) A(t) en t = 1 es π 1600(2)(1) = 3,200π

(b) en t = 2 es π 1600 (2)(2) = 6,400π

(c) en t = 3 es π1600(2)(3) = 9,600π

Resumen:

La derivada de cualquier función (no sólo una función de tiempo) puede interpretarse como su razón instantánea de cambio con respecto a la variable independiente. Si y = f(x), entonces la razón de cambio promedio de ***y*** (por unidad de cambio en ***x***) en el intervalo [x, x + Δx] es el cociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

La razón instantánea de cambio de ***y*** con respecto a ***x*** es el límite de esta razón de cambio promedio cuando $\Delta x \to 0$ esto es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

El ejemplo siguiente ilustra el hecho de que una variable dependiente puede ser expresada a veces como dos funciones diferentes de dos variables independientes distintas. Las derivadas de esas dos funciones son , entonces, razones de cambio de la variable dependiente con respecto a las dos variables independientes distintas.

Ejemplo#4

Un cuadrado de x (cm) de arista tiene un área A= x^2 , por lo que su derivada con respecto a x,

$$\frac{dA}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x(x) + x^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 2x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + 2x = 2x$$

es la razón de cambio de su área A (en centímetros cuadrados por centímetros) con respecto a x. Supongamos ahora que la longitud de la arista, del cuadrado aumenta con el tiempo x = 5t, con el tiempo t en segundos. Entonces el área del cuadrado en el tiempo t será A = $(5t)^2$ = $25t^2$.

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{25(t + \Delta t)^2 - 25t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{25[(\Delta x)^2 + 2\Delta t(t) + t^2] - 25t^2}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{25[(\Delta t)^2 + 2\Delta t(t) + t^2 - t^2]}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{25[(\Delta t)^2 + 2\Delta t(t)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{25\Delta t[(\Delta t + 2t)}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} 25(\Delta t + 2t) = 50t$$

esta es la razón de cambio de A (en centímetros cuadrados por segundo) con respecto al tiempo t. Por ejemplo, cuando t = 10 de modo que x = 50 los valores de las dos derivadas de A son:

$$\left.\frac{dA}{dx}\right|_{x=10} = (2)(50) = 100\, cm^2/cm$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{t=50} = (50)(10) = 500\, cm^2/seg$$

Ejemplo#5

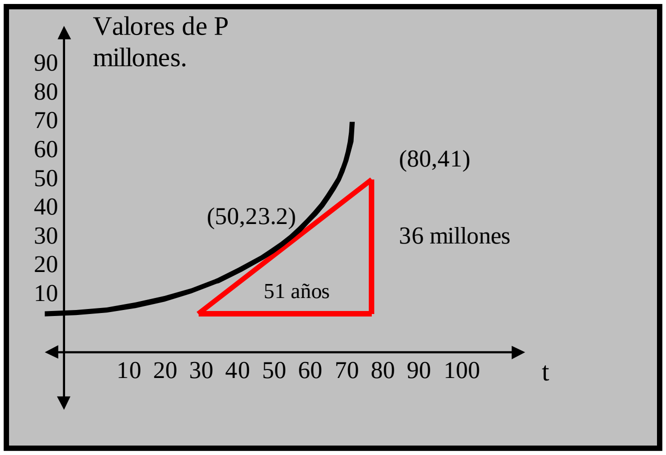
Estime la razón instantánea de crecimiento en 1850.
Utilizando los datos de la tabla #2.2.1.

Tabla#2.2.1. De la población P de E.U. (en millones) a intervalos de 10 años.

t	año	Poblac.(millon.)
0	1800	5.3
10	1810	7.2
20	1820	9.6
30	1830	12.9
40	1840	17.1
50	1850	23.2
60	1860	31.4
70	1870	38.6
80	1880	50.2
90	1890	62.9
100	1900	76.0

Tomemos t=0 años en 1800, así t =50 en 1850. Grafiquemos los datos de nuestro ejemplo agregando la curva que se ajusta a esos datos. Como quiera que se obtenga, una curva que se ajuste a los datos ha de ser una buena aproximación a la gráfica verdadera de la función desconocida P = f(t).

La gráfica resultante es la que aparece en la figura#2.2.5.



Figura#2.2.5.

La razón instantánea de cambio $\frac{dP}{dt}$ será la pendiente de la tangente al punto (50,23.2). Entonces, tendremos

$$m = \frac{41-5}{80-29} = \frac{36}{51} \approx 0.71$$

el valor aproximado de la pendiente de la tangente como $\frac{dP}{dt} \approx 0.71$ millones de personas por año (en 1850). Aunque no hubo censo nacional 1851, se puede esperar que la población de E.E.U.U haya tenido un valor aproximado de 23.2 + 0.71 = 23.9 millones de habitantes.

2.3 Notaciones.

Estudiaremos algunas alternativas de notación para derivadas que serán de gran ayuda.

Cuando se interpretó la derivada como razón de cambio, se encontró útil emplear la notación variable dependiente y variable independiente y=f(x), Δx=h, Δy=f(x+Δx)-f(x) esto condujo a la **“notación diferencial”** o **notación de Leibniz**.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

para la derivada. La notación de Leibniz debe su origen a uno de los dos principales fundadores del cálculo Gottfried Wilheml Leibniz, dando lugar a que todavía sea utilizada en especial en los campos de aplicación como la química y la economía.

Cuando se use esta notación, es importante recordar que el símbolo $\frac{dy}{dx}$ es sólo una alternativa para la derivada f'(x); no es un cociente de dos entidades separadas dy y dx.

Por lo general se usa una tercera notación para la derivada $f'(x)$; es Df(x). Aquí D "opera" sobre la función f para producir la derivada Df. En tal caso podemos escribir la derivada de $y = f(x) = x^2$ en cualquiera de estas tres formas:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = D\,x^2$$

2.4 Reglas básicas de derivación.

Las reglas básicas de derivación son reglas generales que simplifican la tarea de encontrar derivadas. Comenzamos el desarrollo de estas reglas con la derivada f' de la función f:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$ Luego tenemos

1. Derivada de una función constante.

Demostración :

Sea $\frac{d}{dx}(k) = k\text{cte} \in R$

$$\frac{d}{dx}(k) = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(k) = 0}$$

No hay cambio, la razón de cambio es cero. "La derivada de una constante es cero".

2. Derivada de la variable independiente.

Demostración :

$\frac{d}{dx}(x)$ donde $y = x$ ó $f(x) = x$

$$\frac{d}{dx}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0}(1)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

"La derivada de una variable respecto a ella misma es igual a uno."

3. Derivada de una suma de funciones.

Demostración:

Sea F(x) = f(x) + g(x), x $\in$ Dominio f $\cap$ Dominio de g.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$F'(x) = f'(x)+g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx} =$$

$$\boxed{(u+v)' = u'+v'}$$

4. Derivada del producto de una constante por una función.

Demostración:

Sea F(x) = kf(x), k es constante $\in$ R.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[k\,\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= k\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$F'(x) = kf'(x), \frac{d}{dx}(ku) = k\frac{du}{dx},$$

$$\boxed{(ku)' = ku'}$$

La derivada de una "constante por una función" es igual a la constante por la derivada de la función.

5. Derivada de una función compuesta.(REGLA DE LA CADENA)

Demostración :

Sea y = f(x), siendo u = g(x). Entonces "y" es una función de x por medio de u, o sea,

y = f [g(x)]

Queremos hallar $\frac{dy}{dx}$ donde

$\left[\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right]$ luego

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} * \frac{\Delta u}{\Delta x}$ y esto es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} * \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Si $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0$

Entonces tenemos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} * \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$ ***Regla de la Cadena***

Si y = f (u), u = g (v), v = h (z), z = i (x) entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dv} * \frac{dv}{dz} * \frac{dz}{dx}$$

6. Derivada de y = ln(x) o f(x) = ln(x)

Demostración :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\ln(x+h) - \ln x\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h} * \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h} * \ln\left[1+\frac{h}{x}\right]\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x} * \frac{x}{h} * \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)\right) \quad \text{multiplic. y dividiendo por x.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x} * \ln\left[1+\frac{h}{x}\right]^{x/h}\right] = \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\left[\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]$$

$$\frac{h}{x} = \alpha \Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{1}{\alpha}$$
$$h \to 0 \Rightarrow \alpha \to 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right] = \frac{1}{x}\ln(e) \text{ donde } \ln(e) = 1$$
$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Si y = ln(u), u=f(x)
y depende de ***x*** a través de ***u*** y = f(u), u=f(x)

Por la regla de la cadena tenemos :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

$$\boxed{(\ln(u))' = \frac{1}{u} * u' = \frac{u'}{u}}$$

7. Derivada del producto de dos funciones

Demostración :

Sea y = u*v donde u = f(x) y v = g(x).
Tomemos logaritmo natural en ambos lados de la igualdad:

ln y = ln(u*v)
ln y = ln(u) + ln(v)

Derivando respecto a ***x***, obtenemos :

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{u}u' + \frac{1}{v}v'$$

$$y' = y\frac{1}{u}u' + y\frac{1}{v}v'$$

$$y' = uv\frac{1}{u}u' + uv\frac{1}{v}v'$$

$$\boxed{(u.v)' = u'.v + u.v'}$$

La derivada de un producto es igual a la derivada del primer factor por el segundo factor más el primer factor por la derivada del segundo factor.

8. Derivada del cociente de dos funciones.

Demostración :

Sea y = $\frac{u}{v}$, u = f (x) y v = g(x)
Tomemos logaritmo ln(y) = ln(u) - ln(v)
y derivamos respecto a x :

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{u}u' - \frac{1}{v}v'$$

$$y' = y(\frac{1}{u}u' - \frac{1}{v}u')$$

$$y' = \frac{u'}{v}\frac{1}{u}u' - \frac{u}{v}\frac{1}{v}v'$$

$$y' = \frac{u'}{v} - \frac{uv'}{v^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}}$$

9. Derivada de la función Potencial.

Demostración :

Sea $y = u^n$ donde $u = f(x)$ y $n \in R$.
Aplicando logaritmos

$\ln(y) = n\ln(u)$

y derivando respecto a x :

$$\frac{1}{y}y' = n\frac{1}{u}u'$$

$$\boxed{(u^n)' = nu^{n-1}u'}$$

La derivada de la función potencial es igual al exponente por la potencia, con el exponente disminuido en uno, por la derivada de la base de la potencia.

10. Derivada de la función Exponencial.

Demostración :

Sea $y = a^u$ donde $u = f(x)$ y $a \in R$.

Aplicando logaritmos

$\ln(y) = u\ln(a)$

y derivando respecto a x :

$$\frac{1}{y}y' = \ln(a)u'$$
$$y' = y\ln(a)u'$$

$$\boxed{(a^u)' = a^u \ln(a)u'}$$

La derivada de una función exponencial es igual a la misma función por el logaritmo de la base por la derivada del exponente.

Fórmulas Especiales.

11. $(x^n)' = nx^{n-1}(x)'$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$$

12. $(e^u)' = e^u \ln(e)u'$

$$\boxed{(e^u)' = e^u u'}$$

13. $(e^x)' = e^x(x')$

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

14. $(\sqrt{u})' = (u^{1/2})' = \dfrac{1}{2}u^{-1/2}u'$

$$\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

EJEMPLOS

Encontrar las derivadas de las siguientes funciones.

1. $\mathbf{y = 4x^7}$

Solución:
Aplicando la regla # 4

$$(ku)' = ku'$$

$$y' = 4(x^7)$$

Aplicando la regla # 11

$$y' = 4(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$y' = 28x^6$$

2. y = 3x² + 5x - 8

Solución:
Aplicando la regla # 3

$$y' = u' + v' + z'$$

$$y' = D(3x^2) + D(5x) - D(8)$$

$$y' = 6x + 5 - 0$$

3. $\mathbf{y = \dfrac{4}{\sqrt{x}} - 7x\,.\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 4}$

Solución:

$$y' = 4x^{-1/2} - 7x.x^{1/3} + (x^2)^{-1/3} + 4$$

$$y' = 4x^{-1/2} - 7x^{4/3} + x^{-2/3} + 4$$

$$y' = D(4x^{-1/2}) - D(7x^{4/3}) + D(x^{-2/3}) + D(4)$$

$$y' = -2x^{-3/2} - \frac{28}{3}x^{1/3} - \frac{2}{3}x^{-5/3} + 0$$

4. y= (x² - 1)⁴

Solución:
Aplicando la regla # 9

$$y' = D(x^2 - 1)^4$$

$$y' = (u^n) = nu^{n-1}u'$$

$$y' = 4(x^2 - 1)^3 2x$$

$$y' = 8x(x^2 - 1)^3$$

5. $\boldsymbol{y = \sqrt{1 + 4x - 5x^3}}$

Solución:

Aplicando la regla # 14

$$y' = (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y' = \frac{4 - 15x^2}{2\sqrt{1 + 4x - 5x^3}}$$

6. $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{1 - 3x^2}}}$

Solución:

Por la regla del cociente

$$y' = \frac{\left(1 - 3x^2\right)(0) - (1)\left(\dfrac{-6x}{2\sqrt{1 - 3x^2}}\right)}{\left(\sqrt{1 - 3x^2}\right)^2}$$

$$y' = \frac{3x}{\left(1 - 3x^2\right)\left(\sqrt{1 - 3x^2}\right)}$$

$$y' = \frac{3x}{\left(1 - 3x^2\right)^{3/2}}$$

7. Utilizando la regla de la Cadena encontrar las derivadas de:

(a) $\mathbf{y = (1+4x^3)^4}$

(b) $\mathbf{y = \dfrac{1}{(2x^3 - 7)^3}}$

Solución:

(a) $y = (1+4x^3)^4$

Considérese :

$y = u^4$ donde $u = (1+4x^3)$

por tanto por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

tenemos

$$= (4u^3)(12x^2)$$
$$= 4(1+4x^3)^3 (12x^2)$$
$$= 48x^2 (1+4x^3)^3$$

(b) $y = \dfrac{1}{(2x^3 - 7)^3}$

Considérese:

$y = \dfrac{1}{u^3} = u^{-3}$ donde $u = (2x^3 - 7)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

$$= (-3u^{-4})(6x^2)$$

$$= -3(2x^3 - 7)^{-4} (6x^2)$$

$$= -18x^2 (2x^3 - 7)^{-4}$$

$$= -\frac{18x^2}{(2x^3 - 7)^4}$$

PROGRAMACION

El Software Mathematica posee comandos que nos permiten encontrar derivadas.

Ejemplo #1

Encontrar las siguientes derivadas usando el software Mathemtica

Sugerencia: Usar el comando **D[f,x]**, que permite calcular la derivada parcial de la función ”f” con respecto a la variable ”x”. El comando **Simplify** se usa para llevar la expresión resultante hasta su más mínima expresión.

1. $y = \frac{4}{3}\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}$

Usando los comandos la instrucción es:

Simplify[D[4/3(((X-1)/(X+2))^(1/4)),X]]

La respuesta es:

$$y' = \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^3}(x+2)^2}$$

2. $y = \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

La instrucción es:

Simplify[D[(2+Sqrt[X])/(2-Sqrt[X]),X]]

La respuesta es:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})^2}$$

3. $(1-3x)(\sqrt{1+2x})$

La instrucción es:

Simplify[D[(1-3X)*(Sqrt[1+2X]),X]]

La respuesta es:

$$y' = \frac{-2 - 9x}{\sqrt{1+2x}}$$

Ejemplo #2

Use el software para resolver el siguiente problema:

Una ciudad es afectada por una epidemia de gripe asiática. Las estimaciones son que el número de personas enfermas de gripe en "t" días después del comienzo de la epidemia está dado por $p(t)= 120t^2 - 2t^3$, siendo $0 \le t \le 40$. Cuál es el índice de difusión de la enfermedad en el momento t=10, t=0, t=40?.

La función es:

```
IndDif[F_,T_,ListaT_]:=Module[{Derivada,Tx,Comlist={},Indice},
                        Comlist=ListaT;
                        Derivada=D[F,T];
                        Print["L derivada de p(t) es:"];
                             Print[Derivada];
                             Print["Los índices de difusión son:"];
                             While[Comlist!={},
                            Tx=First[Comlist];
                             Indice=N[Derivada/.T->Tx,2];
                             Print["Para t=",Tx,"el índice es,Indice]; Indice=0;
                             Comlist=Delete[Comlist,1]; Tx=0;]]
```

Llamado a la función

```
IndDif[120T^2-2T^3,T,{10,0,40}]
```

El resultado de la llamada es:

La derivada de p(t) es:

$$\mathbf{240T - 6T^2}$$

Los índices de difusión son:

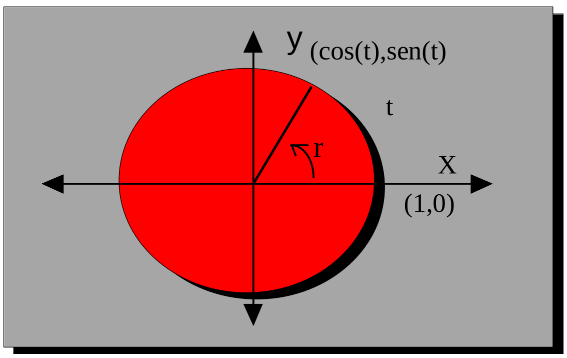
Para t=10 el índice es 1800.

Para t=0 el índice es 0.

Para t=40 el índice es 0.

2.5 Derivadas de Funciones Circulares.

Las cosas relativas a la rotación de ruedas y velocidades conducen de manera inevitable al estudio de las funciones senos, cosenos y de sus derivadas. La siguiente figura #2.5.1 nos recuerda la definición de estas funciones.



Figura#2.5.1.

A continuación, se deberá pensar en t o en x como un número que mide la longitud de un arco del círculo unitario o, lo que es equivalente, como el número de radianes del ángulo correspondiente. Entonces, f(t) = sen(t) y g(t) = cos(t) son funciones en las que tanto el dominio como el rango son números reales.

Reglas de Derivación

Se prefiere usar x en vez de t como variable básica.

1. Derivada de la función y = sen(x)

Demostración:

Hacemos uso a la definición de derivada y de la identidad de adición para Sen(x+h).

$$D_x(\operatorname{sen} x) = \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cosh + \cos x \operatorname{senh} - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-\operatorname{sen} x \frac{1-\cosh}{h} + \cos x \frac{\operatorname{senh}}{h} \right)$$

$$= -\operatorname{sen} x\left[\lim_{h\to 0} \frac{1-\cosh}{h} \right] + \cos x\left[\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}}{h} \right]$$

Para concluir tenemos dos límites para evaluar y la siguiente tabla #2.5.1 que sugiere

Tabla#2.5.1.

h	$\mathbf{\frac{1 - Cosh}{h}}$	$\mathbf{\frac{Sinh}{h}}$
1.0	0.45970	0.84147
0.5	0.24483	0.95885
0.1	0.04996	0.99833
0.01	0.00500	0.99998
↓	↓	↓
0	?	?
↑	↑	↑
-0.01	-0.00500	0.99998
-0.1	-0.04996	0.99833
-0.5	-0.24483	0.95885
-1.0	-0.45970	0.84147

que $\lim_{h\to 0} \frac{1-\cosh}{h} = 0,\ \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{senh}}{h} = 1$

Entonces

Dx (senx) = (-senx)(0) + (cosx)(1) = cosx

Dx (senx) = cosx

Ahora bien si y = senu, u = f(x) por la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

Dx(senu) = cosu.u'

$$\frac{dy}{dx} = \cos u * \frac{du}{dx} =$$

2. Derivada de la función y = cosx.

Demostración:

En forma semejante a la función senx tenemos que

$$Dx(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cos x \cosh - \operatorname{sen} x \operatorname{senh} - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(-\cos x \frac{1 - \cosh}{h} - \operatorname{sen} x \frac{\operatorname{senh}}{h} \right)$$

= (-cosx)(0) - (senx)(1)

= -senx

Dx (cosx) = - senx

Si y = cosu , u = f(x)

Dx(cosu) = -senu.u'

3. Derivada de la función y = tanu, u=f(x)

Demostración:

Sea:

$$y = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$$

$$y' = \frac{\cos u . \cos u . u' - \operatorname{sen} u . (-\operatorname{sen} u) u'}{\cos^2 u}$$

$$y' = \frac{\cos^2 u.u' + \operatorname{sen}^2 u.u'}{\cos^2 u} = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$\boxed{Dx(\tan u) = \sec^2 u.u'}$$

$$\boxed{Dx(\tan x) = \sec^2 x}$$

4. Derivada de la función y = cotu, u=f(x)

Demostración:

Sea:

$$y = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen} u(-\operatorname{sen} u)u' - \cos u(\cos u)u'}{\operatorname{sen}^2 u}$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen}^2 u.u' - \cos^2 u.u'}{\operatorname{sen}^2 u} = \frac{-u'(\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u)}{\operatorname{sen}^2 u}$$

$$= \frac{-u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -\csc^2 u.u'$$

$$\boxed{Dx(\cot u) = -\csc^2 u.u'}$$

$$\boxed{Dx(\cot x) = -\csc^2 x}$$

5. Derivada de la función y = secu, u=f(x)

Demostración:

Sea:

$$y = \frac{1}{\cos u}$$

$$y' = \frac{\cos u(0) - 1(-\operatorname{sen} u)u'}{\cos^2 u}$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen} u.u'}{\cos^2 u}.u' = \frac{1.\operatorname{sen} u.u'}{\cos u.\cos u}$$

$$\boxed{Dx(\sec u) = \sec u.\tan u.u'}$$

$$\boxed{Dx(\sec x) = \sec x.\tan x}$$

6. Derivada de la función y = cscu, u=f(x)

Demostración:

Sea:

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen} u(0) - 1(\cos u)u'}{\operatorname{sen}^2 u}$$

$$y' = \frac{-\cos u}{\operatorname{sen}^2 u}.u' = \frac{-1.\cos u.u'}{\operatorname{sen} u.\operatorname{sen} u}$$

$$\boxed{Dx(\csc u) = -\csc u.\cot u.u'}$$

$$\boxed{Dx(\csc x) = -\csc x.\cot x}$$

Ejemplo #1

Encuentre las derivadas de:

1. $y = \text{sen}4x^2$

Apliquemos la regla de la derivada de la función seno.

$$y' = \cos 4x^2\,(8x)$$
$$y' = 8x\cos 4x^2$$

2. $y = \text{sen}^3\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

$$y = \left(\text{sen}\sqrt{1-x^2}\right)^3$$

$$y' = 3\left(\text{sen}\sqrt{1-x^2}\right)^2.\cos\sqrt{1-x^2}.\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = -\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\ \text{sen}^2\sqrt{1-x^2}.\cos\sqrt{1-x^2}$$

Ejemplo #2

Encuentre la ecuación de la tangente a la gráfica $y = 3\text{sen}2x$ en el punto $(\pi/2,0)$.

La gráfica se muestra en la figura#2.5.2

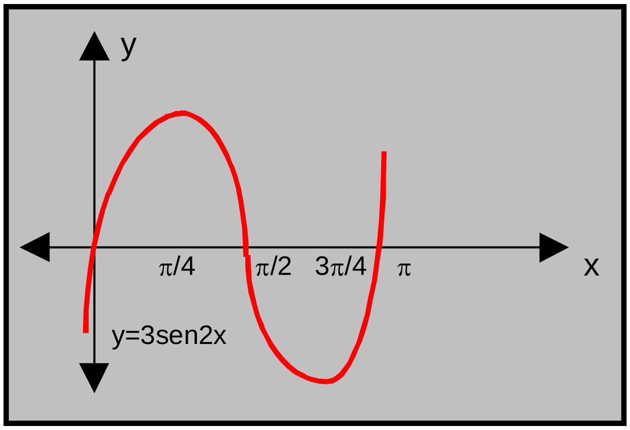


Figura #2.5.2

Solución:

Encontremos primero la derivada Dx(3sen2x).

y' = 3 Dx(sen2x)
y' = 3 cos2x Dx(2x)
y' = 3 cosx (2)
y' = 6 cos2x

En **x = π/2** la derivada tiene el valor -6, que es, por lo tanto, la pendiente de la tangente deseada.

La ecuación de la recta es $y - 0 = - 6 (x - \pi/2)$,

$$\boxed{y = -6x + 3\pi}$$

Ejemplo #3

Encuentre Dx $\left(\ln \sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} \right)$

Aplicando propiedades de los logaritmos tenemos:

que $\quad$ **y =** $\ln \left(\dfrac{(1-\cos x)^{1/2}}{(1+\cos x)^{1/2}} \right)$

$$y = \frac{1}{2}\ln(1-\cos x) - \frac{1}{2}\ln(1+\cos x)$$

ahora usemos la regla para derivar logaritmos

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x(1+\cos x) + \operatorname{sen} x(1-\cos x)}{2(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{2(1-\cos^2 x)}$$

$$y' = \frac{2\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$$

PROGRAMACION

Podemos utilizar el Sw. Mathematica para ayudarnos a encontrar las siguientes derivadas.

1. La instrucción es:

D[(Sin[Sqrt[1-X^2]])^4,X]

La respuesta que da el sw es:

$$\frac{-4\ X\ \mathrm{Cos}[\mathrm{Sqrt}[1\ -\ X^2\ ]]\ \mathrm{Sin}^3[\mathrm{Sqrt}[1\ -\ X^2\ ]]}{\mathrm{Sqrt}[1-X^2]}$$

2. La instrucción es:

D[Log[Cos[Sqrt[X]]],X]

La respuesta es:

$$\frac{-\mathrm{Tan}[\mathrm{Sqrt}[X]]}{2\mathrm{Sqrt}[X]}$$

3. La instrucción es:

Simplify[D[Log[(1+Sin[X])/(1-Sin[X])],X]]

La respuesta es:

2 Sec[X]

4. La instrucción es:

Simplify[D[(Sin[X])^2/(1+Cos[X])^2,X]]

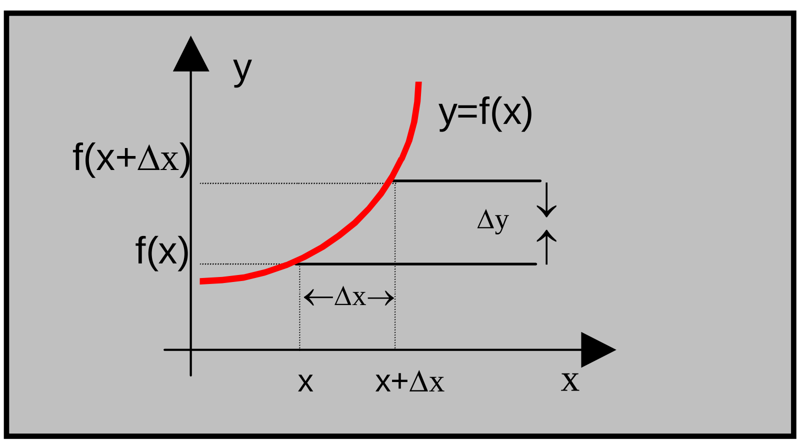
La respuesta es: $\text{Sec}^2\frac{x}{2}\ \text{Tan}\frac{x}{2}$

2.6 Incrementos, diferenciales y aproximación lineal.

Anteriormente aprendimos a diferenciar o derivar una gran variedad de funciones algebraicas y trigonométricas, pero en ocasiones necesitamos una estimación rápida y sencilla del cambio que resulta en **f(x)** a partir de un cambio en ***x***. Escribamos ***y*** por f(x) y supongamos que el cambio en la variable independiente es el incremento Δx, con el que ***x*** cambia de su valor original al nuevo valor $\mathbf{x + \Delta x}$. El verdadero cambio en el valor de ***y*** es el incremento Δy, calculado mediante la resta del nuevo valor menos el antiguo.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Observemos la siguiente gráfica de la figura #2.6.1 donde se representan los incrementos Δx y Δy geométricamente.

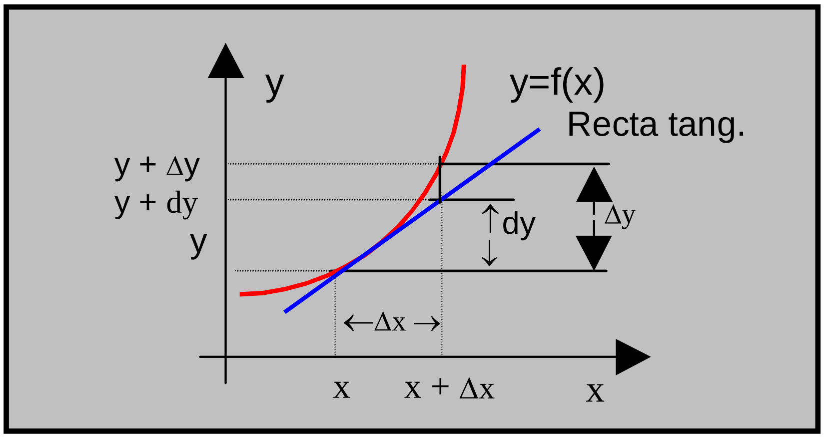


Figura#2.6.1. Incrementos “x” y “y”.

Comparemos ahora el verdadero incremento Δy con el que ocurriría en ***y*** si continuara variando a la razón fija $\mathbf{f'(x)}$ cuando ***x*** cambia a $x + \Delta x$. Este cambio hipotético de ***y*** es la ***<u>diferencial</u>.***

$$\mathbf{dy = f'(x)\,\Delta x}$$

a como se muestra en la siguiente figura #2.6.2



Figura#2.6.2.

dy es el cambio en la altura de un punto que se mueve a lo largo de la tangente, en el punto (x,f(x)), en lugar de hacerlo a lo largo de la curva $y = f(x)$ siendo Δy el cambio de la función a lo largo de la curva.

Imagine que **x** está fijo entonces la ecuación $\mathbf{dy = f'(x)\Delta x}$ muestra que la diferencial dy es una función lineal del incremento Δx. Por esta razón, dy se **llama "aproximación lineal"** al verdadero incremento Δy. Podemos aproximarnos a $f(x+ \Delta x)$ escribiendo dy en lugar de Δy:

$$\mathbf{f(x+ \Delta x) = y + \Delta y \approx y + dy}$$

puesto que $y = f(x)$ y $dy = \mathbf{f'(x)\Delta x}$, esto da la fórmula de aproximación lineal

$$\mathbf{f(x+ \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x}$$

La idea es que esta última aproximación es "buena", al menos cuando Δx sea relativamente pequeño. Si combinamos las fórmulas anteriores vemos que

$$\mathbf{\Delta y \approx f'(x)\,\Delta x = dy}$$

Siendo así, la diferencial $\mathbf{dy=f'(x)\Delta x}$ es una aproximación al verdadero incremento

$\mathbf{\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).}$

Ejemplo #1

Sea $y = 3x^2 - 5$
(a) Calcular el incremento Δy correspondiente a un incremento Δx de x.
(b) Calcular Δy cuando x cambia de 2 a 2.1.

Solución:

(a) Aplicando la definición $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ tenemos

$$\Delta y = [\ 3(x + \Delta x)^2 - 5] - [3x^2 - 5]$$
$$\Delta y = [\ 3(\ x^2 + 2x\,(\Delta x) + (\Delta x)^2) - 5] - 3x^2 + 5]$$
$$\Delta y = \ 3x^2 + 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2 - 5 - 3x^2 + 5$$
$$\Delta y = \ 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2$$

(b) Deseamos calcular Δy cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.1$

sustituyendo en la fórmula para Δy,
$$\Delta y = \ 6(2)(0.1) + 3(0.1)^2$$
$$\Delta y = 12(0.1) + 3(0.01) = 1.2 + 0.03 = 1.23$$

Por tanto, el cambio de "y" es 1.23 cuando "x" varía de 2 a 2.1. También podemos calcular Δy directamente como sigue.
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(2.1) - f(2)$$
$$\Delta y = [\ 3(2.1)^2 - 5] - [\ 3(2)^2 - 5] = 1.23$$

Ejemplo #2

Sea $y = 3x^2 - 5$

Utilizar dy para estimar Δy cuando x cambia de 2 a 2.1.
Solución:

En el ejemplo #1 vimos que $\Delta y = 1.23$ para $y = 3x^2 -5$.

Usando de definición $dy = f'(x)dx$
$$dy = 6x\,dx$$

En este ejemplo, $x = 2$, $\Delta x = dx = 0.1$, y

$$dy = (6)(2)(0.1) = 1.2$$

Observe que el valor 1.2 coincide con el valor exacto hasta la primera cifra decimal.

Realizar una pequeña función para encontrar el valor aproximado de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{8.03}}$ **usando diferenciales.**

```
Aproxdif[F_,X_,ValX_,Xsdelta_]:=Module[{Ydelta},
                                Derivada=D[F,X];
                                Print["La derivada es"];
                                Print[Derivada];
                                Ydelta=N[Derivada/.X->ValX,3]*Xsdelta;
                                EvalFun=N[F/.X->ValX,3];
                                Valaprox=EvalFun + Ydelta;
                                 Print["DeltaY= ",Ydelta];
                                 Print["F(",ValX,")= ",EvalFun];
                                 Print["El valor aproximado de F(x) =  ",F," es ",Valaprox]]
```

Llamado a la función Aproxdif[ ]

Aproxdif[1/(X)^(1/3),X,8,0.03]

El resultado de la llamada es:

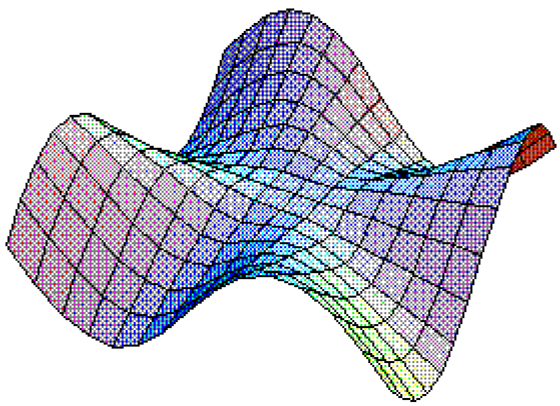
La derivada es

$$-\frac{1}{3x^{4/3}}$$

DeltaY= -0.000625

F(8)= 0.5

El valor aproximado de F(x) = $x^{-1/3}$ es 0.499375.



Segunda Unidad
Razón de Cambio.
Problemas y Ejercicios

2.2 Derivada: Razón de cambio.

» Para las siguientes funciones:

a). Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.

b). Encuentre la ecuación de la recta.

c). Usando el Sw. Mathematica grafique la función y su recta tangente.

1) $f(x) = x^2$ en (1, f(1))

2) $f(x) = -x^2$ en (4, f(4))

3) $f(x) = 2x – 1$ en (4, 7)

4) $f(x) = x^2 + 4$ en (-1, 5)

5) $f(x) = x^2 + 8x$ en (0, 0)

6) $f(x) = x^2 -5x +4$ en (2,-2)

7) $f(x) = x^3$ en (1, f(1))

8) $f(x) = x^3 + x^2$ en (2, f(2))

9) $f(x) = \frac{1}{x}$ en (1/3, f(1/3))

10) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ en (0, f(0))

» Para los ejercicios del 11 al 14 determine la razón de cambio promedio de la función dada en el intervalo indicado. Para esto programe una función en el Sw. Mathematica.

Sugerencia : Utilizar reglas de sustitución.

11) $f(x) = x^2 + 2x^2 - 4x$; $[-1, 2]$

12) $f(x) = \text{Cos}x$; $[-\pi,\pi]$

13) $f(x) = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{(x^2 - 2)}}$; $[1, 1.4]$

14) $f(x) = \sqrt{\mathbf{x}}$; $[0, 0.0001]$

»Resuelva los problemas y luego impleméntelos usando el Sw. Mathematica.

15) Cierta población de roedores asciende a

$$\mathbf{P = 100[1+ (0.3)t + (0.04)t^2]}$$

después de t meses:

a) Cuánto tardará esta población en duplicar su tamaño inicial ($t = 0$)?.

b) Cuál es la razón de crecimiento de la población cuando $P = 200$?.

16) Los siguientes datos dan la distancia s, en pies recorridos por un carro de aceleración (que comienza desde el reposo) en los primeros t segundos.
Use el método gráfico para estimar su rapidez (en millas por hora) Cuando t = 20s y también cuando t = 40s.

t	0	10	20	30	40	50	60
s	0	224	810	1655	2686	3850	5109

2.4 Reglas de Derivación.

»Diferencie las funciones dadas en los siguientes problemas, especificando las reglas de derivación que usó, luego compruebe los resultados utilizando el Sw. Mathematica, también especifique el procedimiento.

17) $\mathbf{f(x) = \sqrt{x^3 + 1}}$

18) $\mathbf{f(x) = (2x^2 - x + 7)^{3/2}}$

19) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2x^3)^{4/3}}$

20) $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

21) $f(t) = \sqrt{\dfrac{t^2+1}{t^2-1}}$

22) $f(x) = \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3$

23) $f(v) = \dfrac{\sqrt{v+1}}{v}$

24) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$

25) $f(x) = (1 - x^2)(2x + 4)^{4/3}$

26) $f(x) = (1+\dfrac{1}{t})^2\,(3t^2 + 1)^{1/2}$

27) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(3x+4)^5}$

28) $f(x) = \dfrac{(2x+1)^{1/2}}{(3x+4)^{1/3}}$

29) $f(x) = \ln\left[\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right]$

30) $f(x) = \ln(\ln(3 - 2x^3))$

» En los problemas 31 al 36 encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el valor de x indicado y luego trace la gráfica de la función y su recta tangente usando el Sw. Mathematica.

31) $y = 1/x^2$; $x = ½$

32) $y = 4x - 1/x$; $x = -1$

33) $y = (2x^2 - 4)(x^3 + 5x + 3)$; $x = 0$

34) $y = \dfrac{5x}{x^2+1}$; $x = 2$

35) $y = 2x^3 - 1$; $x = -1$

36) $y = 4x^2 - 4x - 20$; $x = 3$

»Resuelva los problemas y luego implemente usando el Sw. Mathematica.

37) La ley de la gravitación universal establece que la fuerza **F** de atracción entre dos cuerpos de masa $\mathbf{m_1}$ y $\mathbf{m_2}$, separados una distancia **r** es $\mathbf{F = \dfrac{km_1m_2}{r^2}}$**,** en donde **k** es una constante. Cuál es la razón de cambio instantánea de **F** con respecto a **r** cuando **r = ½ km** ?.

38) El periodo **P** (segundos) de aceleración de un péndulo simple de longitud **L** (pies) está dado por $\mathbf{P = 2\pi\sqrt{L/g}}$, donde **g = 32 fs/s²**. Encuentre la razón de cambio de **P** con respecto a **L** cuando **P = 2**.

2.5 Derivada de Funciones Circulares.

»Encuentre las derivadas de las siguientes funciones circulares, especificando el desarrollo hasta llegar al resultado y luego compruebe usando el Sw. Mathematica, también especifique el procedimiento.

39) $y = x^2 \mathrm{sen}x + 2x\cos - 2\mathrm{sen}x$

40) $y = \mathrm{tg}2x + 2/3\mathrm{tg}^3 2x + 1/5\ \mathrm{tg}^5 2x$

41) $y = \sec x\,(1 + \ln\cos x)$

42) $y = x\,e^x(\mathrm{sen}x - \cos x) + e^x\cos x$

43) $y = 1/2\ \mathrm{tg}^2\sqrt{x} + \ln\cos\sqrt{x}$

44) $y = \left(\dfrac{\mathrm{Sen}}{1+\mathrm{Cos}}\right)^2$

45) $y = \mathrm{sen}(\ln x)\cos(\ln x) - \ln(1/x)$

» Resuelva e implemente:

46) Una pequeña función para obtener la pendiente de la recta tangente a la gráfica **f(x) = Senx** en $\mathbf{x = \dfrac{\pi}{2}}$ y en $\mathbf{\dfrac{4\pi}{3}}$ al ejecutar la función además de los resultados la función debe presentar la gráfica de la función con las tangentes.

2.6 Incrementos, Diferenciales y Aproximación Lineal.

» En los problemas 47 y 48 complete la siguiente tabla para cada función, para esto programe una pequeña función en el Sw. Mathematica.

x	Δx	Δy	dy	$\Delta y - dy$
2	1			
2	0.5			
2	0.1			
2	0.01			

47) $y = 5x^2$

48) $y = \dfrac{1}{x}$

»En los problemas 49 al 52 utilice diferenciales para encontrar una aproximación a la expresión dada.

49) $\sqrt{37}$

50) $\dfrac{1}{\sqrt{96}}$

51) $(1.8)^5$

52) $9^{2/3}$

Programe una función en el Sw. Mathematica para encontrar cada aproximación.

Sugerencia: - Escribir cada expresión como una función.
- Definir el incremento en x (Δx).
- La función puede recibir: la función, el valor x, Δx, ... etc.

» Resuelva e implemente en el Sw. Mathematica.

53) El área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$

a) Dado que el radio de un círculo cambia de 4cm a 5cm. Calcule el cambio exacto del área.
b) Cuál es el cambio aproximado del área?.

PROYECTO DE LA SEGUNDA UNIDAD.

Proyecto #3.

Suponga que desea probar el velocímetro de un carro contra el odómetro (asuma que el odómetro es preciso). Que usted conduce a lo largo de la carretera y trata de mantener la velocidad constante a 50 millas/h, mientras otra persona toma distancias y las mide en intervalos regulares de 1 minuto.

Los datos recogidos fueron:

Tiempo (minutos)	Distancia recorrida (millas)
1	0.8
2	1.6
3	2.4
4	3.2
5	4.0
6	4.8
7	5.7
8	6.4
9	7.3
10	8.1

a). Encuentre una expresión algebraica para una función **s(t)** que permita obtener la distancia recorrida por un carro, como una función de tiempo **t** para valores de **t** bajo consideración.

b). Encuentre una expresión algebraica para una función $\bar{\mathbf{v}}$(t) que permita obtener la velocidad promedio, como una función de tiempo **t.**

c). Encuentre una expresión para una función **v(t)** que permita obtener la velocidad instantánea, como una función de tiempo **t**, basándose en la expresión encontrada para la velocidad promedio.

d). Programe una función en el Sw. Mathematica, que permita obtener la velocidad promedio y la velocidad instantánea, conociendo la distancia **s(t)** y el tiempo **t**.

3 Tercera Unidad
Problemas de Valor Inicial

Contenido

3.1 Ecuación Diferencial.

El lenguaje del cambio es natural para expresar la mayoría de las leyes y principios científicos. Por ejemplo, la ley de enfriamiento de Newton dice que la razón de cambio de la temperatura T de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura del medio ambiente. Es decir,

$$\frac{dT}{dt} = K(A - T) \qquad (1)$$

donde K es una constante positiva y A (se supone por lo general que es contante) es la temperatura ambiente. En forma similar, la razón de cambio de una población P con tasas de nacimiento y mortalidad constantes es proporcional al tamaño de la población.

$$\frac{dP}{dt} = KP \qquad (K\ \ \text{constante}) \qquad (2)$$

La ley de Torricelli implica que la razón de cambio del volumen V del agua de un tanque que se vacía es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad ***y*** del agua; esto es,

$$\frac{dV}{dt} = -K\sqrt{y} \qquad (K\ \text{constante}) \qquad (3)$$

De esta manera, los modelos matemáticos de situaciones del mundo real con frecuencia contienen ecuaciones con derivadas de funciones desconocidas, las ecuaciones como (1) y (3) se llaman **ecuaciones diferenciales.**

3.2 Forma general y función solución de una ecuación diferencial.

La clase más sencilla de ecuación diferencial tiene la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

una función dada (conocida) y la función ***y*** de ***x*** es desconocida. El proceso de encontrar una ecuación a partir de su derivada es el opuesto de la derivación y se llama **antidiferenciación.** Si podemos encontrar una función f que tenga como derivada f' decimos que **f** es una antiderivada de f' y por tanto será la función solución de la ecuación diferencial.

Definición de Antiderivada (Antidiferenciación)

Una antiderivada de la función **f '** es una f tal que **f '(x) = f(x)** donde quiera que f esté definida.

Algunos ejemplos de funciones y antiderivadas.

Función f '(x)	Antiderivada f(x)
1	x
2x	x^2
x^3	$\frac{1}{4}x^4$
cos x	sen x
sen 2x	-1/2 cos2x

Observe que si una función tiene una antiderivada entonces tiene muchas. Por el contrario, una función sólo puede tener una derivada. Mientras que $f(x) = x^3$ es una antiderivada de **f '(x)** $= 3x^2$, también lo son las funciones $g(x) = x^3 + 17$, $h(x) = x^3 + \pi$ y $k(x) = x^3 - \sqrt{2}$. En realidad, $x^3 + C$ es una antiderivada de $3x^2$ para cualquier valor de la constante C.

Con mayor generalidad, si f(x) es una antiderivada de **f '(x)**, entonces también lo será f(x) + C para cualquier constante C. La recíproca de esta proposición es más sutil: si f(x) es una antiderivada de **f '(x)** en un intervalo I, entonces toda antiderivada de **f '**(x) en **I** es la forma **f(x) + C**.

Teorema 1. **La antiderivada más general**

Si **f ' (x) = f(x)** para todo punto de un intervalo abierto I, entonces toda derivada g de f en **I** tiene la forma **g(x) = f(x) + C** donde C es una constante.

Teorema 2. **Fórmulas de antidiferenciación**

La antiderivada más general de,

$$f'(x) = x^r \ (r \neq -1) \quad \text{es} \quad f(x) = x^{r+1} / r + 1 \ + C$$

$$f'(x) = \cos x \quad \text{es} \quad f(x) = \operatorname{sen} x + C$$

$$f'(x) = \operatorname{sen} x \quad \text{es} \quad f(x) = -\cos x + C$$

Cada una de dichas fórmulas se puede comprobar por diferenciación del segundo miembro. Esta es la forma segura de verificar cualquier antidiferenciación. Para verificar que f es una antiderivada de f', calcule f' y vea si es igual.

La linealidad de la operación de diferenciación implica de inmediato que la antidiferenciación es lineal en el mismo sentido. Si f y g son antiderivadas de f' y g', respectivamente, y **a** es una constante, entonces la antiderivada más general de,

$$a f'(x) \quad \text{es} \quad af(x) + C;$$
$$f'(x) + g'(x) \quad \text{es} \quad f(x) + g(x) + C;$$

En esencia, podemos antidiferenciar una suma de términos antidiferenciando cada uno de ellos.

Ejemplo#1

Encontrar la antiderivada más general de $f'(x) = x^3 + 3\sqrt{x} - \dfrac{4}{x^2}$

Solución:

Para preparar la función f' para la antidiferenciación, la escribimos de la forma

$$f'(x) = x^3 + 3x^{1/2} - 4x^{-2}$$

Aplicando las fórmulas de antidiferenciación tenemos a:

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^{3/2}}{3/2} - \frac{4x^{-1}}{-1} + C$$

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^{3/2} + \frac{4}{x} + C$$

como antiderivada más general f de f'.

Una técnica común de antidiferenciación constante es la aplicación de la regla de la cadena en reversa. La regla de la cadena, en la forma,

$$D_x g(u) = g'(u)\frac{du}{dx}$$ conduce al siguiente resultado.

Teorema 3. <u>**Antidiferenciación de la regla de la cadena**</u>

Si u es una función diferenciable de x, y g(u) es una función diferenciable de u, entonces la antiderivada más general de

$f'(x) = g'(u)\dfrac{du}{dx}$ es $f(x) = g(u) + C$ donde u se expresa en términos de "x" en el segundo miembro.

Cuando se combina la fórmula del teorema (3) con las fórmulas del teorema (2) encontramos que la antiderivada más general de

$$f'(x) = u^r \frac{du}{dx} \quad (r \neq -1) \text{ es } f(x) = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C;$$

$$f'(x) = (\cos u)\frac{du}{dx} \quad \text{es } f(x) = \operatorname{sen} u + C;$$

$$f'(x) = (\operatorname{sen} u)\frac{du}{dx} \quad \text{es } f(x) = -\cos u + C;$$

La clave de la aplicación de éstas fórmulas consiste en distinguir la función apropiada **u(x)** tal que $f'(x)$ sea el producto de una función de **u** por su derivada $\frac{du}{dx}$. Entonces, sólo necesitamos antidiferenciar esa función de **u**.

Ejemplo # 2

Encuentre la antiderivada más general de $f'(x) = (x^2+1)^{10}(2x)$

Solución:

Si escogemos $u = x^2 + 1$, entonces $\frac{du}{dx} = 2x$, por lo que

$$f(x) = u^{10}\frac{du}{dx} \quad \text{donde} \quad f(x) = \frac{u^{11}}{11} + C$$

en consecuencia

$$f(x) = \frac{(x^2+1)^{11}}{11} + C$$

$$f(x) = \frac{1}{11}(x^2+1)^{11} + C$$

Ejemplo # 3

Encuentre la antiderivada más general de $f'(x) = x\sqrt{1+x^2}$

Solución:

El factor requerido sería **2x** si escogemos $u = 1 + x^2$. El término **x** está presente en **f(x)**, pero **2x** no. Por regla general, si el error es sólo un factor de multiplicación constante (aquí tenemos **x** en lugar de **2x**), el proceso aún puede funcionar. Así que podemos continuar haciendo $u = x^2 + 1$ y,

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x^2)^{1/2}(2x) \qquad \text{(Dividiendo y multiplicando por 2)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}u^{1/2}\frac{du}{dx}$$

y esto conduce a

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C$$

$$f(x) = \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

Ejemplo#4

Encuentre la antiderivada más general f(x) de $f'(x) = \text{senx.cosx}$

Solución:

Tomemos **u = senx** de modo que $\frac{du}{dx}$ = **cosx**, entonces

$$f'(x) = u\,\frac{du}{dx}$$

la antiderivada es

$$f(x) = \frac{1}{2}u^2 + C$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\text{sen}^2\,x + C$$

PROGRAMACION

El Software Mathematica puede facilitarnos un poco el trabajo al poseer un comando que nos ayuda a resolver Ecuaciones Diferenciales.

El comando principal que se usa para este propósito es la función *Dsolve* cuya sintaxis es la siguiente :

Dsolve[ecuación, Y[X],X]

Resuelve la ecuación diferencial "ecuación" hallando la expresión formal Y[X] que la verifica.

Ejemplos :

Encuentre la antiderivada más general de las siguientes derivadas usando el sw mathematica para ello.

1. $f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{4}{\sqrt[4]{x^5}}$

Solución:

DSolve[F'[X]= =((X^2)^(1/3))+4/((X^5)^(1/4))= =0,F[X],X]
Respuesta:

$$\{\{F[X] \to \frac{3x\left(x^2\right)^{1/3}}{5} - \frac{16\left(x^5\right)^{3/4}}{x^4} + C[1]\}\}$$

2. $h'(x) = \dfrac{1}{x^2}\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Solución:

DSolve[H'[X]= =(1/X^2)Sin[1/X]= =0,H[X],X]
Respuesta:

$$\{\{H[X] \to C[1] + \text{Cos}[\frac{1}{x}]\}\}$$

3. $h'(x) = \text{sen}\,7x\cos 7x$

Solución:

DSolve[H'[X]= =Sin[7X]Cos[7X]= =0,H[X],X]
Respuesta:

$$\{\{\{H[X] \to C[1] - \frac{1}{14}\cos^2[7x]\}\}$$

4. $f'(x) = \dfrac{6-5x^4}{x^2}$

Solución:

DSolve[F'[X]= =(6-5X^4)/X^2= =0,F[X],X]
Respuesta:

$$\{\{F[X] \rightarrow -\frac{6}{x} - \frac{5x^3}{3} + C[1]\}\}$$

5. $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Solución:

DSolve[F'[X]= =X/Sqrt[X^2+1]= =0,F[X],X]
Respuesta:

$$\{\{F[X] \rightarrow Sqrt[1+X^2] + C[1]\}\}$$

6. $g'(x) = \dfrac{3x-12}{x^3}$

Solución:

DSolve[G'[X]= =(3X-12)/X^3= =0,G[X],X]
Respuesta:

$$\{\{G[X] \rightarrow \frac{6}{x^2} - \frac{3}{x} + C[1]\}\}$$

3.3 Solución de problemas de valor inicial.

Resolver una ecuación diferencial significa encontrar todas sus soluciones y a veces, además de la ecuación diferencial se conoce también un valor de la función f que se llama condición inicial o valor inicial.

Las técnicas de antidiferenciación aprendidas anteriormente se usan para resolver cualquier ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Ejemplo#1

Resolver la ecuación diferencial $f'(x) = 6x^2 + x - 5$ con la condición inicial f(0) = 2.

Solución:

Aplicando antiderivadas

$$f(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C$$

Para algún número **C**. Tomando **x = 0** y usando la condición inicial dada, obtenemos

$$f(0) = 0 + 0 - 0 + C = 2$$

y así **C = 2**. Por tanto, la solución diferencial con la condición inicial dada es.

$$f(x) = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 2$$

Si un punto **P** se mueve a lo largo de una recta coordenada, entonces su función de posición **s**, es una antiderivada de su función de velocidad **v**, es decir, **s'(t) = v(t).** Análogamente, como **v'(t) = a(t),** la función de velocidad es una antiderivada de la función de aceleración. Si se conoce la velocidad o la aceleración y se tienen suficientes condiciones iniciales, entonces puede determinarse la función de posición.

Ejemplo#2

Una lancha de motor se aleja del muelle a lo largo de una línea recta con una aceleración al tiempo t dada por a(t) = 12t - 4 pie/s^2. En el tiempo t=0 la lancha tenía una velocidad de 8 pie/s y se encontraba a 15 pies del muelle. Calcular su distancia s(t) al embarcadero al cabo de t segundos.

Solución:

Como **v'(t) = 12t - 4**, antiderivando obtenemos

$$v(t) = 6t^2 - 4t + C$$

para algún número C. Tomando t = 0 y usando el hecho de que v(0) = 8, obtenemos 8= 0 - 0 + C y por lo tanto, C = 8. Entonces

$$v(t) = 6t^2 - 4t + 8$$

La antiderivada más general de **s'(t)** es

$$s(t) = 2t^3 - 2t^2 + 8t + D$$

donde D es un número arbitrario. Tomando **t = 0** y usando el hecho de que **s(0) = 15**, se define **15 = 0 - 0 + 0 + D**. Por lo tanto, **D= 15** y

$$s(t) = 2t^3 - 2t^2 + 8t + 15$$

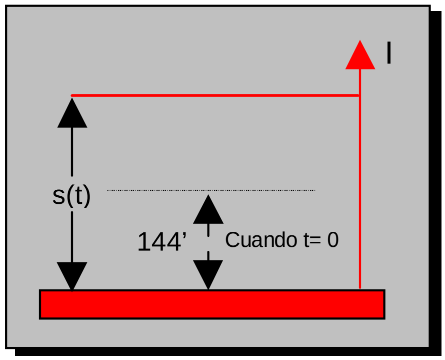
Ejemplo#3

Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde una altura de 144 pies sobre el suelo con una velocidad inicial de 96 pies/s. Despreciando la resistencia del aire, determinar su altura desde el suelo a los t segundos. Durante qué intervalo de tiempo la piedra sube?. En qué momento y con qué velocidad choca la piedra contra el suelo al descender?.

Solución:

El movimiento de la piedra puede representarse por un punto que se mueve sobre una recta vertical **l** que tiene su origen al nivel del suelo y dirección positiva hacia arriba.

La gráfica es la que aparece en la figura#3.3.1.



Figura#3.3.1

La altura desde el piso al tiempo t es s(t) y las condiciones iniciales son s(0) = 144 y v(0) = 96. Como la velocidad va disminuyendo, $\mathbf{v'(t) < 0}$; es decir, la aceleración es negativa.

Entonces, de lo mencionado anteriormente podemos decir que **a(t) = -32**

como v es una antiderivada de a, **v(t) = -32t + C**

donde **C** es un número arbitrario. Sustituyendo **t** por **0** y usando el hecho de que **v(0)=96** obtenemos que **96 = 0 + C = C** y por lo tanto,

$$\mathbf{v(t) = -32t + 96}.$$

Como $\mathbf{s'(t) = v(t)}$, antiderivando queda $\mathbf{s(t) = -16t^2 + 96t + D}$ donde **D** es un número arbitrario. Tomando **t = 0** y aplicando el hecho de que **s(0) = 144**, obtenemos **144 = -0 + 0 + D = D**. Resulta así que la altura que alcanza la piedra al tiempo **t** está dado por
s(t) = -16t2 + 96t + 144.

El objeto lanzado sube hasta que **v(t) = 0**, es decir, hasta que **-32t + 96 = 0**, o bien **t = 3**. La piedra choca con el suelo cuando **s(t) = 0**, o sea $\mathbf{-16t^2 + 96t + 144 = 0}$. Una expresión equivalente será $\mathbf{t^2 - 6t - 9 = 0}$. Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, $\mathbf{t = 3 \pm 3\sqrt{2}}$. La solución $\mathbf{3 - 3\sqrt{2}}$ no tiene sentido pues **t** no puede ser negativo. Por lo tanto, la piedra choca contra el piso a los $\mathbf{3 + 3\sqrt{2}}$ s.

La velocidad en tal momento es $\mathbf{v\,(3 + 3\sqrt{2}) = -32(3 + 3\sqrt{2}) + 96}$

$$\mathbf{= -96\sqrt{2} \approx -135.8\ pie/s}$$

PROGRAMACION

Anteriormente vimos que el Sw. Mathematica soporta el problema general de búsqueda de solución una ecuación diferencial, ahora veremos que también es posible la búsqueda de solución cuando se conoce alguna condición inicial.

Ejemplos :

En los problemas siguientes encuentre una función y=f(x) que satisfaga la ecuación diferencial dada y las condiciones iniciales prescritas para esto use el sw mathematica.

El comando principal que se usa para este propósito es la misma función *Dsolve* cuya sintaxis es la siguiente :

Dsolve[{ecuación,Y[X]==Y}, Y[X],X]

Resuelve la ecuación diferencial "ecuación" hallando la expresión formal Y[X] con la condición inicial que la verifica.

1. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\ ; \quad y(4) = 0$

Solución:

DSolve[{Y'[X]= =X^(1/2),Y[4]= =0},Y[X],X]
Respuesta:

$$\{\{Y[X] \rightarrow \frac{2(-8 + X^{3/2})}{3}\}\}$$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x+2}}\ ; \quad y(2) = -1$

Solución:

DSolve[{Y'[X]= =1/((X+2)^(1/2)),Y[2]= =-1},Y[X],X]
Respuesta:
{{Y[X] -> -5 + 2 Sqrt[2 + X]}}

3. $\frac{dy}{dx} = 3x^3 + \frac{2}{x^2} \quad ; \quad y(1) = 1$

Solución:

DSolve[{Y'[X]= =3X^3+2/(X^2),Y[1]= =1},Y[X],X]
Respuesta:

$\{\{Y[X] \rightarrow \frac{9}{4} - \frac{2}{X} + \frac{3X^4}{4}\}\}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x-13}} \quad ; \quad y(17) = 2$

Solución:

DSolve[{Y'[X]= =1/((X-13)^(1/2)),Y[17]= =2},Y[X],X]
Respuesta:

{{Y[X] -> -2 + 2 Sqrt[-13 + X]}}

3.4 Aplicaciones de la ecuación diferencial.

3.4.1 Modelo de Crecimiento Poblacional.

3.4.1.1 Solución al modelo de crecimiento poblacional.

En la unidad #2 iniciamos el estudio sobre el modelo de crecimiento poblacional, ahora lo analizaremos como una aplicación de ecuaciones diferenciales.

Si se quisiera realizar un estudio en un período de tiempo dado sobre una población de animales en alguna región, esta población podría consistir de bacterias en un contenedor, insectos en un área agrícola, osos en un bosque nacional, o cangrejos en una bahía. También podría ser, que se desee estudiar sobre formas más altas de vida tales como la población humana en una ciudad, nación o el mundo entero. Cualquiera que sea la población de interés denotaremos su cantidad en el tiempo **t** por **P**, entonces **P** es una función del tiempo **t**, cuyo dominio es el período de tiempo de interés. Cuando necesitemos una notación funcional, escribiremos **P = P(t).**

Dado el principio biológico que dice que la población tiende a crecer en una razón proporcional a ella misma, consideremos una población que aumenta a **P(t)** personas (o animales, bacterias o cualquier especie de organismo) en el tiempo **t**. Supongamos que esta población tiene una tasa de natalidad constante β y una tasa de mortalidad constante δ**.** A grandes rasgos, esto significa que, durante un período de un año, ocurrirán β**P** nacimientos y δ**P** muertes.

Pero como **P** cambia durante el curso de ese año, se deberá hacer alguna concesión a los cambios en el número de nacimientos y de muertes. Para ser más precisos, pensemos en un breve intervalo de tiempo de **t** a **t + Δt.** Para valores muy pequeños de **Δt**, el valor de **P = P(t)** cambiará una cantidad tan pequeña durante el intervalo de tiempo **[t, t+Δt]** que se puede considerar a **P** como **"casi"** constante. Se requiere que el número de nacimientos y defunciones durante este lapso esté dado con suficiente exactitud por la aproximación

Número de nacimientos $\approx$ $\beta P(t).\,\Delta t$ y número de muertes $\approx$ $\delta P(t).\,\Delta t$

Lo que se quiere decir cuando se afirma que la tasa de natalidad es β y la de mortalidad es δ es esto: Las razones a Δt de los errores en las aproximaciones anteriores tienden a cero cuando $\Delta t \to 0$.

Tratemos de deducir la forma de la función P(t) que describa nuestra población. La estrategia comienza por encontrar ***la razón de cambio con respecto al tiempo***, de P. Consideremos, por lo tanto, el incremento $\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t)$ durante el intervalo $[t, t+\Delta t]$. Puesto que ΔP no es más que el número de nacimientos menos el número de muertes, se encuentra, que

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) \approx \beta P(t).\,\Delta T - \delta P(t).\,\Delta t$$

En consecuencia

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} \approx (\beta - \delta)P(t)$$

El cociente del segundo miembro se acerca a la derivada $P'(t)$ cuando $\Delta t \to 0$ y, al igual que también se acerca a $(\beta - \delta)P(t)$. Entonces, al tomar el límite cuando $\Delta t \to 0$, se obtiene la ecuación diferencial

$$P'(t) = (\beta - \delta)P(t)$$

es decir

$$\frac{dP}{dt} = kP \quad \text{donde } k = (\beta - \delta) \text{ y es constante}$$

Esta ecuación diferencial puede ser considerada como un ***<u>modelo matemático</u>*** de la población cambiante. Y se resuelve escribiéndose primero en la forma

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

o sea, $$D_t(\ln P) = D_{t(kt)}$$

al antidiferenciar se obtiene:

$$\ln P = kt + C \qquad (x > 0)$$

Apliquemos ahora la función inversa (exponencial) a ambos miembros de esta ecuación para despejar P.

$$P = e^{\ln P} = e^{kt+C} = Ae^{kt}$$

donde **$A = e^c$** es una constante indeterminada. Pero veamos que **A** no es más que el valor de **P** cuando **$t = 0$,** o sea, **$A=P(0)=P_0$**. Entonces la solución de la ecuación diferencial con el valor inicial **$P(0)= P_0$** es

$$P(t) = P_0e^{kt}$$

Si **t** se mide en años , **<u>k</u>** se llama **<u>tasa de crecimiento anual</u>**, tanto si es positiva, negativa o cero. Su valor suele darse como un porcentaje. Si k no es demasiado grande, su valor estará bastante cerca del verdadero porcentaje de aumento (o disminución) de la población a cada año.

Ejemplo

A mediados de 1984, la población mundial era de 4.76 miles de millones y aumentaba entonces con una razón de 220 millones de personas diarias. Suponiendo constante la tasa de natalidad y de mortalidad. Se desea encontrar las respuestas de estas preguntas:

a. Cuál es la tasa de crecimiento anual k?.
b. Cuánto tardará la población mundial en duplicarse?.
c. Cuánto será la población mundial en el año 2000?.
d. Cuándo se alcanzará una población mundial de 50 mil millones (algunos demógrafos creen que ésta es la máxima a la que el planeta puede proporcionar alimentos)?.

Solución:

Midamos la población mundial P(t) en millares de millones y el tiempo t en años. Sea t = 0 el año correspondiente a 1984, por lo que $P_0 = 4.76$. El hecho de que P esté aumentando 220 millares o sea 0.00022 miles de millones, de personas por día en el momento t = 0, significa que son

$$P'(0) = (0.00022)(365.25) \approx 0.0804) \quad \text{(anuales)}$$

miles de millones por año.

De la ecuación $\frac{dP}{dt} = kP$ **donde** $k = (\beta - \delta)$ obtenemos ahora

solución (a):

$$k = \left|\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = \frac{P'(0)}{P(0)} = \frac{0.0804}{4.76} \approx 0.0169$$

por lo tanto la población esta creciendo a 1.69% al año.

solución (b):

Para hallar cuándo será la población de 9.52 miles de millones se resuelve la ecuación

$$P(t) = P_0e^{kt}$$
$$9.52 = (4.76)e^{0.0169(t)}$$

tomando logaritmo natural en ambos miembros para obtener

$$\ln(9.52) = \ln(4.76) + 0.0169(t)$$
$$t = \frac{-\ln 4.76 + \ln 9.52}{0.0169} \approx 41 \text{ años.}$$

lo que corresponde al año **2025**.

Solución (c):

La población mundial en el año 2000 será:

Si el año 1984 es t = 0
el año 2000 es t = 16

por lo tanto tenemos

$$P(t) = 4.76e^{0.0169(t)}$$
$$P(16) = 4.76e^{0.0169(16)} \approx 6.23 \text{ mil millones}$$

como población para el año 2000.

Solución (d):

La población mundial será de 50 mil millones cuando

$$50 = 4.76e^{0.0169(t)}$$
$$\frac{50}{4.76} = e^{0.0169(t)}$$

aplicando logaritmos

$$\ln\left(\frac{50}{4.76}\right) = 0.0169(t)$$

$$t = \ln\frac{10.50}{0.0169} \approx 139 \text{ (años)}$$

o sea en el año **2123**.

3.4.1.2 Campos direccionales.

Hemos visto que el crecimiento biológico natural de la población se reproduce continuamente y que puede ser modelado por la ecuación $\frac{dP}{dt} = KP$. Debido a esto, es razonable asumir que la razón de cambio instantánea es proporcional a la población.

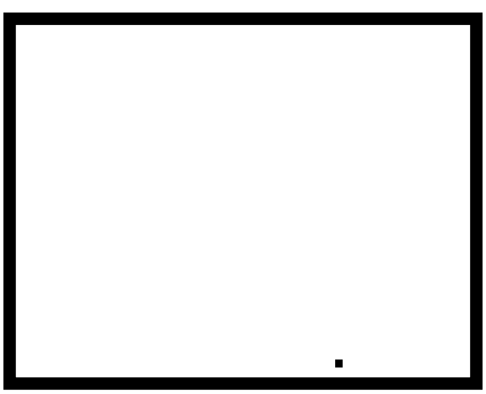
El objetivo de esta sección es mostrar como representar la solución o posibles soluciones de una ecuación diferencial a través de un gráfico, con el fin de ayudar a entender más claramente lo que es una función solución.

Haciendo K= 0.25 tenemos que $\frac{dP}{dt} = 0.25P$ donde **P = Ae^{kt}** a causa de que $f'(t) = 0.25 * 3e^{0.25t} = 0.25f(t)$, algunas soluciones son:

Para A = 1 f(t) = $e^{0.25t}$
Para A = 2 f(t) = $2e^{0.25t}$
Para A = 3 f(t) = $3e^{0.25t}$

En la figura#3.4.1 se muestra la gráfica de algunas soluciones que incluyen las presentadas anteriormente, en la figura#3.4.2 se dibujan las mismas soluciones pero con segmentos cortos para cada curva solución. El hecho de usar segmentos de líneas es porque dan una buena idea de las curvas solución.

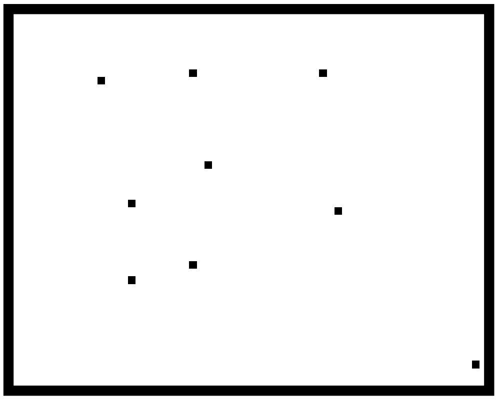
Figura#3.4.1. Curvas solución de la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = 0.25P.$



Figura#3.4.2. Segmentos de curvas solución para la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = 0.25P.$

Hay algo importante: si sabemos que las pendientes de estos segmentos provienen de una ecuación diferencial, no necesitamos conocer las fórmulas para las soluciones a fin de determinar las direcciones. Para esta ecuación diferencial en particular, conocemos que la pendiente de cada segmento de curva solución en cualquier punto (t,P) es 0.25P. Así, por ejemplo, la pendiente en (1,2) es 0.25*2=0.50, la pendiente de (2,6) es 1.5 y así consecutivamente.

Esto da una manera de representar la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = KP$ gráficamente, sin hacer referencia a sus soluciones. La figura#3.4.3 es una gráfica de la ecuación diferencial, en cada punto **(t,P)** se dibuja un segmento de línea pequeño cuya pendiente es **0.25P**. La gráfica resultante es llamada un ***"campo de dirección"*** o un ***"campo pendiente".***



Figura#3.4.3. Campo dirección de $\frac{dP}{dt} = 0.25P.$ Con algunas curvas solución.

Los puntos seleccionados son solamente representaciones de la infinidad de puntos en el plano t,P, pero muestran una gráfica clara del campo dirección descrito por la ecuación diferencial. Cualquier solución de la ecuación diferencial es una función P=P(t), cuya gráfica pasa a través del campo dirección en las direcciones de los segmentos de línea. La figura#3.4.3, además muestra varias soluciones sobrepuestas.

3.4.1.3 Modelo de Crecimiento con problema de valor inicial.

En general hay muchas soluciones de la ecuación diferencial. Sin embargo es aceptable que, si escogemos un "punto inicial" (t_0, P_0), y si conocemos la dirección de la solución en cada punto (t, P), entonces ahí debe estar sólo una solución que pase a través (t_0,P_0). Así, en espera de encontrar únicamente una solución determinada al análisis de una ecuación diferencial con valor inicial tenemos

$$\frac{dP}{dt} = KP \quad \text{y} \quad P = P_0 \quad \text{cuando} \;\; t = t_0$$

A pesar de lo aceptable que es una única solución P(t) para un problema, el proceso de resolver una ecuación diferencial con valor inicial es desafiante. En particular, operaciones estrictamente algebraicas no son herramientas adecuadas, esto es porque la derivada no es un objeto estrictamente algebraico. En realidad algunas veces nos veremos forzados a tratar la existencia de una única solución de un problema con valor inicial como evidente y para hablar de "la función definida por" una ecuación diferencial con problema de valor inicial, ya sea que conozcamos una fórmula para la función o no.

Afortunadamente el problema (ecuac. diferenc. anterior) no es una dificultad. Si asignamos a **P = Ae^{kt}** entonces $\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} Ae^{kt} = kAe^{kt} = kP$. Así, para cada constante A, la función **P = Ae^{kt}** es una solución de la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = KP$.

Para la ecuación diferencial del problema con valor inicial, necesitamos alguna manera de seleccionar la A en particular que deseamos. Tenemos que encontrar una función que corresponderá a la población $\mathbf{P_0}$ conocida, en un tiempo $\mathbf{t_0}$ dado.

Supongamos que deseamos encontrar una solución a la ecuación diferencial con una población de **1000** en un tiempo **t = 0**. Entonces simplemente definiremos la unidad para la población como "millares" esto significaría que la solución deseada tendría un valor **de 1 (mil)** en un tiempo **0**. Entonces, ya que 1 es el valor de e^{kt} en t=0, el problema tiene la solución **P = e^{kt}**.

Pero como se resuelve el problema si deseamos las unidades en millones ?

Entonces suponemos que la solución es una función de la forma P = Ae^{kt} para una constante k. Ahora escogemos **A**, de modo que $\mathbf{P = P_0}$ cuando $\mathbf{t = t_0}$, como deseamos $P_0 = Ae^{kt}$, resolvemos esta última ecuación para **A:** $A = P_0e^{-kto}$.

Por tanto la solución para $\frac{dP}{dt} = KP$ y $P = P_0$ cuando $t = t_0$.

Es

$$P = Ae^{kt} = P_0e^{-kto}\, e^{kt}$$

o

$$P = P_0e^{k(t-to)}$$

En particular, si el tiempo inicial es t= 0, entonces la función solución es la población inicial multiplicada por la función exponencial de **kt**, donde **k** es la constante de la razón de crecimiento.

3.4.2 Decaimiento Radioactivo.

Consideremos una muestra de material que contenga **N(t)** átomos de cierto isótopo radiactivo en el momento **t**. Se ha observado que una fracción constante de estos átomos radiactivos decae espontáneamente (transformándose en átomos de otro elemento o en otro isótopo del mismo) durante cada unidad de tiempo. Por consiguiente, la muestra se comporta tal como una población con tasa de mortalidad constante y en la que no ocurren nacimientos. Para obtener un modelo de **N(t)**, usemos la ecuación

(crecimiento poblacional) $\frac{dP}{dt} = kP \quad \text{donde} \quad k = \beta - \delta$

con **N** en lugar de **P** y con **k > 0** en lugar δ, siendo β **= 0**. Resulta entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -kN \qquad (1)$$

cuya solución es

$$\mathbf{N(t) = N_0 = N_0e^{-kt}} \qquad (2)$$

donde $\mathbf{N_0 = N(0)}$, el número de átomos radiactivos presentes en la muestra cuando $\mathbf{t = 0}$.

El valor constante de decaimiento k depende del isótopo en particular que se esté manejando. Si k es grande, el isótopo decae con rapidez, mientras que si k está próximo a cero, el isótopo decae con lentitud y puede constituir un factor relativamente persistente sobre su ambiente. Suele especificarse la constante de decaimiento en términos de otro parámetro empírico, la ***vida media*** del isótopo, dado que este parámetro es más conveniente. La vida media τ de un isótopo radiactivo es el tiempo requerido para que decaiga la mitad de su masa. Para encontrar la relación entre **k** y τ, se pone

$$\mathbf{t = \tau} \quad \text{y} \quad \mathbf{N = \tfrac{1}{2} N_0}$$

en la ecuación (2), de modo que $\mathbf{\tfrac{1}{2} N_0 = N_0e^{-k\tau}}$ cuando se despeja τ se encuentra que

$$\tau = \frac{\ln 2}{k} \qquad (3)$$

Observemos que el valor de τ depende sólo de k y por lo tanto sólo del isótopo radiactivo en particular. No depende de la cantidad del isótopo presente.

Ejemplo#1

La vida media del carbono radiactivo C^{14} es alrededor de 5700 años. Una muestra de carbón de madera encontrado en un templo antiguo resultó tener el 63% del C^{14} de una muestra de carbón contemporánea. *Cuál es la edad de la muestra* ?.

Solución:

La clave del método de carbono 14 es que la materia orgánica viva conserva un nivel constante de C^{14} al “respirarlo” del aire (o al consumir materia orgánica que lo hizo). Puesto que el aire contiene C^{14} junto con el isótopo de carbono C^{12} mucho más estable, la mayor parte en el gas CO_2, permanece en el mismo porcentaje toda la vida, ya que los procesos orgánicos parecen no hacer distinción entre los dos isótopos. Por supuesto, cuando un organismo muere, cesa su metabolismo del carbono y el proceso de decaimiento radiactivo comienza a agotar su contenido de C^{14}. La fracción de C^{14} en el aire permanece constante a grandes rasgos, porque se genera en forma continua nuevo C^{14} por la acción de los rayos cósmicos sobre las átomos del nitrógeno de la atmósfera superior, y esta producción ha conservado un estado de equilibrio estable con la pérdida de C^{14} por decaimiento radiactivo.

Para este ejemplo tomemos t = 0 como el tiempo de la “muerte” del árbol que produjo el carbón. Sabemos por la ecuación (3) que

$$\mathbf{k = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{\ln 2}{5700} \approx 0.0001216}$$

se tiene que **N = (0.63)N$_0$**, por lo que resolvemos la ecuación **0.63N$_0$** = **N$_0$e^{-kt}** con este valor de k, y por lo tanto encontramos que

$$t = -\frac{\ln(0.63)}{0.0001216} \approx 3800 \quad \text{años.}$$

Así que la muesta tiene alrededor de 3800 años de edad.

3.4.3 Inmigración.

La inmigración es un problema que afecta a muchos países del mundo. Uno de estos países, los Estados Unidos es “una nación de inmigrantes” con 200 años de historia, algunas 50,000,000 personas han llegado a vivir a este país desde cualquier otro lugar.

Anteriormente se presentó el modelo de crecimiento de la población, pero la inmigración es ignorada completamente. En esta sección formularemos y resolveremos un problema de valor inicial que trata la inmigración (como ejemplo inmigración en los EE.UU).

3.4.3.1 Una propuesta del modelo.

Un modelo que toma en cuenta la inmigración podría tener la forma:

$$\frac{dP}{dt} = KP + (\text{constante de proporcionalidad})$$

Esto es, la razón de crecimiento esta compuesta por dos términos o componentes, uno el crecimiento biológico natural y el otro por la inmigración. Para no complicarnos, vamos a asumir que la razón de inmigración es constante, diremos que ***m*** personas por año son agregadas a la población por la inmigración. Entonces la ecuación diferencial es

$$\frac{dP}{dt} = KP + m \qquad (1)$$

Los modelos de población previos, podemos pasarlos a un problema con valor inicial, declarando t = 0 para un tiempo t en el cual podemos conocer la población P_0. En la ecuación el miembro de la derecha tiene un término proporcional a P y un término constante. El problema es que K no es un factor de ambos términos. Esto se puede solucionar por factorización de K.

$$\frac{dP}{dt} = K\left[P + \frac{m}{K}\right]$$

Ahora cambiemos la variable dependiente sustituyendo $y = P + \frac{m}{K}$ y haciendo $y_0 = P_0 + \frac{m}{K}$ en **t = 0** por tanto el problema del valor inicial modificado es

$$\frac{dy}{dt} = Ky \quad \text{con} \quad y_0 = P_0 + \frac{m}{K} \quad \text{en} \quad t = 0 \qquad (2)$$

Las soluciones a las ecuaciones 1 y 2 son:

$$(1) \qquad \frac{dP}{dt} = KP + m$$

Esta ecuación representa un caso especial en el cual los coeficientes **K** y **m** son constantes.

Para resolver la ecuación primero se escribe como

$$\frac{dP}{dt} = (KP + m) * 1 \qquad \text{y luego}$$

$$\frac{1}{KP + m}\frac{dP}{dt} = 1 \qquad \text{si } KP + m > 0$$

después antiderivamos reescribiendo la ecuación anterior de la manera siguiente

$$\frac{1}{K} D_t(\ln(KP + m)) = D_t t$$

↑**para completar la ecuación.**

para obtener después de aplicar la antidiferenciación la ecuación

$$\ln(KP + m) = Kt + C$$

aplicando la función inversa del logaritmo natural tenemos

$$e^{\ln(KP+m)} = e^{Kt}e^{c}$$

$$KP + m = Ae^{Kt}$$

donde **A=** e^c. Cuando se sustituye **t = 0** y se representa con P_0 el valor resultante de **P** se encuentra que $A = KP_0 + m$.
Entonces,

$$KP + m = (KP_0 + m)e^{Kt}$$

despejando la solución **P = P(t)** se concluye que

$$\mathbf{P(t)=\left[P_0+\frac{m}{k}\right]e^{kt}-\frac{m}{k}}$$ o mejor dicho

$$\mathbf{P(t)=P_0e^{kt}+\frac{m}{k}(e^{kt}-1)}$$

donde el primer término del segundo miembro es el efecto del crecimiento natural de la población y el segundo es el efecto de la inmigración.

(2) $$\mathbf{\frac{dy}{dt}=Ky \quad con \quad y_o=P_0+\frac{m}{K} \quad en \quad t=0}$$

Para resolver esta ecuación primero se escribe de la siguiente forma

$$\mathbf{\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}=K}$$

o sea,

$$\mathbf{D_t(\ln y)=D_t(Kt)}$$

al antidiferenciar se obtiene

$$\mathbf{\ln y = Kt + C} \quad \text{suponiendo que } \mathbf{y>0}$$

ahora apliquemos la función exponencial a ambos miembros de esta ecuación para despejar a **y**. Esto da

$$\mathbf{e^{\ln y}=e^{Kt+C}}$$

$\mathbf{y=Ae^{Kt}}$ **donde** $\mathbf{A=e^{C}}$ es una constante indeterminada. Pero vemos que A no es más que el valor de **y** cuando **t = 0**, o sea **A = y(0) = $\mathbf{y_0}$** entonces la solución de la ecuación diferencial con el valor inicial **y(0) = $\mathbf{y_0}$** es

$$\mathbf{y=\left[P_0+\frac{m}{k}\right]e^{kt}}$$

3.4.3.2 <u>Análisis del modelo.</u>

Después de haber formulado el modelo, podríamos decir, qué es un modelo razonable?.

Para dar respuesta a esta interrogante retomemos lo anterior. La solución al problema muestra que **y** se comporta como una función de crecimiento natural **$\mathbf{y=y_0\,e^{kt}}$**. En este caso necesitamos conocer los valores de **k** y **m** para averiguar que valores de **y** corresponden a los valores conocidos de **P**.

La situación no es tan complicada, si formulamos el problema de una manera razonable. La constante de crecimiento **k** usualmente no puede ser deducida de manera precisa, pero el parámetro de inmigración **m** es observable. Cada inmigrante es contado. Desafortunadamente lo que muestra esta cuenta es que la inmigración no se da en una razón constante (en EE.UU y otros lugares).

Supongamos que tomamos **m** como la razón promedio de inmigración en una década en la cual la inmigración fue relativamente constante (EE.UU), esta es la década de los 1950. En esta década arribaron a EE.UU aproximadamente 2,500,000 inmigrantes por año. Entonces podemos preguntar si hay una contante **k** tal que el modelo de inmigración se ajuste razonablemente al censo de datos en algún período de tiempo. Si es así, podemos concluir que el crecimiento natural y la inmigración más o menos explican el crecimiento poblacional. Y si no, entonces sabemos que tenemos que buscar otros factores para encontrar una explicación adecuada.

Si **k** realmente es constante (como el modelo requiere para que nuestra solución tenga sentido), entonces podemos estimarla usando una segunda medida de población. Específicamente, podemos sustituir P=P1 en el tiempo t=t1, para obtener una ecuación que involucre k. Por ejemplo, podríamos tomar t=0 en 1790 y asignar t1=50 (lo que representa 1840). De la siguiente tabla#3.4.1

Año	Población (millones)
1790	3.929
1800	5.308
1810	7.240
1820	9.638
1830	12.866
1840	17.069
1850	23.192
1860	31.443
1870	38.558
1880	50.156
1890	62.948

Tabla#3.4.1
Población de los Estados Unidos en los primeros 100 años.

podemos tomar P_0=3.929 y P1=17.069 (millones), en tanto podemos asumir que el valor de m = 0.25.

Sustituimos todos estos valores en la ecuación $\mathbf{P} = \left[\mathbf{P_0} + \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}\right]\mathbf{e^{kt}} - \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{k}}$ para obtener

$$\mathbf{17.069} = \left[\mathbf{3.929} + \frac{\mathbf{0.25}}{\mathbf{k}}\right]\mathbf{e^{50k}} - \frac{\mathbf{0.25}}{\mathbf{k}}$$

PROGRAMACION

Luego podemos usar el Software Mathematica para encontrar el valor de k.

Utilicemos el comando **FindRoot[ecuación,{X, X_0 }]** cuya función es buscar una solución numérica para “ecuación” iniciando con **$x = x_0$** , cambiamos de X a K y obtenemos

FindRoot[(3.929K+0.25)E^(50K)-0.25-17.069K= =0,{K,0.01}]

que el valor de K es:

{K→ 0.00122702}

Ejemplo #2

Considere la población de los EE.UU de P_0 = 222 millones en 1980 (t=0). Suponga que preguntamos por el efecto de la inmigración permisible, a razón de medio millón de personas al año suponiendo un tasa de crecimiento natural del 1% anual, por lo que k=0.01. Entonces,

Solución:

$$P_0 e^{kt} = 222e^{(0.01)(20)} \approx 271.2 \quad \text{(millón)} \qquad \text{y}$$

$$\frac{m}{k}(e^{kt} - 1) = \frac{0.5}{0.01}\left(e^{(0.01)(20)} - 1\right) \approx 11.1 \quad \text{(millón)}$$

Entonces, el efecto de inmigración consistirá en aumentar la población de EE.UU en el año 2000 de 271.2 millones a 282.3 millones.

3.4.4 Solución a problemas con valor inicial (caída libre).

3.4.4.1 Problemas de valor inicial para la velocidad y aceleración.

La antiderivación es el instrumento que nos capacita, en muchos casos importantes, para analizar el movimiento de una partícula (o “masa puntual”) en términos de las fuerzas que actúan sobre ella.

Consideremos primero el movimiento de una partícula que se desplaza sobre una recta bajo la influencia de una fuerza aceleratriz constantes. Si consideramos la recta del movimiento como eje de las **x**, entonces el movimiento de la partícula será descrito por la ***función de posición***

$$x = f(x) \qquad (1)$$

que da su coordenada x en el tiempo t. Por lo general la función f(t) será desconocida al principio y nuestro problema consistirá en encontrar una fórmula para ella, usando datos tales como su posición inicial, la velocidad inicial y la aceleración constante de la partícula.

Recordemos de la sección 3.3 que la velocidad **v(t)** de la partícula en movimiento es la derivada de su posición

$$\mathbf{v} = \mathbf{f(x)}, \quad \textbf{o sea,} \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} \qquad (2)$$

Si la aceleración es constante comencemos con la ecuación

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{a} \qquad (\ \mathbf{a} \text{ es constante}) \qquad (3)$$

Las antiderivadas de **v** o **at** de las expresiones de cada miembro de la ecuación pueden diferir sólo en una constante, por lo que concluimos que

$$\mathbf{v = at + C} \qquad (4)$$

La constante C es evaluada a menudo por la sustitución de t = 0 en ambos miembros de la ecuación (4); esto da

$$\mathbf{v_0 = v(0) = a.0 + C = C}$$

con lo que C resulta ser la velocidad inicial $\mathbf{v_0}$. Por consiguiente, la velocidad de la partícula en el momento t es $\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{v} = \mathbf{at} + \mathbf{v_0}$ (5)

Para encontrar la función de posición x(t) antidiferenciamos cada miembro de la ecuación (5) las dos antiderivadas, **x** de $\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}}$ y $\frac{1}{2}\mathbf{at}^2 + \mathbf{v_0 t}$ de **at + v₀**, otra vez sólo puede diferir en una constante, por lo que se sigue que

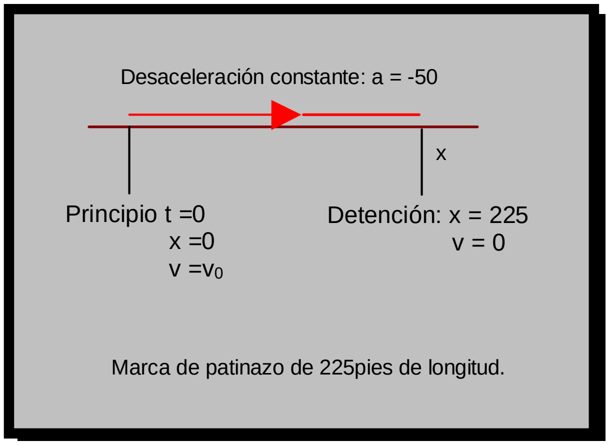
$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{at}^2 + \mathbf{v_0 t} + \mathbf{x_0} \qquad (7)$$

<u>Advertencia :</u> las fórmulas (5) y (7) son válidas para el caso de una aceleración constante **a**. No se aplican a problemas en los que la aceleración varíe.

<u>Nota</u> : En algunos textos se usa **<u>s</u>** en lugar de **<u>x</u>** para representar el desplazamiento en **<u>x</u>**.

Ejemplo #1

Las marcas de patinaje hechas por un automóvil indican que los frenos fueron aplicados a fondo durante una distancia de 225pies antes de que llegara a detenerse. Suponga que se conoce que el carro en cuestión tiene una desaceleración constante de 50 pies/s^2 bajo las condiciones descritas. Con qué rapidez marchaba el carro cuando fueron aplicados los frenos?.



Figura#3.4.5.

Solución:

La introducción de un sistema de coordenadas conveniente, a menudo es crucial para la resolución exitosa de un problema físico. Aquí, tenemos el eje de las **"x"** orientado positivamente en la dirección del movimiento del carro. Escojamos el origen de modo que sea $\mathbf{x_0 = 0}$ cuando $\mathbf{t = 0}$, como indica la figura#3.4.5. En este sistema de coordenadas, la velocidad $\mathbf{v}$ del automóvil es una función decreciente del tiempo $\mathbf{t}$, por el cual $\mathbf{a = -50(pies/s^2)}$ en vez de $\mathbf{a = +50}$. En consecuencia las ecuaciones (5) y (7) toman la forma

$$\mathbf{v = -50t + v_0,}$$
$$\mathbf{x = -25t^2 + v_0 t}$$

El hecho de que las marcas del patinazo midan **225pies** de longitud nos dice que $\mathbf{x=225}$ cuando el automóvil llegó a detenerse; esto es, cuando $\mathbf{v = 0}$. De la primera de las ecuaciones anteriores, encontramos que $\mathbf{t = v_0/50}$ cuando $\mathbf{v = 0}$, y la sustitución de este valor de $\mathbf{t}$ junto con el valor correspondiente de $\mathbf{x = 225}$ en la segunda ecuación resulta

$$\mathbf{225 = -25\left(\frac{v_0}{50}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{50}\right)}$$

cuando se despeja $\mathbf{v_0}$ en esta ecuación, encontramos que

$$\mathbf{v_0 = (100 - 225)^{1/2} = 150\,{}^{pies}\!/\!_{s}}\;,$$

o sea unas 102 mi/h, era la velocidad del carro cuando aplicaron los frenos.

Movimiento vertical con Aceleración gravitacional constante.

Una aplicación común de las ecuaciones (3), (5) y (7) incluye el movimiento vertical cerca de la superficie de la Tierra. En dicho movimiento, una partícula está sujeta a una aceleración descendente que se designa con **g** y que es igual a unos $\mathbf{32pies/s^2}$. Si hacemos caso omiso de la resistencia del aire, podemos suponer que la aceleración de la gravedad es la única influencia exterior sobre la partícula móvil; además, si el movimiento se realiza convenientemente cerca de la superficie de la Tierra, podemos suponer que **g** permanece constante. Si es necesario un valor más exacto de **g**, se puede usar **g=32.26pies/s^2 en el sistema fps, o g=980 cm/s^2 en el sistema cgs, o g=9.80 m/s^2 en el mks**.

Dado, que aquí trabajamos con un movimiento vertical, es natural escoger el eje de las **y** como sistema de coordenadas para la posición. Si elegimos la dirección hacia arriba como positiva, el efecto de la gravedad sobre la partícula disminuye su altura y también disminuye su velocidad

$$\mathbf{v = \frac{dy}{dt}},$$

en lo que vemos que la aceleración de la partícula es $\mathbf{a = \frac{dv}{dt} = -g = -32\left(ft/s^2\right)}$

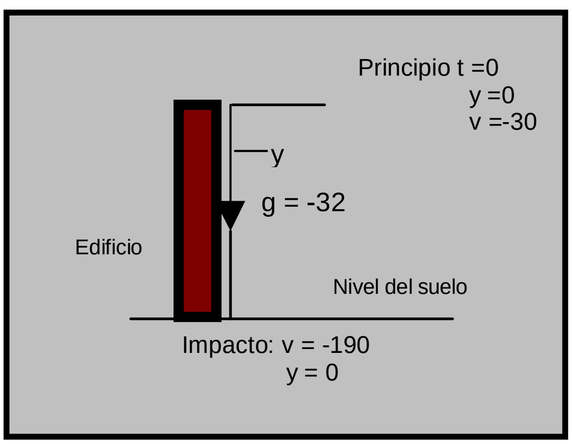
las ecuaciones (5) y (7) se transforman entonces en

$\mathbf{v = -32t + v_0}$ (5')
$\mathbf{y = -16t^2 + v_0t + y_0}$ (7')

Aquí $\mathbf{y_0}$ es la altura inicial de la partícula en pies, y $\mathbf{v_0}$ su velocidad inicial en pies por segundo.

Ejemplo#2

Una pelota es arrojada directamente hacia abajo desde lo alto de un elevado edificio, con una velocidad inicial de 30pies/s. Suponga que la pelota golpea el suelo con una velocidad de 190pies/s. Cuál es la altura del edificio?.



Figura#3.4.6.

Solución:

Usemos el sistema de coordenadas que se ilustra en la figura#3.4.6, en el que el nivel del suelo corresponde a y=0, y la pelota es arrojada en el momento t=0 siendo positiva la dirección hacia arriba.

Puesto que la altura **y** de la pelota es una función decreciente del tiempo, la velocidad

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dt}}$$ es negativa.

Así que los datos del problema son $v_0 = -30$ y $v = -190$ cuando $y = 0$. Queremos encontrar y_0. Las ecuaciones (5') y (7') producen

$$\mathbf{y = -16t^2 - 30t + y_0, \quad v = -32t - 30}$$

Si usamos el hecho de que la que v = -190 cuando y = 0, la segunda ecuación nos dirá cuando llega la pelota al suelo:

$$\mathbf{-190 = -32t - 30, \quad 32t = -30 + 190, \quad t = 160/32}$$

por lo cual, la solución **t = 5** significa que la pelota golpea el suelo **5s** después de ser arrojada. La otra ecuación puede ser aprovechada después porque conocemos que **y=0** cuando **t = 5**, para encontrar de ahí que $\mathbf{y_0}$

$$\mathbf{0 = (-16)(25) - (30)(5) + y_0 = 550.}$$

Por lo tanto, la altura del edificio es de 550pies.

3.4.4.2 Aplicaciones de la segunda ley de Newton. Ley de gravitación del inverso del cuadrado de Newton.

Puesto que ya se han deducido dos fórmulas claves

$$\frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{v} = \mathbf{at} + \mathbf{v_0} \qquad (1)$$

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{at^2} + \mathbf{v_0 t} + \mathbf{x_0} \qquad (2)$$

pasemos ahora a algunos problemas más excitantes que implican el movimiento de objetos a distancias considerables de la Tierra (meteoros, naves espaciales y otros). Para lograrlo, necesitamos mencionar primero la ***segunda ley del movimiento de Newton*** ***y su ley de gravitación del inverso del cuadrado***. De acuerdo con la ley del movimiento, la fuerza **F** que actúa sobre una partícula de masa **m** es proporcional a la aceleración **a** que ella produce:

$$\mathbf{F = ma} \qquad (3)$$

De acuerdo con la ley de gravitación, la fuerza de aceleración gravitacional entre dos puntos de masas **m** y **M**, separados una distancia r está dada por

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{GMm}}{\mathbf{r^2}} \qquad (4)$$

donde **G** es cierta constante empírica. La fórmula se aplica también si alguna de las dos masas no es un punto, sino una esfera homogénea, en cuyo caso la distancia r se mide entre los centros de las esferas.

Sea **M** la mas de la Tierra y **R** su radio. Obtengamos la aceleración gravitacional **a=g** de una partícula de masa m en la superficie terrestre usando en forma simultánea las ecuaciones (3) y (4) anteriores

$$\mathbf{ma = mg = \frac{GMm}{r^2} = \frac{GMm}{R^2}},$$

entonces,

$$\mathbf{g = \frac{GM}{R^2}} \qquad (5)$$

Usaremos la ecuación (5) de vez en cuando para suprimir la necesidad de la verdadera determinación de G en los problemas y ejemplos.

Ejemplo #1

Si una mujer tiene suficiente “elasticidad” en sus piernas para saltar una altura vertical de 4pies sobre la Tierra, ***a qué altura podrá saltar en la Luna*?**. Use el hecho de que la masa $\overline{\mathbf{M}}$ y el radio $\overline{\mathbf{R}}$ de la Luna están dados en términos de la masa **M** y el radio **R** de la Tierra mediante $\overline{\mathbf{M}} \approx (\mathbf{0.0123})\mathbf{M}$ **y** $\overline{\mathbf{R}} \approx (\mathbf{0.2725})\mathbf{R}$. Puesto que es presumible que la masa de la mujer sea la misma en cualquier parte del universo, también es razonable suponer que ella alcanzará la misma velocidad inicial al despegar en la Luna como en la Tierra.

Solución:

Necesitamos encontrar primero la velocidad inicial $\mathbf{v_0}$ requerida para saltar 4pies de altura sobre la Tierra. Después podemos calcular a qué altura puede saltar en la Luna con la misma velocidad inicial.

Sobre la Tierra, usemos las ecuaciones regulares

$$\mathbf{y = -16t^2 + v_0t + y_0},$$

y

$$\mathbf{v = -32t + v_0}$$

En el salto de la mujer sobre la Tierra, tenemos $\mathbf{v = v_0}$ cuando $\mathbf{t = 0, y_0 = 0}$ (con y = 0 al nivel del suelo) y $\mathbf{v = 0}$ cuando $\mathbf{y = 4}$. Sustituyamos, por consiguiente v = 0 en

$$\mathbf{v = -32t + v_0}$$

y encontremos que el tiempo en el que alcanza la altura máxima es $\mathbf{t = \frac{v_0}{32s}}$

En consecuencia, la ecuación

$$\mathbf{y = -16t^2 + v_0t + y_0} \quad \text{da}$$

$$4 = -16\left(\frac{v_0}{32}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{32}\right) = \frac{v_0^2}{64}$$

Entonces, **v_0 = +16ft/s**

Fijemos ahora nuestra atención a la Luna para encontrar las versiones correctas de las ecuaciones

$$y = -16t^2 + v_0 t + y_0$$

y

$$v = -32t + v_0$$

en la Luna, necesitamos encontrar la aceleración gravitacional en su superficie. Pero la ecuación (5) nos dice que, si **g** designa la aceleración gravitacional en la Luna,

$$\bar{g} = \frac{G\bar{M}}{\left(\bar{R}\right)^2} = G\frac{(0.0123)M}{(0.2725R)^2} = (0.1656)\frac{GM}{R^2}$$

$$= (0.1656)g = (0.1656)(32) = 5.3\,{}^{ft}\!/_{s^2}$$ aproximadamente.

En la Luna,

$$\frac{dv}{dt} = -5.3$$

$$v = \frac{dy}{dt} = (-5.3)t + v_0 \qquad (6)$$

y

$$y = (-2.65)t^2 + v_0 t + y_0 \qquad (7)$$

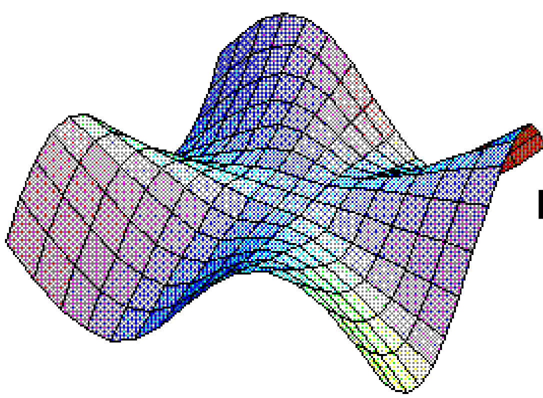
En el salto en la Luna, tenemos **y_0 = 0** y **v_0 =16** por nuestro trabajo previo con el salto en la Tierra. Además, **v = 0** en la altura máxima **y**. Por consiguiente, la ecuación (6) da

$$0 = (-5.3)t + 16$$

y por tanto, **$t \approx 3.02$ s** cuando alcanza su altura máxima y_{max}. Sustituyamos este valor de t en (7) para obtener

$$y_{max} = (-2.65)(3.02)^2 + (16)(3.02) \approx 24.15\text{ft}$$

como la altura máxima, que ella puede saltar en la Luna. Note que ella estará más de 6 s sobre la Luna, pero sólo 1s en la Tierra.



Tercera Unidad

Problemas de valor inicial.

Problemas y Ejercicios

3.1 y 3.2 Ecuación diferencial y su función solución.

»Encuentre la antiderivada más general de las siguientes funciones, especifique el desarrollo y luego compruebe el resultado usando el Sw. Mathematica, también especifique el procedimiento.

1) $\mathbf{f'(x) =} \ 3x^2 + 2x + 1$

2) $\mathbf{h'(x) =} 1 - 2x^2 + 3x^3$

3) $\mathbf{f'(x) = \frac{3}{x^3} + 2x^{3/2} - 1}$

4) $\mathbf{f'(t) = \frac{3}{2} t^{1/2} + 7}$

5) $\mathbf{f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt[4]{x^5}}}$

6) $f'(x) = 4x^3 - 4x + 6$

7) $f'(x) = \dfrac{1}{(x-10)^7}$

8) $f'(x) = x^2(x^3+2)^{1/3}$

9) $f'(x) = x\text{Cos}x^2$

10) $f'(x) = \text{Sen}^2 3x\text{Cos}3x$

11) $g'(x) = \dfrac{3x-12}{x^3}$

12) $h'(x) = \dfrac{1}{x^2}\text{Sen}(\dfrac{1}{x})$

13) $f'(x) = \left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

14) $f'(t) = \text{Cos}(2t+1)$

3.3 Solución de problemas de valor inicial.

»Encuentre una función y = f(x) que satisfaga la ecuación diferencial dada y las condiciones iniciales, luego compruebe usando el Sw. Mathematica, especifique el procedimiento.

15) $\dfrac{dy}{dx} = 2x+1$; $y(0) = 3$

16) $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x}$; $y(4) = 0$

17) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$; $y(2) = -1$

18) $\dfrac{dy}{dx} = 3x^3 + \dfrac{2}{x^2}$; $y(2) = 1$

19) $\dfrac{dy}{dx} = (x-1)^3$; $y(0) = 2$

20) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x-13}}$; $y(17) = 2$

21) $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{1-x^2} + 1$; $y(1) = 0$

» En los problemas 22 al 28, encuentre la función de posición de una partícula en movimiento que tiene aceleración dada a(t), la posición inicial x_0 = x(0) y la velocidad inicial v_0 = v(0). Usando el Sw. Mathematica, realice una función que implemente estas operaciones .

Sugerencia :

- Utilizar dos instrucciones Dsolve
- y reglas de sustitución.

22) $a(t) = 50$, $v_0 = 10$ y $x_0 = 20$

23) $a(t) = -20$, $v_0 = -15$ y $x_0 = 5$

24) $a(t) = 3t$, $v_0 = 5$ y $x_0 = 0$

25) $a(t) = 2t + 1$, $v_0 = -7$ y $x_0 = 4$

26) $a(t) = 4(t + 3)^2$, $v_0 = -1$ y $x_0 = 1$

27) $a(t) = \dfrac{3}{\sqrt{t+4}}$, $v_0 = -1$ y $x_0 = 1$

28) $a(t) = \dfrac{1}{(t+1)^3}$, $v_0 = 0$ y $x_0 = 0$

29) $a(t) = \sqrt{t}$, $v_0 = 0$ y $x_0 = 0$

3.4 Aplicaciones de la Ecuación Diferencial.

» Resuelva los problemas del 30 al 37 y luego implemente cada uno a través de

una función usando el Sw. Mathematica.

30) **(Crecimiento Poblacional).** Cierta población tenía una población de 25,000 habitantes en 1960 y 30,000 en 1970. Suponga que la población continúa creciendo con una tasa constante de crecimiento exponencial. Qué población pueden esperar los planificadores en su ciudad para el año 2000?.

31) **(Crecimiento Poblacional).** En cierto cultivo, el número de bacterias se sextuplica en 10 horas. Qué tiempo tardarán en duplicar su número?.

32) **(Decaimiento).** El carbono recogido de una reliquia sagrada de los tiempos de Cristo contenía 4.6×10^{10} átomos de C^{14} por gramo. El carbón obtenido de un espécimen actual de la misma sustancia contiene 5.0×10^{10} átomos de C^{14} por gramo. Calcule la edad aproximada de la reliquia.

33) **(Inmigración).** Cierta ciudad tenía una población de 1.5 millones en 1980. Suponga que tiene un crecimiento continuo a una razón del 4% anual y que también absorbe 50,000 recién llegados al año. Cuál será su población en el año 2000?.

34) Un carro viaja a 60mi/h, patina 176 pies después de ser aplicados los frenos. Si la desaceleración provocada por el sistema de frenado es costante cuál será su valor?.

Nota: Los problemas 35, 36 y 37 se refieren a movimientos verticales cerca de la superficie de la Tierra considerando despreciable la resistencia del aire, use g = 32 pies/s^2 como la aceleración gravitacional.

35) Una pelota se arroja directa hacia arriba desde el suelo, con velocidad inicial de 96 pies/s. A qué altura llega y cuánto tiempo vuela ?.

36) Se deja caer una piedra en un pozo y golpea en el fondo 3s, después. Qué profundidad tiene el pozo?.

37) Se arroja directa hacia abajo una pelota de beisbol con una velocidad inicial de 40 pies/s desde 555 pies de altura. Cuánto tiempo y a que velocidad llega al suelo?.

PROYECTOS DE LA TERCERA UNIDAD

Proyecto #4.

Investigar y analizar la siguiente Aplicación de Ecuaciones Diferenciales.

Cuenta de Ahorro con Depósitos Continuos.

- Analizar el modelo.
  - Planteamiento.
  - Encontrar la solución.
- Resolver un ejemplo.
- Programar una función en el Sw. Mathematica que implemente la aplicación.

Proyecto #5.

Investigar y analizar la siguiente Aplicación de Ecuaciones Diferenciales.

Enfriamiento y Calentamiento (Ley de Enfriamiento de Newton.)

- Analizar el modelo.
    - Planteamiento.
    - Encontrar la solución.
- Resolver un ejemplo.
- Programar una función en el Sw. Mathematica que implemente la aplicación.

4 Cuarta Unidad

Cálculo Diferencial y sus Aplicaciones

Contenido

4.1 Derivadas y sus gráficas.

4.1.1 Máximos y mínimos de funciones.

En las aplicaciones con frecuencia se necesita encontrar el máximo o el mínimo que pueda alcanzar una función específica.

En esta sección estudiaremos el problema general de encontrar los valores máximos y mínimos logrados por una función y además dónde están ubicados exactamente estos valores.

Empezaremos con algunos conceptos básicos:

Definiciones:

Sea **f** definida en un intervalo **I** conteniendo a **c**.

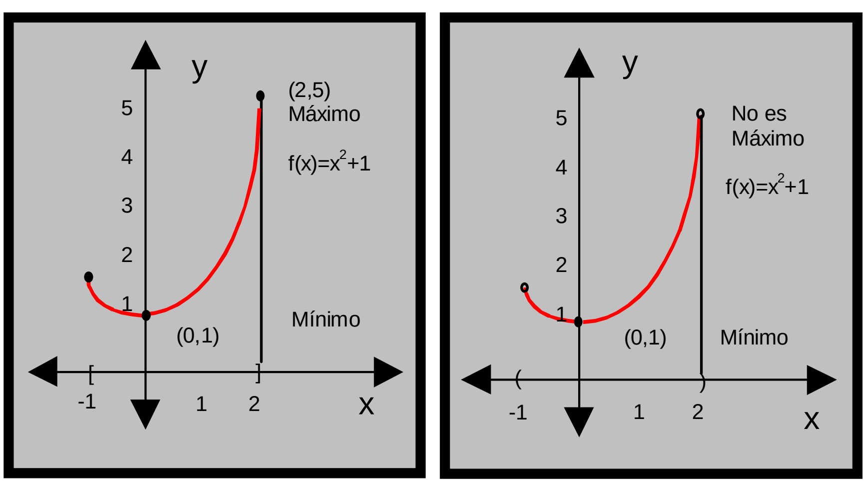
Valor Mínimo:

f(c) es el mínimo de **f** en **I** si **f(c)** ≤ **f(x)** para todo **x** en **I**.
Un ejemplo gráfico se presenta en la figura #4.1.1.

Valor Máximo:

f(c) es el máximo de **f** en **I** si **f(c)** ≥ **f(x)** para todo **x** en **I**.
Un ejemplo gráfico se presenta en la figura #4.1.1.

Extremos: El mínimo y el máximo de una función en un intervalo se llaman valores extremos o extremos de la función en ese intervalo.



Ejemplo: Intervalo Cerrado [-1,2] Ejemplo: Intervalo Abierto (-1,2)

Fig#4.1.1. Ejemplos de Máximos y Mínimos.

En la figura #4.1.1 podemos ver que los extremos pueden ocurrir en puntos interiores o también en los **puntos extremos terminales o fronteras de un intervalo**. Estos últimos **se llaman extremos terminales** y sólo se presentan en **intervalos cerrados** y los que ocurren en puntos interiores de **intervalos abiertos** se **llaman extremos relativos**.

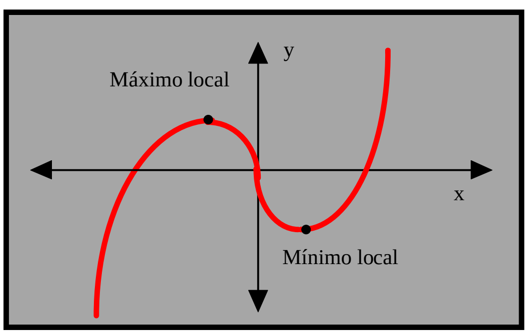
De aquí podemos distinguir 2 clases de extremos:

- Los extremos Relativos.
- Los extremos Absolutos.

Máximos y mínimos Relativos (locales).

Decimos que el valor **f(c)** es un valor **máximo local** de la función f si **f(x)** $\leq$ **f(c)** para toda **x** lo suficiente próxima a **c**. Con mayor precisión, si esta igualdad se cumple para toda **x** que pertenezca a la vez al dominio de **f** y algún intervalo que contenga a **c**, entonces **f(c)** es un máximo local de **f**. En forma análoga, decimos que el valor **f(c)** es un **mínimo local** de f si **f(x)** $\geq$ **f(c)** para toda **x** con suficiente proximidad a **c**. **Entonces, un máximo local se presenta cuando el valor de f es por lo menos tan grande como cualquier punto cercano; un mínimo local se presenta cuando el valor de f es por lo menos tan pequeño como en los puntos próximos**.

En la siguiente gráfica de la figura#4.1.2 podemos ver que hay un máximo local que es un punto tal que no hay puntos cercanos más altos y hay un mínimo local que es tal que no hay puntos cercanos más bajos en la curva.



Fig#4.1.2. Un extremo local es un valor de f que es máximo o mínimo local.

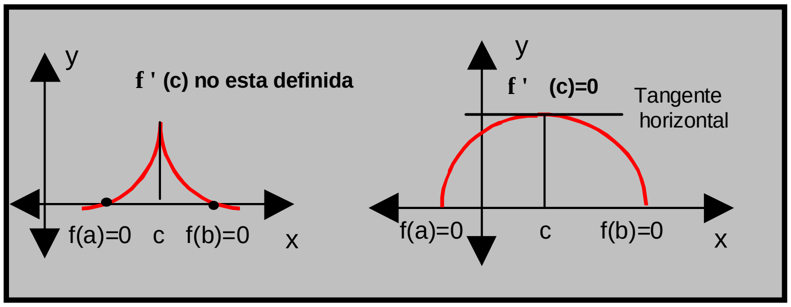
***Teorema 1*. Máximos y mínimos locales.**

Si **f** es derivable en **c** y está definida en un intervalo abierto que contiene a **c**, y si **f (c)** es un valor máximo local o un valor mínimo local de **f**, entonces **f '(c) = 0** es un punto crítico.

Ahora definamos lo que es punto crítico.

Punto Crítico:

Si **f** está definida en **c**, se dirá que **c** es un punto crítico de **f** si $\mathbf{f'(c) = 0}$ o si $\mathbf{f'}$ no está definida en **c**. La figura #4.1.3 ilustra los dos tipos de puntos críticos.



Figura#4.1.3. Ejemplos de Puntos Críticos.

Por consiguiente, un extremo local de una función diferenciable en un intervalo abierto se presenta sólo en un punto donde la derivada sea cero, es decir sólo donde ocurren puntos críticos por lo tanto, donde la recta tangente a la gráfica sea horizontal.

ADVERTENCIA: La recíproca del teorema 1 es falsa. Es decir, el hecho de que sea **f '(c) = 0** no es suficiente para implicar que f(c) sea un extremo local.

Ejemplo #1

Encontrar los valores críticos de f(x) = x^3 - 15x + 6.

Solución:

Derivando f(x)

$$\mathbf{f'(x) = 3x^2 - 15}$$
$$\mathbf{= 3(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})}$$

los valores críticos son aquellos para los cuales $\mathbf{f'(x) = 0}$, por lo tanto en este caso los valores críticos son $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$.

Ejemplo #2

Encontrar los valores críticos de f(x) = $(x + 4)^{2/3}$.

Solución :

Derivando f(x) por la regla de la potencia para funciones;

$$\mathbf{f'(x) = \frac{2}{3}(x + 4)^{-1/3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3(x+4)^{1/3}}$$

En este caso se ve que $f'(x)$ no existe cuando **x = -4**, pero puesto que **-4** está en el dominio de f, se concluye que es un valor crítico.

Ejemplo #3

Encontrar los valores críticos de $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

Solución:

Derivando por la regla del cociente y luego de simplificar se encuentra que :

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

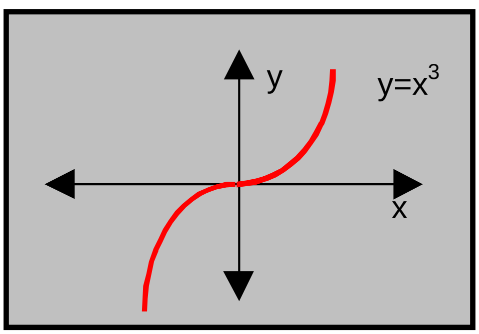
Ahora bien, $f'(x) = 0$ cuando x = 0 y x = 2, mientras $f'(x)$ no existe cuando x =1. Sin embargo, cuando evaluamos f con x = 1 vemos que este valor no pertenece al dominio de f, así que los únicos valores críticos son **0** y **2**.

Ejemplo #4

Examinar la función f(x) = x^3.

Solución:

La derivada es $f'(x) = 3x^2$ y se anula para x = 0. Pero una mirada a su gráfica que se muestra a continuación en la figura #4.1.4 nos enseña que f(0) = 0 no es extremo local de x^3.



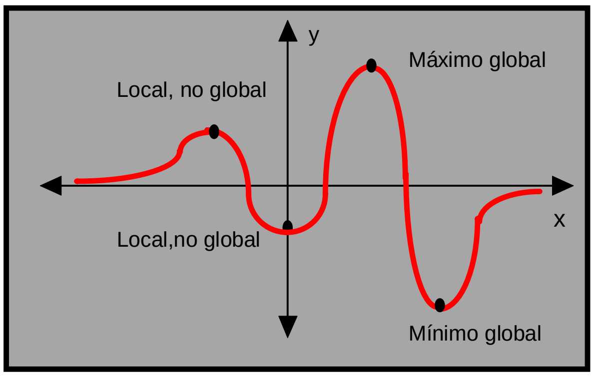
Figura#4.1.4. No hay un extremo para x = 0 a pesar de que la derivada es cero ahí.

Por lo tanto, la ecuación $f'(c) = 0$ es una condición necesaria para que f(c) sea un valor máximo o mínimo local de f (para una función f diferenciable en un intervalo abierto). No es condición suficiente. Porque $f'(x)$ puede ser cero en otros puntos que no sean máximos o mínimos locales.

Máximos y mínimos Absolutos (globales).

Ahora bien, el objeto de estudio no está en los máximos y mínimos locales solamente, sino también en los valores **máximos y mínimos globales o absolutos** alcanzados por una función continua dada.

Si f es una función con dominio D, decimos que f(c) es el valor **máximo absoluto** de f en D a condición de que sea **f(c)** $\geq$ **f(x)** para toda x del dominio D. Resulta claro cómo definir el mínimo global o absoluto. La gráfica de la figura #4.1.5 a continuación enseña algunos extremos locales y globales.



Figura#4.1.5. Algunos extremos son globales, otros son sólo locales.

El teorema 2 nos dice que los valores máximos y mínimos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado [a,b] ocurren o bien en uno de los puntos frontera a y b o en un punto crítico de f.

Teorema 2. Máximos y mínimos absolutos.

Supóngase que **f(x)** es el valor máximo absoluto (o mínimo) de la función **f** en el intervalo cerrado **[a,b]**. Entonces **c** es o bien un punto crítico de **f** o uno de los extremos **a** o **b**.

Como consecuencia del teorema 2, podemos encontrar los valores máximos o mínimos (absolutos) de f en [a,b] mediante.

1. La localización inicial de los puntos críticos de f en [a,b]; y
2. La búsqueda posterior del valor de f en cada uno de los puntos críticos y de los dos puntos extremos.

El mayor de estos valores debe ser el valor máximo absoluto de f y el menor será el valor mínimo absoluto. Este procedimiento se llama **método de máximos y mínimos de intervalos cerrados.**

Ejemplo #1

Encuentre los valores máximos y mínimos de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$ en el intervalo cerrado [0,3].

Solución:

La derivada de f es:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1)$$

En consecuencia, los valores críticos de f son -1 y 2, pero sólo el último está en el intervalo [0,3]. Entonces, el único punto crítico de f en [0,3] es x = 2. Incluyendo los dos puntos extremos, nuestra lista de posibilidades para máximos y mínimos consta de x = 0,2 y 3.

Evaluemos la función f en cada uno de estos puntos:

f(0) = 15, ← Máximo
f(2) = - 5, ← Mínimo
f(3) = 6

En consecuencia, el valor máximo de f(x) en [0,3] es f(0) = 15; el valor mínimo es f(2) = -5.

Ejemplo #2

Encuentre los valores máximos y mínimos de $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$ en el intervalo cerrado [-1,4].

Solución:

La diferenciación de f produce:

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{-1/3} - \frac{5}{3}x^{2/3}$$

$$= \frac{5}{3}x^{-1/3}(2 - x) = \frac{5(2 - x)}{3x^{1/3}}$$

Por tanto, f tiene **dos puntos críticos** en el intervalo **x = 2**, donde la derivada es cero y **x =0**, donde f' no existe (la gráfica tiene tangente vertical en (0,0)). Cuando evaluamos f(x) en esos dos puntos críticos y en los puntos extremos obtenemos

$$f(-1) = 5\sqrt[3]{(-1)^2} - (-1)^{5/3} = 5 + 1 = 6,$$

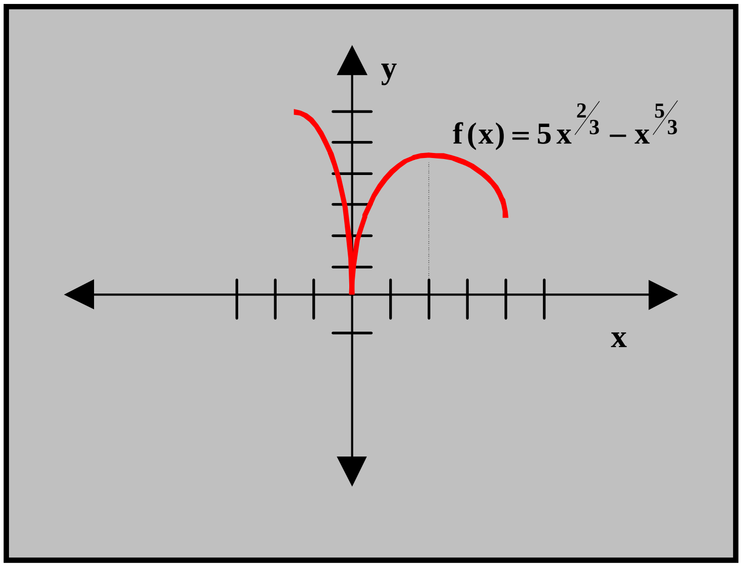
$$f(0) = 0,$$

$$f(2) = (5)(2^{2/3}) - 2^{5/3} \approx 4.76,$$

$$f(4) = (5)(4^{2/3}) - 4^{5/3} \approx 2.52,$$

Entonces, el valor máximo f(-1) = 6 se presenta en un punto extremo y el valor mínimo f(0) = 0 en el punto en el que f no es diferenciable.

Trazando suficientes puntos se puede verificar que la gráfica de f se ve como la de la figura #4.1.6.



Figura#. 4.1.6

4.1.2 Problemas de aplicación de máximos y mínimos.

Hay problemas de aplicación de máximos y mínimos para los que se puede usar el método de máximos y mínimos de intervalos cerrados. Cuando necesitamos resolver uno de estos problema, hay un paso inicial importante: debemos determinar la cantidad que se va a maximizar o minimizar. Esta cantidad será la variable dependiente en nuestra solución.

La variable dependiente debe ser expresada después como función de una variable independiente, la que “controle” los valores de la variable dependiente. Si el dominio de valores de la variable independiente (los que son pertinentes para el problema de aplicación) es un intervalo cerrado, podemos proceder con el método de máximos y mínimos de intervalo cerrado.

El procedimiento puede ser sintetizado en los siguientes pasos:

1. Encuentre la cantidad que se va a maximizar o minimizar.

Esta cantidad, que se deberá describir como una palabra o frase corta y marcarla con una letra, será la variable dependiente. Puesto que es la variable dependiente, depende de alguna otra cosa; esta será la variable independiente y la llamaremos variable independiente **x** en lo que sigue.

2. Exprese la variable dependiente como función de la variable independiente.

Use las condiciones del problema para escribir la variable dependiente en función de **x**. Luego trate de dibujar una figura o diagrama y marque las variables; con frecuencia este es el mejor medio de encontrar las relaciones necesarias. Use variables auxiliares si eso ayuda; pero no use demasiadas, porque al final deberá eliminarlas. Debe expresar la variable dependiente en términos de una sola variable independiente **x** y varias constantes, antes de que pueda calcular la derivada. Encuentre el dominio de la función que sea relevante para establecer el problema, así como su fórmula. Obligue al dominio a ser un intervalo cerrado, si es posible y si es un intervalo abierto acotado, adjunte los extremos.

3. Aplique el cálculo para encontrar los puntos críticos.

Calcule la derivada **$f'(x)$** de la función **$f(x)$** encontrada en el paso 2. Use la derivada para encontrar los puntos críticos del tipo **(i)** donde **$f'(x) = 0$** y del tipo **(ii)** donde **$f'(x)$** no exista.

4. Identifique los extremos.

Evalúe f en cada punto crítico del intervalo cerrado y en los dos extremos. Los valores que obtenga le dirán cuál es el máximo absoluto y cuál el mínimo. Por supuesto, uno o ambos pueden presentarse en más de un punto.

5. Conteste la pregunta propuesta en el problema.

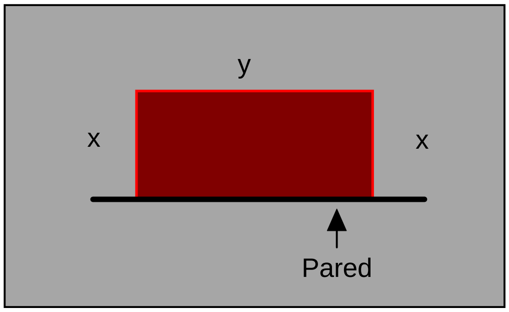
Es decir, interprete los resultados. La respuesta al problema establecido puede ser algo más que el mero valor máximo (o mínimo) posible de **f**. Dé una respuesta precisa para la pregunta específica que se formuló al principio.

Ejemplo #1

Un granjero tiene 200 yardas de barda que usará para construir tres lados de un corral; se utilizará un muro recto que ya existe como lado cuarto del corral. Qué dimensiones maximizarán el área del corral?.

Solución:

Queremos maximizar el área rectangular **$A = xy$**, donde **x** y **y** son las dimensiones indicadas en la figura #4.1.7



Figura#4.1.7. Corral rectangular

El hecho de usar 200 yardas de barda significa que

$$\mathbf{2x + y = 200}, \text{ por lo que } \mathbf{y = 200 - 2x} \qquad (1)$$

sustituyendo en **A = xy** este valor de **y**, obtenemos

$$\mathbf{A(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2} \qquad (2)$$

Esta fórmula expresa la variable dependiente **A** en función de la variable independiente **x**.

Antes de proceder, debemos determinar el rango de valores pertinentes para x. Para una barda real, las dos dimensiones deben ser positivas, así es que $x > 0$, y $y > 0$ implica que $x < 100$ por la ecuación (1). Esto da el intervalo abierto $0 < x < 100$. Pero para aplicar el método de máximos y mínimos de intervalo cerrado adjuntamos los extremos x = 0 y x = 100, para obtener el intervalo cerrado [0,100]. Los valores x = 0 y x = 100 corresponden a los corrales "degenerados" de área 0. Puesto que cero no es, por cierto, el valor máximo del área A, no hay perjuicio al agrandar así el dominio de la función A(x).

Calcular ahora la derivada de la función **A(x)** de la ecuación (2).

$$\frac{dA}{dx} = 200 - 4x$$

Ahora, $\frac{dA}{dx} = 0$ sólo cuando x = 50, y $\frac{dA}{dx}$ existe para toda x. Por lo tanto, x = 50 es el único punto crítico interior.

Incluyendo los puntos extremos, nuestra lista de posibilidades es x = 0, 50 y 100.

Evaluemos A(x) para cada una:

A(0) = 0,
A(50) = 5000, ← Máximo
A(100)= 0

En consecuencia, el área máxima es A(50) = 5000. En la ecuación (1) encontramos que y = 100 cuando x = 50. Por la tanto, el corral de área máxima es de 50 metros de ancho y 100 de largo.

Ejemplo #2

(Problema de inventarios).

Una gran tienda de línea blanca vende 600 refrigeradores cada año y por lo común los ordena el fabricante por cuartos; esto es, ordena 150 refrigeradores cada 3 meses, cada pedido colocado significa un costo fijo de \$16 por orden, más \$20 por cada refrigerador solicitado. Además, la tienda incurre en un costo anual de mantenimiento (cargos por almacenamiento) igual a \$30 multiplicado por el número promedio de refrigeradores disponibles en inventarios.

Suponga que este número promedio disponible es igual a la mitad del tamaño del lote de reordenamiento (el número pedido en cada vez). **Cuál debe ser el tamaño del lote de reordenamiento que minimice el costo total de reordenamiento y mantenimiento al año?** si se usa el tamaño del lote óptimo de reordenamiento. **Qué ahorro anual se produce, comparado con la costumbre presente de hacer pedidos de 150?.**

Solución:

Sea x el tamaño del lote de reordenamiento de modo que **x = 150** describe la política actual de la tienda. Entonces, la tienda debe ordenar 600/x lotes al año. El costo de cada pedido será **16 + 20x** dólares y el número medio de refrigeradores disponibles será **x/2.** Por lo tanto, el costo anual de pedidos y mantenimiento se calculará de la siguiente manera:

(Costo de reordenamiento) = (costo por pedido)(número de pedidos)

$$= (16 + 20x)\left(\frac{600}{x}\right)$$

(Costo de mantenimiento) = (costo por refrigerador)(número medio disponible)

$$= (30)\left(\frac{x}{2}\right).$$

Siendo así, el costo anual es

$$C(x) = 15x + (16 + 20x)\left(\frac{600}{x}\right) = 15x + \frac{9600}{x} + 12{,}000$$

Suponemos que habrá al menos un pedido al año y al menos un refrigerador por pedido; de ser así, C estará definido en el intervalo cerrado [1,600]. En consecuencia, podemos usar el método de máximos y mínimos de intervalo cerrado.

La derivada de C es:

$$C'(x) = 15 - \frac{9600}{x^2}$$

De modo que **C ' (x) = 0** cuando **$x \approx \pm$ 25.3** rechazamos **-25.3** y en la práctica no se puede aceptar en realidad el valor 25.3. Esperamos que el máximo ahorro práctico ocurra o bien con **x = 25 o x = 26**, a menos que se presente en los dos puntos extremos **x = 1 o x = 600**. Aquí están los valores de la función costo en los cuatro puntos de interés.

Tabla#4.1.1.

X	1	25	26	600
C	12,615	12,759.00	12,759.23	21,016

De este modo, el costo total de mantenimiento y pedido se minimiza al ordenar 25 refrigeradores dos veces al mes. En comparación con el procedimiento trimestral de reordenamiento actual, se producirá un ahorro anual de

C(150) - C(25) = 14,314 - 12,759 = 1555, o sea, $ 1555 al año.

4.1.3 Criterio de la primera derivada.

Funciones Crecientes y Decrecientes.

El signo de la primera derivada tiene un significado simple pero crucial:

f es creciente en un intervalo donde $f'(x) > 0$;
f es decreciente en un intervalo donde $f'(x) < 0$.

Geométricamente esto significa que donde $f'(x) > 0$, la gráfica de f se eleva cuando se recorre de izquierda a derecha. Cuando $f'(x) < 0$, la gráfica desciende. Se puede dar mayor precisión a los términos creciente y decreciente en la siguiente forma:

Definición: **Funciones creciente y decreciente**.

La función f es creciente en el intervalo I, si, para cada par de números x_1 y x_2 de I, con , $x_1 < x_2$,

$f(x_1) < f(x_2)$.

Es decir,

$x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.

La función f es decreciente en I siempre que $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$ para cualquier par de puntos x_1 y x_2 de I.

La figura #4.1.8 ilustra esta definición.

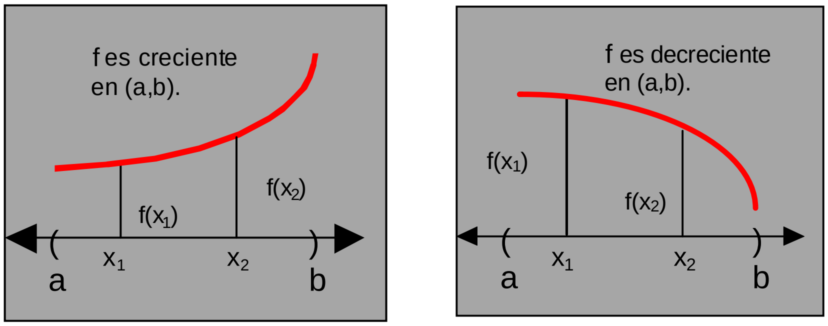
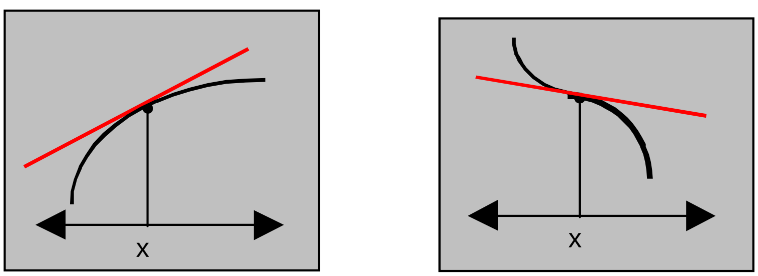


Figura #4.1.8: Función creciente y decreciente.

Se debe observar que se habla de función **creciente o decreciente** en un intervalo, no en un punto simple. No obstante, si se considera el signo de $\mathbf{f\,'(x)}$ en un sólo punto, se obtiene una imagen intuitiva de la importancia del signo de la derivada. Esto se debe a que la derivada $\mathbf{f\,'(x)}$ es la pendiente de la recta en el punto **(x,f(x))** de la gráfica de **f.** Si $\mathbf{f\,'(x)} > \mathbf{0}$, la recta tangente tiene pendiente positiva y por lo tanto se eleva al recorrerla de izquierda a derecha. Por intuición, parece aceptable que una tangente ascendente corresponda a una gráfica ascendente y por lo tanto, a una función creciente. En forma similar, esperamos ver una gráfica que desciende cuando $\mathbf{f\,'(x)}$ es negativa.

La figura #4.1.9 muestra un par de gráficas que ilustran esta notación intuitiva.



$f\,'(x) > 0$, gráfica ascendente en x.

$f\,'(x) < 0$, gráfica descendente en x.

Figura # 4.1.9. Gráficas ascendente en **x** y descendente en **x**.

Advertencia: Para determinar si una función f es creciente o decreciente, debemos examinar el signo de $\mathbf{f\,'}$ en todo el intervalo, no sólo en un punto.

Criterio para funciones crecientes o decrecientes.

Sea f una función derivable en el intervalo (a,b).

1. Si $\mathbf{f\,'(x)} > \mathbf{0}$ para todo x en (a,b), entonces f es creciente en (a,b).
2. Si $\mathbf{f\,'(x)} < \mathbf{0}$ para todo x en (a,b), entonces f es decreciente

Para saber como aplicar el criterio anterior, notemos que para f continuas, $f'(x)$ sólo cambia de signo en los puntos críticos. Luego para determinar los intervalos en que f es creciente o decreciente sugerimos los pasos siguientes:

1). Localizar los puntos críticos de f.

2). Mirar el signo de $f'(x)$ en un punto de cada intervalo determinado por dos números críticos consecutivos.

3). Decidir, mediante el criterio, si f es creciente o decreciente en cada uno de esos intervalos de prueba.

Ejemplo #1

Hallar los intervalos en que f (x) = $x^3 - \frac{3}{2}x^2$ es creciente o decreciente.

Solución:

Comenzamos igualando $f'(x)$ a cero.

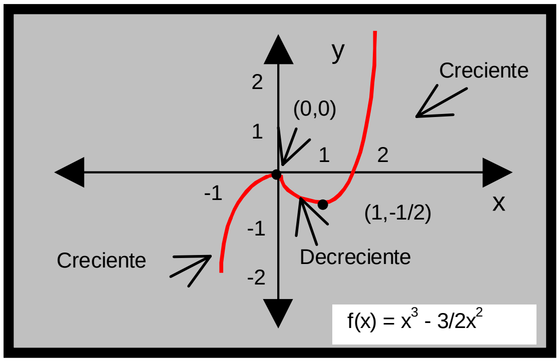
$$f'(x) = 3x^2 - 3x = 0 \qquad \textbf{hacer } f'(x) = 0$$
$$= 3(x)(x-1) = 0 \qquad \textbf{Factorizar.}$$
$$x = 0,1 \qquad \textbf{Números críticos.}$$

Como $f'(x)$ esta definida en todos los puntos **x=0** y **x=1** son los únicos números críticos. La tabla#4.1.2 resume lo que ocurre en cada intervalo que ellas determinan.

Tabla#4.1.2.

Intervalo	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < \infty$
Valor de prueba	x = -1	x = 1/2	x = 2
Signo de $f'(x)$	$f'(-1) = 6 > 0$	$f'(1/2) = -3/4 < 0$	$f'(2) = 6 > 0$
Conclusión	Creciente	Decreciente	Creciente

Notemos que los valores de prueba de la tabla#4.1.2 se han escogido por conveniencia. La gráfica de f se ve en la figura #4.1.10.



Figura#4.1.10.

La función del ejemplo #1 no sólo es continua sino derivable. Para tales funciones, los únicos puntos críticos son los que hacen $\mathbf{f'(x) = 0}$. En el próximo ejemplo aparecen ya, junto a esos, otros puntos críticos en los que $\mathbf{f'(x)}$ no está definida.

Ejemplo #2

Hallar los intervalos en que $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$ es creciente o decreciente.

Solución:

$$\mathbf{f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}}$$

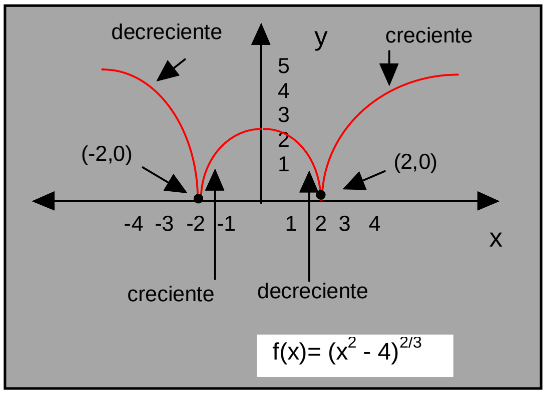
$$\mathbf{f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-4)^{-1/3}(2x) = \frac{4x}{3(x^2-4)^{1/3}}}$$

como $\mathbf{f'(x)}$ es cero en x = 0 y $\mathbf{f'(x)}$ no está definida en x = ± 2, los números críticos son x = -2, x = 0 y x = 2.

La tabla #4.1.3 resume las pruebas realizadas en cada intervalo resultante. La figura #4.1.11 muestra la gráfica de f (x).

Tabla#4.1.3.

Intervalo	**$-\infty < x < -2$**	**$-2 < x < 0$**	**$0 < x < 2$**	**$2 < x < \infty$**
Valor de prueba	x = -3	x = -1	x = 1	x = 3
Signo de $f'(x)$	$\mathbf{f'(-3) < 0}$	$\mathbf{f'(-1) > 0}$	$\mathbf{f'(1) < 0}$	$\mathbf{f'(3) > 0}$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente



Figura#4.1.11.

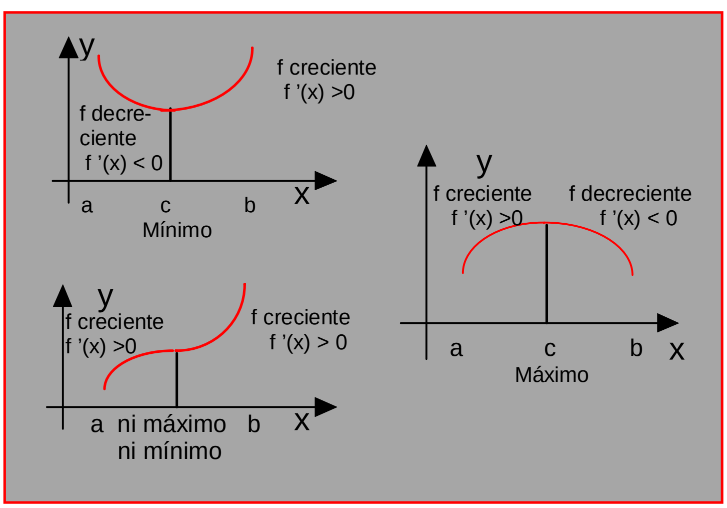
Nota: En la tabla#4.1.3 no es necesario evaluar $f'(x)$ en los valores de prueba, sino sólo su signo. Así podemos determinar que $f'(-3)$ es negativo como sigue:

$$f'(-3) = \frac{4(-3)}{3[(-3)^2-4]^{1/3}} = \frac{4(-3)}{3(9-4)^{1/3}} = \frac{\text{negativo}}{\text{positivo}} = \text{negativo}$$

Criterio de la Primera Derivada.

Una vez determinados los intervalos en que f es creciente o decreciente es fácil localizar sus extremos relativos.

Suponiendo que f es una función diferenciable en el intervalo abierto I y que tiene un extremo local en I. El teorema 1 "Máximos y mínimos locales" visto anteriormente dice: Que el extremo debe ocurrir en el tipo de punto crítico donde $f'(x) = 0$. Pero si $f'(c) = 0$, no deduce que exista un extremo local en c. Lo que se necesita es una forma de determinar, cuando $f'(c) = 0$, si f(c) es un valor máximo local, mínimo o ninguno de ellos.



Figura#4.1.12. Criterio de la primera derivada.

La figura #4.1.12 sugiere cómo se pueden establecer dichas distinciones. Si f es decreciente a la izquierda de c y creciente a la derecha, entonces f(c) será un mínimo local. Por otra parte, si f es creciente a la izquierda de c y decreciente a la derecha, entonces f(c) es un máximo local. Entonces podemos decir dónde es creciente o decreciente la función f , este comportamiento se determina por el signo de $f'(x)$. De esta manera se obtiene el siguiente criterio para máximos y mínimos locales.

Teorema: Prueba de la primera derivada

Supongamos que la función f es continua en el intervalo abierto (a,b) y diferenciable en ese punto, excepto quizá en c.

(i) Si $f'(x) < 0$ en (a,c) y $f'(x) > 0$ en (c,b), entonces f(c) es el valor mínimo de f en (a,b).

(ii) Si $f'(x) > 0$ en (a,c) y $f'(x) < 0$ en (c,b), entonces f(c) es el valor máximo de f en (a,b).

(iii) Si $f'(x) > 0$ o si $f'(x) < 0$ para toda x de (a,b), excepto para x = c, entonces f(c) no es el valor máximo ni mínimo de f .

En estos términos f(c) es un extremo local si la primera derivada $f'(x)$ cambia de signo cuando **x** aumenta a través de **c** y la dirección de este cambio de signo determina si f(c) es un máximo o mínimo locales.

Una buena manera de recordar los puntos (i) y (ii) del criterio de la primera derivada consiste simplemente en visualizar la figura #4.1.12.

Ejemplo #1

Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x$ en el intervalo (0,2π). Aplicar el criterio de la primera derivada.

Solución:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x = 0 \qquad \text{hacer } f'(x) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

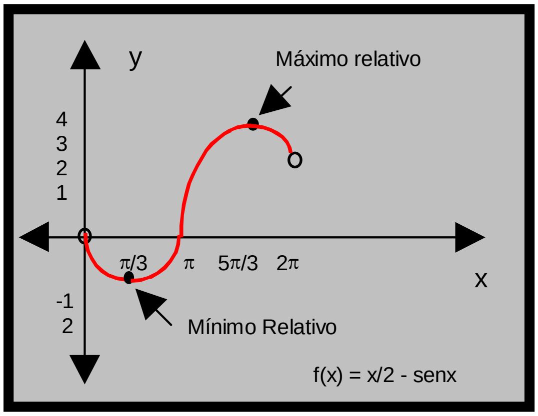
$$x = \frac{\pi}{3}, 5\frac{\pi}{3} \qquad \text{números críticos}$$

La tabla #4.1.4 muestra un formato para aplicar el criterio de la primera derivada.

Tabla#4.1.4

Intervalos	$0 < x < \pi/3$	$\pi/3 < x < 5\pi/3$	$5\pi/3 < x < 2\pi$
Valor de prueba	$x=\pi/4$	$x=\pi$	$x=7\pi/4$
Signo de $f'(x)$	$f'(\pi/4) < 0$	$f'(\pi) > 0$	$f'(7\pi/4) < 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente

De la tabla #4.1.4 concluimos que hay un mínimo relativo en $\frac{\pi}{3}$ y un máximo relativo en **x =** $\frac{5\pi}{3}$. Veamos la gráfica de la función en la figura #4.1.13.



Figura#4.1.13

Ejemplo #2

Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función, utilizando el criterio de la primera derivada.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$$

Solución:

La derivada es:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 6(x+2)(x-3),$$

así es que los puntos críticos (en los que $f'(x) = 0$) son **x = -2** y **x = 3**. Ellos separan al eje de las x en los intervalos abiertos $(-\infty,-2)$, $(-2,3)$ y $(3, \infty)$. La tabla #4.1.5 muestra el signo de $f'(x)$ en cada uno de estos intervalos.

Tabla#4.1.5

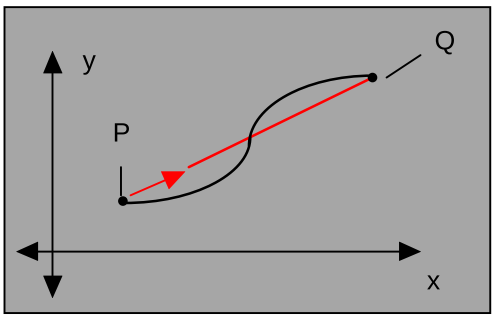
Intervalo	$f'(x)$	f
(-∞,-2)	Pos.	creciente
(-2 ,3)	Neg.	decreciente
(3 , ∞)	Pos.	creciente

Entonces, $f'(x)$ es positiva a la izquierda y negativa a la derecha del punto crítico x = -2, por la parte (ii) del teorema, f(-2) es máximo local de f. En el punto crítico x = 3, f(x) es negativa a la izquierda y positiva a la derecha, por lo que f(3) es un mínimo local, de acuerdo a la parte (i).

4.1.4 Teorema del valor medio.

Aunque los dibujos de gráficas ascendentes y descendentes son sugerentes, no proporcionan una verdadera demostración del significado del signo de la derivada. Para establecer la conexión entre la elevación o caída de la gráfica con el signo de la derivada, se necesita el **teorema del valor medio**.

Como introducción al teorema del valor medio, formulemos la siguiente pregunta. Suponiendo que **P** y **Q** son dos puntos del plano, siendo **Q** un punto que en general estará al Este de **P**, como se muestra en la figura #4.1.14.



Figura#4.1.14. Se puede navegar de P a Q sin navegar en algún momento (aunque sólo sea un instante) en la dirección PQ (la dirección de la flecha)?.

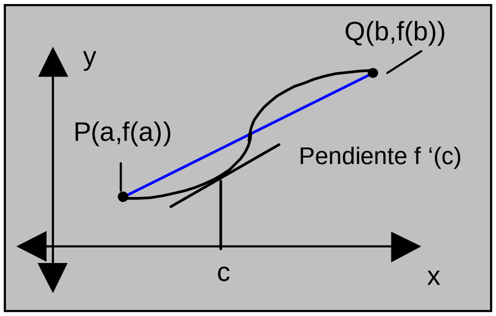
Es posible navegar en bote de P a Q, siempre en dirección aproximada al Este, sin que nunca (ni siquiera por un instante) se navegue en la dirección exacta de P a Q?.

Es decir, se puede navegar de P a Q sin que la recta instantánea de movimiento sea en algún momento paralela a la recta PQ?.

El teorema del valor medio dice que la respuesta a esta pregunta es negativa; siempre habrá al menos un instante en el que naveguemos en dirección paralela a la recta PQ, sin importar qué recorrido se elija.

Haciendo una interpretación geométrica: sea la ruta del bote la gráfica de una función diferenciable **y = f(x),** cuyos extremos son **P(a,f(a))** y **Q(b,f(b)).** Lo que esto quiere decir es que debe haber un punto de la gráfica en la que la recta tangente a la curva sea paralela a la recta **PQ** que une los puntos extremos. Pero la pendiente de la recta tangente en el punto (c, f(c)) que se muestra en la figura #4.1.15 es $f'(c)$, mientras que la pendiente de PQ es

$$\frac{f(a)-f(b)}{b-a}$$



Figura#4.1.15. El problema del bote en terminología matemática.

El teorema del valor medio garantiza que existe un punto **c** en **(a,b)** donde la recta tangente en **(c,f(c)),** es en realidad paralela a la recta **PQ**. Matemáticamente existe un número **c** en **(a,b)** talque

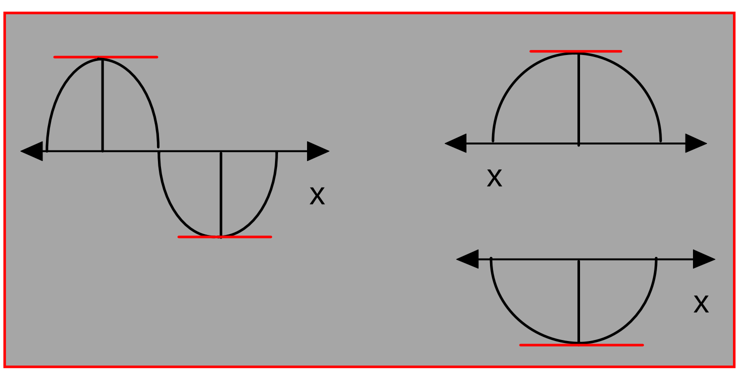
$$\mathbf{f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{b-a}} \qquad (1)$$

Antes de formular formalmente el teorema del valor medio es necesario hacer un estudio preliminar del teorema de Rolle.

Teorema de Rolle:

Supongamos que la función **f** es continua en el intervalo cerrado **[a,b]** y diferenciable en su interior **(a,b).** Si **f(a) = 0 = f(b),** entonces $\mathbf{f'(c)=0}$ para algún número **c** en **(a,b).**

Por lo tanto entre cada par de ceros de una función diferenciable existe por lo menos un punto en el que la recta tangente es horizontal. En la figura #4.1.16 se hace una ilustración.



Figura#4.1.16

Demostración:

Puesto que **f** es continua en **[a,b]**, debe alcanzar tanto un valor máximo como un mínimo en **[a,b]**. Si **f** tiene algunos o todos sus valores positivos, considérese su valor máximo **f(c)**. Puesto que **f(a) = f(b) = 0**, **c** debe ser un punto de **(a,b)**. Puesto que **f** es diferenciable en **c**, se sigue que $\mathbf{f'(c)=0}$.

Análogamente, si f tiene cualquier valor negativo, se puede considerar su valor mínimo **f(c)** y concluir que $\mathbf{f'(c)=0}$. Si **f** no tiene valores positivos ni negativos, entonces **f** es idéntico a cero en **[a,b]** y se deduce que $\mathbf{f'(c)=0}$ para toda **c** de **(a,b)**. Vemos así que la conclusión del teorema de Rolle se justifica en todos los casos.

Ejemplo #1

Supongamos que $\mathbf{f(x) = x^{1/2} - x^{3/2}}$ **en [0,1]**. Encuentre un número que satisfaga la conclusión del teorema de Rolle.

Solución:

Notemos que f es continua en **[0,1**] y diferenciable en **(0,1)**, debido a la presencia del término $\mathbf{x^{1/2}}$, **f** no es diferenciable en **x = 0**. También, **f(0) = f(1) = 0**, por lo que se satisface la hipótesis del teorema de Rolle. Y como

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2}(1-3x), \end{aligned}$$

vemos que $\mathbf{f'(c)=0}$ para **c =** $\mathbf{\frac{1}{3}}$.

Ahora si podemos establecer y demostrar formalmente el teorema del valor medio.

> **Teorema del valor medio:**
>
> Supongamos que la función f es continua **[a,b].**
> Y diferenciable en **(a,b).**
> Entonces $\mathbf{f(a) - f(b) = f'(c)(b-a)}$ (2)
> para algún número **c** en **(a,b).**

Puesto que la ecuación (2) es equivalente a la ecuación (1), la conclusión del teorema del valor medio es que debe haber al menos un punto de la curva y = f(x) en la que la recta tangente sea paralela a la recta que une sus extremos **P(a,f(a)) y Q(b,f(b)).**

Demostración:

Consideremos la "**función auxiliar**" "**g**" sugerida por la figura #4.1.17. El valor g(x) es, por definición, la diferencia de alturas verticales sobre **x** del punto **(x,f(x))** de la curva al punto correspondiente de la recta PQ. Es obvio que el punto de la curva y = f(x) en el que la recta tangente es paralela a PQ corresponde a un mínimo de "g". También es claro que g(a) = g(b) = 0, por lo que se puede aplicar el teorema de Rolle a la función "g". De esta manera, la demostración del teorema del valor medio consiste en :

Primero : obtener una fórmula de la función "g".

Segundo : localizar el punto **c** tal que $\mathbf{g'(c) = 0}$.

Para concluir : demostrar que c es el número exacto que se necesita para satisfacer la ecuación (2).

Geométricamente:

Puesto que la recta PQ pasa por (a,f(a)) con pendiente

$$\mathbf{m = \frac{f(a) - f(b)}{b - a}},$$

la fórmula punto y pendiente de la ecuación de la recta da la siguiente ecuación de PQ:

$$\mathbf{y = y_{recta} = f(a) + m(x - a)},$$

Entonces

$$\mathbf{g(x) = y_{curva} - y_{recta} = f(x) - f(a) - m(x - a)}$$

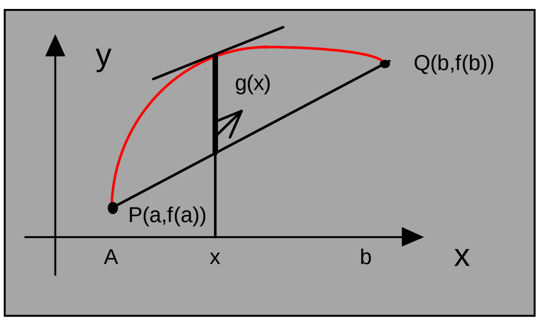


Figura #4.1.17. Construcción de la función auxiliar "g".

Se puede verificar por sustitución directa que **g(a) = g(b) = 0**. Y, dado que **g** es continua en **[a,b]** y diferenciable en **(a,b)**, se puede aplicar el teorema de Rolle. Por lo tanto, existe un punto c en algún punto del intervalo abierto **(a,b)** en donde $\mathbf{g'(c) = 0}$ pero

$$\mathbf{g'(x) = f'(x) - m = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Puesto que $\mathbf{g'(c) = 0}$, encontramos que

$$\mathbf{0 = f'(c) - \frac{f(a) - f(b)}{b - a}},$$

y entonces

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Se puede observar que la demostración del teorema del valor medio es una aplicación del teorema de Rolle, mientras que éste es un caso especial de aquél, para f(a) = 0 = f(b).

Ejemplo #2

Dada la función **f(x) = x^3 - 12x** definida en [-1,3], existe algún número c en (-1,3) que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio?

Solución:

Puesto que f es una función polinomial, es continua en [-1,3] y diferenciable en (-1,3). Ahora bien,

f(3) = -9 y f(-1) = 11

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \text{ y } f'(c) = 3c^2 - 12$$

por consiguiente, debe tenerse que.

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-20}{4} = 3c^2 - 12.$$

Así que **$3c^2$ = 7.**

c^2 = 7/3

Aunque esta ecuación tiene dos soluciones, la única solución en (-1,3) es $c = \sqrt{7/3} \approx 1.53$

Ejemplo #3

Suponga que viaja de **A** a **B**, una distancia por carretera de 50 millas exactas (digamos) en un tiempo preciso de 1hora, del tiempo **t = 0** a **t = 1**. Sea f(t) la distancia recorrida en el tiempo **t** y suponga que **f** es una función diferenciable. Entonces, el teorema del valor medio, implica que

$$50 = f(1) - f(0) = f'(c)(1 - 0)$$
$$50 = f'(c)$$

en algún instante c pertenece a (0,1). Pero $f'(c)$ es la velocidad instantánea en el tiempo t = c. Por lo tanto, si la velocidad promedio del viaje es de 50 mi/h, debemos tener una velocidad instantánea de 50 mi/h exactas al menos en una ocasión durante el viaje.

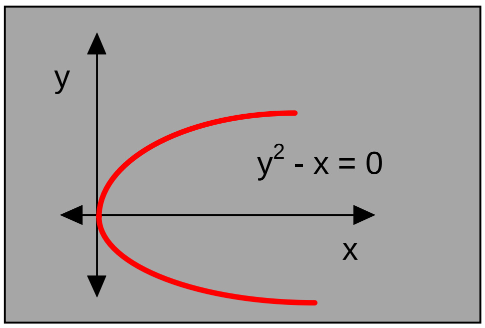
4.1.5 Diferenciación Implícita.

Una ecuación con dos variables **x** y **y** puede tener una o más soluciones de **y** en términos de **x** o de **x** en términos de **y** . Estas soluciones son funciones de las que decimos que están **definidas implícitamente** por la ecuación. En esta sección estudiaremos la diferenciación de tales funciones.

Por ejemplo, la ecuación $\mathbf{y^2 - x = 0}$ define implícitamente una parábola de dos funciones continuas de x :

$$\mathbf{y = \sqrt{x} \quad y \quad y = -\sqrt{x}}$$

Cada una tiene como dominio el semieje $x \geq 0$. Las gráficas de esas dos funciones son las ramas superior e inferior de la parábola de la figura #4.1.18.



Figura#4.1.18. Parábola $y^2 - x = 0$

La parábola entera no puede ser la gráfica de una función de **x** porque una vertical no puede cortar a la gráfica de una función en más de un punto.

La ecuación del círculo unitario $\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$ es la definición implícita de cuatro funciones entre otras.

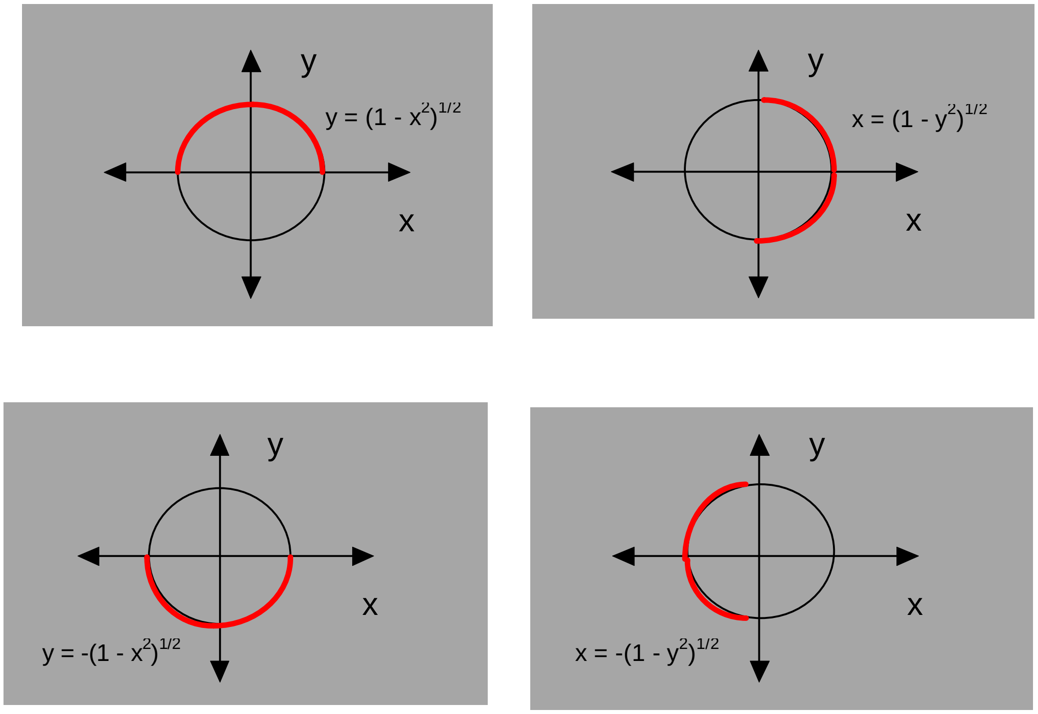
$$\mathbf{y = +\sqrt{1-x^2} \quad para \quad x \quad en \; [-1,1],}$$

$$\mathbf{y = -\sqrt{1-x^2} \quad para \quad x \quad en \; [-1,1],}$$

$$\mathbf{x = +\sqrt{1-y^2} \quad para \quad y \quad en \; [-1,1],}$$

$$\mathbf{x = -\sqrt{1-y^2} \quad para \quad y \quad en \; [-1,1],}$$

Las cuatro gráficas son subrayadas en los cuatro círculos unitarios de la figura #4.1.19.



Figura#4.1.19. Funciones definidas implícitamente por $\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$.

La ecuación $\mathbf{2x^2 + 2y^2 + 3 = 0}$ no da la definición implícita de ninguna función, porque esta ecuación no tiene solución real **(x,y).**

En el cálculo avanzado se estudian las condiciones que garantizan que una función definida implícitamente sea en verdad diferenciable. Aquí procederemos bajo la hipótesis de que nuestras funciones implícitas son diferenciables en la mayoría de los puntos de su dominio. (Las funciones cuyas gráficas se muestran en la anterior figura #4.1.19 no son diferenciables en los extremos de sus dominios). Esta es una hipótesis razonable siempre que la función con la que estemos trabajando sea en sí misma “manejable”, tal como una polinomial con dos variables.

Cuando se presupone la diferenciabilidad, podemos usar la regla de la cadena para derivar la ecuación dada, pensando en “x” como variable independiente. Podemos resolver después la ecuación resultante despejando la derivada $\mathbf{\frac{dy}{dx} = f'(x)}$ de la función implícita. Este proceso de llama **diferenciación implícita.**

Ejemplo #1

Use la diferenciación implícita para encontrar la derivada de una función diferenciable y = f(x) cuya definición implícita es la ecuación $\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$.

Solución:

La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ será considerada como una identidad que da la definición implícita de **"y"** en función de **"x".** Puesto que $x^2 + y^2$ es entonces una función de **"x",** tiene la misma derivada que la función constante **1** del otro miembro de la identidad. Por tanto, podemos diferenciar ambos miembros de $x^2 + y^2 = 1$ con respecto a **"x"** e igualar los resultados.

Obtenemos:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

En este paso, debemos recordar que "y" es una función de "x", por lo que $D_x(y^2) = 2yD_xy$.

Después, despejamos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad (1)$$

Puede ser sorprendente ver una fórmula de $\frac{dy}{dx}$ que contiene tanto a "x" como "y", pero dicha fórmula es con frecuencia tan útil como la que contenga sólo a "x". Por ejemplo, la fórmula anterior nos dice que la pendiente de la tangente al círculo $x^2 + y^2 = 1$ en el punto

$\left(1/\sqrt{5}\,,\ 2/\sqrt{5}\right)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1/\sqrt{5}\,,\,2/\sqrt{5})} = -\frac{1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}} = -\frac{1}{2}$$

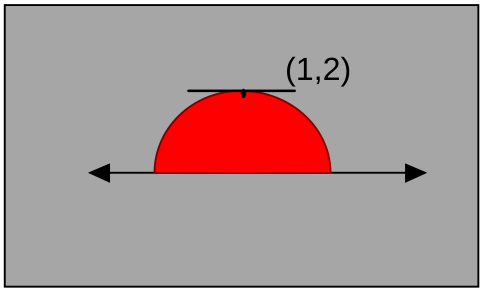
A continuación un ejemplo autoexplicativo para especificar dónde se evalúa $\frac{dy}{dx}$.

Nótese que si $y = \pm\sqrt{1-x^2}$, entonces $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\pm\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$,

en concordancia con la ecuación (1). Por lo tanto, (1) da al mismo tiempo la derivada tanto de las funciones $y = +\sqrt{1-x^2}$ como $y = -\sqrt{1-x^2}$ definidas implícitamente mediante la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplo #2

Determinar la ecuación general de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 - xy = 7$ en el punto (1,2). Utilizar diferenciación implícita.



Figura#1.4.20.

Solución:

Diferenciando implícitamente en ambos miembros de la ecuación de la curva.

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - (x\frac{dy}{dx} + y) = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} = y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - x) = y - 3x^2$$

Despejando $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x}$$

Ahora evaluemos en el punto (1,2) para obtener la pendiente

$$\frac{(2) - 3(1)^2}{3(2)^2 - 1} = -\frac{1}{11}$$

luego utilizamos la fórmula punto-pendiente para encontrar la ec. general de la recta tangente a la curva.

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{11}(x - 1)$$
$$11(y - 2) = -x + 1$$
$$11y - 22 + x - 1 = 0$$
$$x + 11y - 23 = 0 \quad \text{Ecuación de recta tangente.}$$

4.2 Derivadas Superiores y Concavidad.

Anteriormente vimos que el signo de la primera derivada f' dice si la gráfica de la función **f** es ascendente o descendente. En esta sección veremos que el signo de la segunda derivada de **f**, que es la derivada de f', dice en qué forma se dobla la curva **y = f(x),** si hacia arriba o hacia abajo.

4.2.1 Derivadas Superiores.

La **segunda derivada** de f se denota por f'' y su valor en x es

$$f''(x) = D(f'(x)) = D(D(f(x))) = D^2 f(x).$$

La derivada de f'' es la tercera derivada f''' de f, siendo

$$f'''(x) = D(f''(x)) = D(D^2 f(x)) = D^3 f(x).$$

Si **y = f(x)**, las **n** primeras derivadas se escriben como

$$D_x y,\ D_x^2 y, D_x^3 y, \ldots D_x^n y.$$

o

$$y', y'', y''', \ldots y^{(n)},$$

o, en fin, como

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$$

en notación diferencial.

Ejemplo #1

Encuentre las cuatro primeras derivadas de $f(x) = 2x^3 + \frac{1}{x^2} + 16x^{7/2}$.

Solución:

$$f'(x) = 6x^2 - \frac{2}{x^3} + 56x^{5/2},$$
$$f''(x) = 12x + \frac{6}{x^4} + 140x^{3/2},$$

$$f'''(x) = 12 - \frac{24}{x^5} + 210x^{1/2}, \text{ y}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{120}{x^6} + \frac{105}{x^{1/2}}$$

El siguiente ejemplo muestra como se calculan las derivadas superiores de las funciones definidas implícitamente.

Ejemplo #2

Encuentre la segunda derivada y'' de la función y = y(x)

si $x^2 - xy + y^2 = 9$

Solución:

La diferenciación implícita de la ecuación dada con respecto a **x** produce:

$$2x - x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

así es que $y' = \dfrac{y-2x}{2y-x}$

Se obtiene y'' mediante una nueva diferenciación implícita, usando la regla del cociente. Después de esto, se sustituye y' por el valor recién encontrado.

$$y'' = D_x\left(\frac{y-2x}{2y-x}\right)$$

$$= \frac{(y'-2)(2y-x)-(y-2x)(2y'-1)}{(2y-x)^2}$$

$$= \frac{3xy'-3y}{(2y-x)^2}$$

$$= \frac{3x[(y-2x)/(2y-x)]-3y}{(2y-x)^2} = \frac{\dfrac{6x^2-6y^2}{2y-x}}{(2y-x)^2}$$

$$y'' = -\frac{6(x^2-xy+y^2)}{(2y-x)^3}$$

PROGRAMACION

El software Mathematica incorpora un comando que permite calcular la n-ésima derivada de una función f con respecto a x, en algunos casos complejos podemos auxiliarnos de este comando para resolverlos.

La sintaxis es: D[f,{X,n}].

Ejemplos:

Calcule las tres primeras derivadas usando el Sw. Mathematica.

(1) $f(x) = \dfrac{2}{(2x-1)^2}$

La instrucción es:

D[2/(2X-1)^2,{X,3}]

La respuesta:

$-384(2x-1)^{-5}$

(2) $h(y) = \dfrac{y}{(y+1)}$

La instrucción es:

Simplify[D[Y/(Y+1),{Y,3}]]

La respuesta:

6(y + 1)-4

(3) $g(t) = \dfrac{1}{2t^{1/2}} - \dfrac{3}{(1-t)^{1/3}}$

La instrucción:

D[1/(2T^(1/2))-3/((1-T)^(1/3)),{T,3}]

La respuesta:

$$-\frac{15}{16}t^{-7/2} - \frac{28}{9}(1-t)^{-10/3}$$

(4) $f(x) = \text{SenxCosx}$

La Instrucción:

D[Sin[X]Cos[X],{X,3}]

La respuesta:

$-4\,\mathrm{Cos}^2[X] + 4\,\mathrm{Sin}^2[X]$

4.2.2 Concavidad y el criterio de la Segunda Derivada.

En esta sección estudiaremos el significado del signo de la segunda derivada.

Supongamos primero que $f''(x) > 0$ en el intervalo I. Entonces, $f'(x)$ es una función creciente en I porque su derivada $f''(x)$ es positiva. Entonces, al recorrer la gráfica y = f(x) de izquierda a derecha, se verá la recta tangente girando en sentido opuesto al reloj, como se ve en la figura #4.2.1.

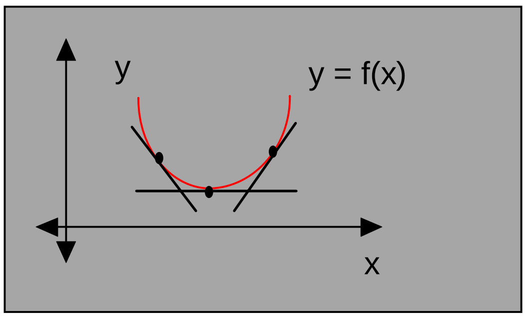
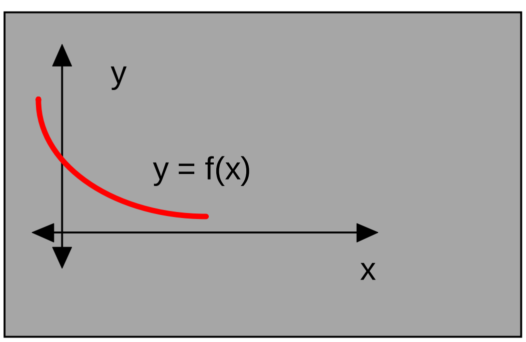


Figura #4.2.1. La gráfica se dobla hacia arriba (cóncava hacia arriba)

Se puede describir esta situación diciendo que la curva y = f(x) se dobla hacia arriba. Observemos que una curva se puede doblar hacia arriba cuando es creciente, como se ilustra en la figura #4.2.2.



Figura#4.2.2. Otra gráfica que se dobla hacia arriba (cóncava hacia arriba).

Por otra parte, si $f''(x) < 0$ en el intervalo I, $f'(x)$ es decreciente en I, por lo que la recta tangente gira en el sentido del reloj cuando **x** aumenta. En este caso decimos que la curva **y = f(x)** se dobla hacia abajo. Las figuras #4.2.3 y #4.2.4 ilustran dos formas en las que esto puede suceder.

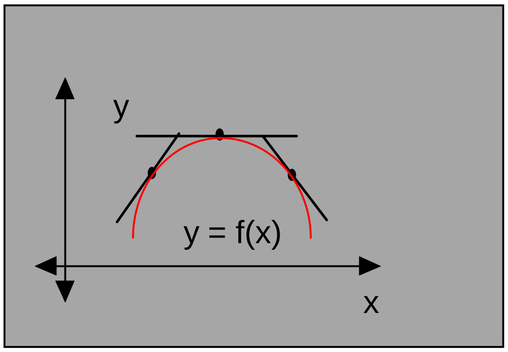
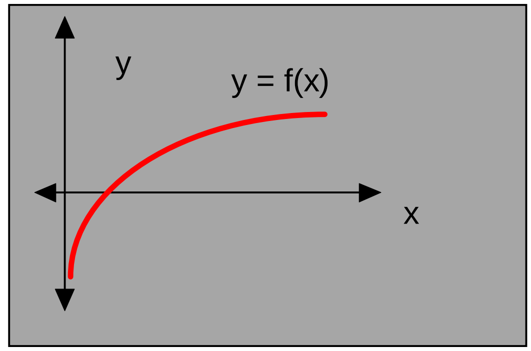


Figura #4.2.3. La gráfica se dobla hacia abajo (cóncava hacia abajo)



Figura#4.2.4. Otra gráfica que se dobla hacia abajo (cóncava hacia abajo)

Una comparación de las figuras #4.2.1 y #4.2.2 con las figuras #4.2.3 y #4.2.4 sugiere que si la curva y = f(x) está doblándose hacia arriba o hacia abajo está estrechamente relacionada con el hecho de si está arriba o abajo de su recta tangente. Esto último se refiere a la importante propiedad de la concavidad.

Definición de la Concavidad:

Supongamos que la función f es diferenciable en el punto “a” y que “L” sea la recta tangente a **y = f(x)** en **(a,f(a)).** Entonces, la función **f** (o su gráfica) es

(i) **Cóncava hacia arriba** en “a” si algún intervalo abierto que contenga a “a”, la gráfica de f está sobre L.

(ii) **Cóncava hacia abajo** en “a” si en algún intervalo abierto que contenga a “a” la gráfica de f está bajo L.

El siguiente teorema establece la relación entre la concavidad y el signo de la segunda derivada, esto debido a la relación con el doblamiento.

Teorema 1: Criterio de la Concavidad.

Supongamos que f' es diferenciable en un intervalo que contenga a “a”. Entonces, f es:

(i) Cóncava hacia arriba en “a” si $f'(x) > 0$;

(ii) Cóncava hacia abajo en “a” si $f'(x) < 0$;

El teorema 1 se refiere a la concavidad de una función en un punto simple. Pero para determinar si una curva y = f(x) se dobla hacia abajo o hacia arriba debemos examinar el signo de f'' en un intervalo completo, no sólo en un punto simple.

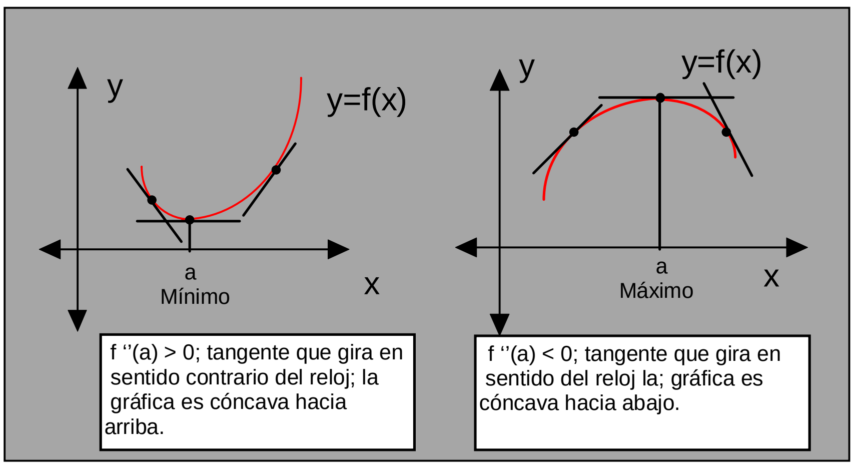
Supongamos ahora que, además de la hipótesis de diferenciabilidad del teorema 1, es $f'(a) = 0$, por lo que “a” es un punto crítico del tipo en el que la recta tangente es horizontal. **Entonces, f tiene un mínimo local en “a” si su gráfica está arriba de la recta horizontal en**

las proximidades de "a"; por el contrario, f es un máximo local en "a" si la gráfica está abajo de la recta tangente horizontal en las proximidades de "a". Esta observación , junto con el teorema 1 produce la condición suficiente para un extremo local.

Teorema 2: Criterio de la Segunda Derivada.

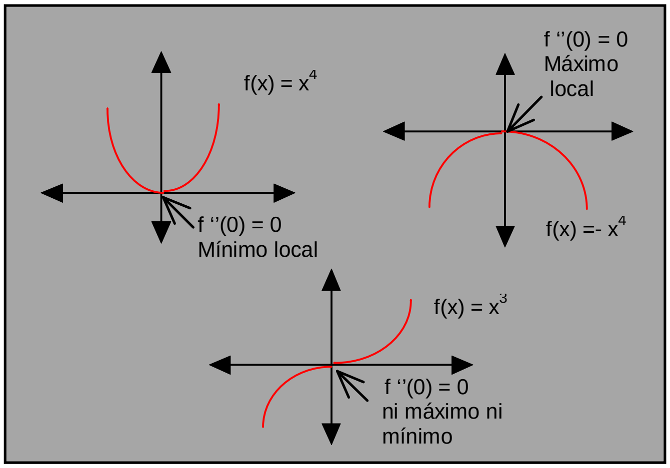
Supongamos que la función $\mathbf{f'}$ es diferenciable en un intervalo abierto que contenga al punto crítico "a" donde $\mathbf{f'(a)>0}$.
Entonces,
(i) f(a) es un mínimo local si $\mathbf{f''}$ (a) >0;
(ii) f(a) es un máximo local si $\mathbf{f''}$ (a) <0;

En vez de memorizar el enunciado de las condiciones (i) y (ii), es más fácil y confiable recordar el criterio de la segunda derivada visualizando las gráficas que se presentan en la figura #4.2.5.



Figura#4.2.5. Criterio de la Segunda Derivada.

Notemos que el criterio de la segunda derivada no dice nada de lo que sucede cuando $\mathbf{f''(a) = 0}$. Consideremos las tres funciones $f(x) = x^4$, $f(x) = -x^4$ y $f(x) = x^3$. Para cada una de ellas, $\mathbf{f'(0) = 0}$ y $\mathbf{f''(0) = 0}$. Sus gráficas, que aparecen en la figura#4.2.6 demuestran que cualquier cosa puede suceder en dicho punto.



Figura#4.2.6. No hay conclusión posible.

En forma similar, el criterio de la concavidad (teorema 1) no dice nada para el caso **$f''(a) = 0$**. Un punto en el que se anula la segunda derivada puede ser o no un punto donde la función cambia de cóncava hacia arriba en un lado a cóncava hacia abajo en el otro. Un punto donde la concavidad de una función cambia de esta manera se llama **punto de inflexión**.
Con más exactitud, el punto x = a es un punto de inflexión de la función f siempre que f sea cóncava hacia arriba a un lado de "a" , cóncava hacia abajo en el otro y continua para x = a.

También nos podemos referir a (a,f(a)) como punto de inflexión en la gráfica de f.

Teorema 3: Criterio del Punto de Inflexión.

El punto "a" es un punto de inflexión de la función continua f siempre que exista un intervalo I que contenga a "a" tal que para los puntos x de I, se completan
(i) $f''(x) > 0$ si $x < a$ y $f''(x) < 0$ si $x > a$, o
(ii) $f''(x) < 0$ si $x < a$ y $f''(x) > 0$ si $x > a$.

El hecho de que un punto en el que la segunda derivada cambia de signo sea un punto de inflexión se sigue del teorema 1 y de la definición de punto de inflexión.
Nota: En el mismo punto de inflexión **$f''(a) = 0$** o **$f''(a)$** no existe.

En la figura#4.2.7 se indican algunas posibilidades de puntos de inflexión, observemos las marcas de los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo con pequeñas copas que se abren hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.

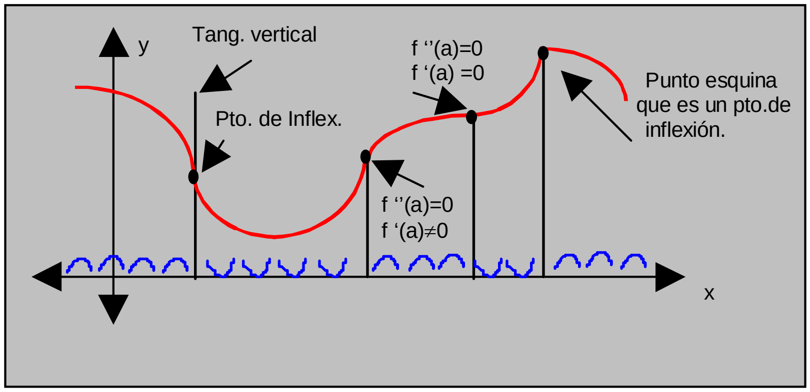


Figura #4.2.7. Algunos puntos de Inflexión.

Las pruebas de concavidad, extremos locales y puntos de inflexión en los teoremas 1 a 3 nos permiten complementar las técnicas de trazado de curvas.

Ejemplo #1

Diseñe la gráfica de $f(x) = 8x^5 - 5x^4 - 20x^3$, indicando los extremos locales, los puntos de inflexión y la estructura de concavidad.

Solución:

La primera derivada es:

$$f'(x) = 40x^4 - 20x^3 - 60x^2$$
$$= 20x^2(x + 1)(2x - 3)$$

La segunda derivada es:

$$f''(x) = 160x^3 - 60x^2 - 120x =$$
$$= 160x(x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{3}{4})$$

Cuando calculamos $f''(x)$ en cada punto crítico, encontramos que $f''(-1) = -100 < 0$, $f''(0) = 0$ y $f''(3/2) = 225 > 0$. Por lo tanto, el criterio de la segunda derivada nos dice que f tiene un **máximo local** para **x = -1**, y un **mínimo local** para **x=3/2**. El criterio de la segunda derivada no es suficiente para determinar el comportamiento de f en x = 0.

Puesto que f'' existe en todos los puntos, los posibles puntos de inflexión son las soluciones de la ecuación

$$f''(x) = 160x(x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{3}{4}) = 0$$

Es obvio que la solución es **x = 0**.

Para encontrar las otras dos, usemos la fórmula cuadrática para resolver la ecuación

$$x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} = 0$$

Esto da

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + 3}\right] \approx \mathbf{-0.70,\ 1.07}$$

siendo así, los tres posibles puntos de inflexión de f son **x = 0, x ≈ -0.70** y **x ≈ 1.07.** Si consideramos que esas aproximaciones tienen suficiente exactitud escribimos

$$\mathbf{f\,''(x) = 160x(x + 0.70)(x - 1.07)}$$

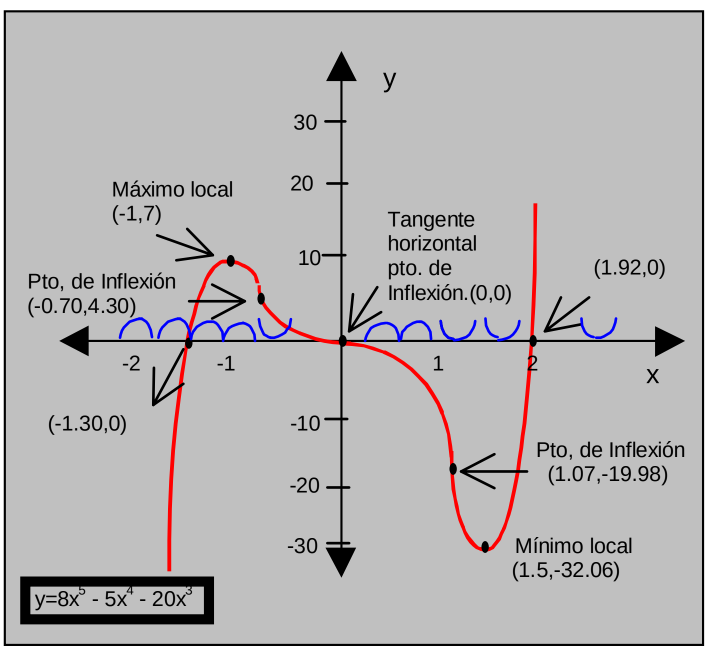
Esto nos deja analizar la estructura de la concavidad de f a la manera de nuestro análisis sobre el comportamiento creciente - decreciente.

Construyamos la tabla#4.2.1, usando los intervalos abiertos en los que los ceros de **f ''** dividen al eje de las x.

Tabla#4.2.1.

Intervalo	f ''(x)	f
(-∞,-0.70)	Neg.	Cóncava hacia abajo.
(-0.70 , 0)	Pos.	Cóncava hacia arriba.
(0 , 1.07)	Neg.	Cóncava hacia abajo.
(1.07,+ ∞)	Pos.	Cóncava hacia arriba

Vemos en la tabla#4.2.1 que la dirección de la concavidad de f cambia en cada uno de los puntos x = -0.70, x = 0 y x = 1.07. De este modo los tres son en realidad puntos de inflexión. Toda esta información aparece en la gráfica dibujada en la siguiente figura #4.2.8.



Figura#4.2.8. Gráfica del ejemplo #1.

4.3 Aproximaciones de las soluciones de las ecuaciones no lineales.

La fórmula cuadrática es un instrumento para obtener la solución exacta de cualquier ecuación de segundo grado $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$. Se conocen fórmulas de la solución exacta de las ecuaciones de tercero y cuarto grado, pero rara vez se usan, debido a su complicación. Y se ha demostrado que no existe solución general posible para las raíces de una ecuación polinomial arbitraria de quinto grado (o superior) en términos de operaciones algebraicas. Siendo así, la solución exacta (para todas sus raíces) de una ecuación tal como

$$x^5 - 3x^3 + x^2 - 23x + 19 = 0$$

puede ser por completo difícil o aún imposible .

En realidad, se presenta una pregunta sobre lo que significa resolver una ecuación tan simple como

$$x^2 - 2 = 0 \qquad (1)$$

La solución positiva exacta es $x = \sqrt{2}$. Pero el número $\sqrt{2}$ es irracional y por lo tanto no puede ser expresado como decimal finito o periódico. Entonces, si entendemos por **solución** un valor decimal exacto de x, aún la ecuación (1) sólo puede ser resuelta en forma aproximada.

Existen numerosos métodos iterativos de uso corriente para calcular el valor aproximado de una raíz **r** de una ecuación **f(x) = 0** y uno de los más efectivos es el **método de Newton**, que será descrito después. Primero necesitamos un breve estudio sobre convergencia e interpolación.

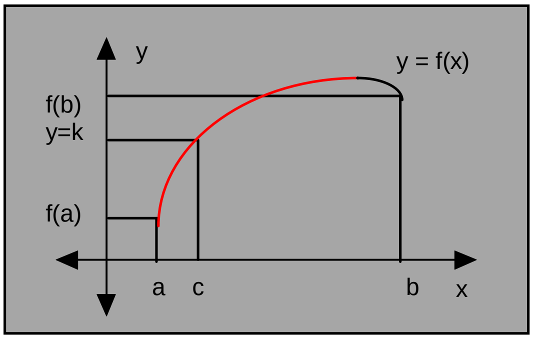
Decimos que la sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ converge al número **r**, a condición de que podamos acercar x_n a **r** tanto como se quiera, escogiendo una **n** lo suficiente grande. Con mayor precisión, para cualquier $\varepsilon > 0$, dado, existe un número positivo **N** tal que $|x_n - r| < \varepsilon$ para toda $n \geq N$. Esto significa en la práctica que para cualquier entero positivo **x,** x_n y **r** coinciden en **K** o más cifras decimales una vez que **n** llega a ser suficientemente grande.

4.3.1 Interpolación lineal.

Cualquier método de aproximación requiere un valor aproximado inicial x_0 como solución de la ecuación **f(x) = 0** que queremos resolver. Supongamos que **a** y **b** son dos puntos tales que **f(a)** y **f(b)** difieren en signo y que **f** es es continua en **[a,b]**. Sabemos entonces por la **propiedad del valor intermedio de funciones continuas** que la ecuación **f(x) = 0** tiene al menos una solución en **(a,b).**

> **Teorema: Propiedad del valor intermedio.**
>
> Supóngase que la función **f** es continua en el intervalo cerrado **[a,b].** Entonces, **f(x)** asume todo valor intermedio entre **f(a)** y **f(b).** Por tanto, si **K** es cualquier número entre **f(a)** y **f(b),** existe al menos un punto **c** en **(a,b)** tal que **f(c) = K**.

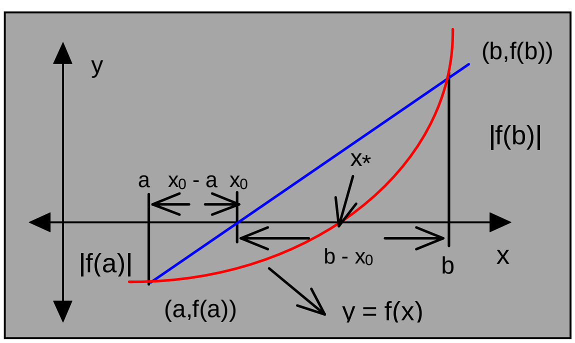
La figura#4.3.1 muestra la gráfica de una función continua **f(x)** cuyo dominio es el intervalo cerrado **[a,b].** El número K está ubicado en el eje de las **"y",** en algún lugar entre **f(a)** y **f(b).** En la figura#4.3.1, tenemos que **f(a)** < **f(b),** pero esto no es esencial. La recta horizontal que pasa por K debe cortar en alguna parte la gráfica de **f** y la abscisa del punto donde se cortan la gráfica y la recta es el valor **c**, cuya existencia está asegurada por la propiedad del valor intermedio de f.



Figura#4.3.1. La función continua f alcanza el valor intermedio K para x = c.

En consecuencia, la propiedad del valor intermedio implica que cada recta horizontal que intersecta al eje de las "y" entre f(a) y f(b) debe cortar en alguna parte la gráfica de ésta función continua. Esto es un modo de decir que la gráfica no tiene huecos y sugiere la idea de trazarla sin despegar el lápiz del papel.

Después de haber estudiado un poco sobre el teorema del valor intermedio podemos decir que una forma común de obtener una aproximación inicial $\mathbf{x_0}$ de $\mathbf{x_*}$ es por interpolación lineal. En este método escogemos $\mathbf{x_0}$ como el punto en el que el segmento que une (a, f(a)) y (b,f(b)) corta al eje de las x.



Figura#4.3.2.

Por la semejanza de los triángulos de la figura#4.3.2, en la que f(a) es negativa y f(b) es positiva, obtenemos:

$$\frac{\mathbf{x_0 - a}}{\mathbf{-f\,(a)}} = \frac{\mathbf{b - x_0}}{\mathbf{f\,(b)}} \qquad (1)$$

Resulta fácil entonces despejar en esta ecuación

$$x_0 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \qquad (2)$$

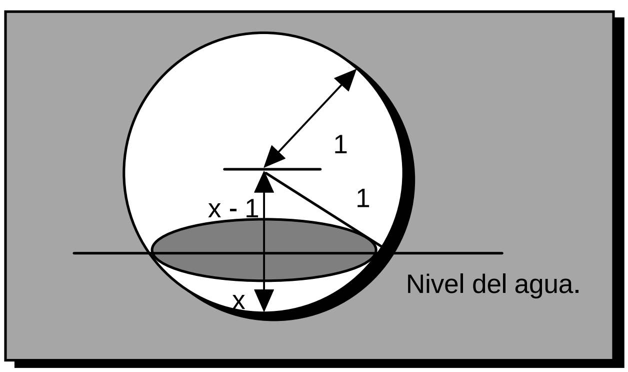
El caso f(a) > 0 > f(b) conduce a la misma fórmula de interpolación para el valor de x_0. En la práctica es más conveniente establecer la fórmula (1) que recordar la fórmula (2).

Ejemplo #1

Una gran bola de corcho tiene 1 pie de radio y su densidad es 1/4 de la del agua. El principio de Arquímides sobre flotación implica que, cuando la bola flota en agua, se sumerge 1/4 de su volumen (1 cuarto de $4\pi/3$ o sea $\pi/3$). Encuentre una ecuación que determine la profundidad "x" a la que se sumerge la bola de corcho y use la interpolación lineal para obtener una aproximación a su solución.

Solución:

El volumen de un segmento esférico de altura "x" y radio r (la parte bajo el agua de la figura #4.3.3).



Figura#4.3.3. La bola de corcho flotante.

es dado por la fórmula

$$v = \frac{\pi r}{6}(3r^2 + x^2)$$

vemos en el triángulo rectángulo de la figura #4.3.3 que $\mathbf{r^2 + (1- x)^2 = 1^2}$ de modo que $\mathbf{r^2 = 2x - x^2}$. Combinemos el principio de Arquímides con la fórmula anterior del volumen para obtener

$$\frac{\pi x^2}{3}(3 - x) = \frac{\pi}{3}; \text{ o sea, } 3x^2 - x^3 = 1$$

así, es que debemos resolver la ecuación

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \qquad (3)$$

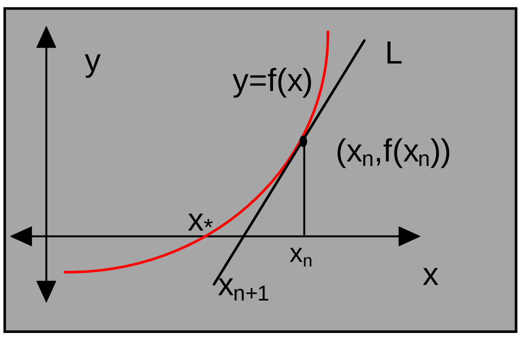
Esta ecuación no tiene soluciones racionales; ni podemos esperar resolverla mediante métodos por completo elementales. Observemos, sin embargo, que **f(0) = 1** y que **f(1) = -1**, por lo que hay una raíz entre **0 y 1**. Esta es la solución que buscamos, ya que es físicamente evidente que la profundidad deseada está entre **0 y 1**. Con **a= 0, b= 1**, **f(a) = 1 y f(b) = -1** la fórmula (2) es

$$\frac{x_0 - 0}{1} = \frac{1 - x_0}{1}$$

cuya solución es $\mathbf{x_0 = 1/2}$. Esta será nuestra aproximación inicial de la raíz de la ecuación (3), que se encuentra en **(0,1).**

4.3.2 Método de Newton.

En la figura#4.3.4 se ilustra el método de Newton para la construcción de una sucesión que converge con rapidez a sucesivas aproximaciones a una raíz $\mathbf{x_*}$ de la ecuación f(x) = 0.



Figura#4.3.4. Geometría de la iteración del método de Newton.

La recta tangente en $(x_n, f(x_n))$ se usa para construir una aproximación mejor x_{n+1} a $\mathbf{x_*}$ de la siguiente manera. Comencemos en el punto x_n del eje de las x. Subamos por la vertical hacia arriba (o hacia abajo) al punto $(x_n, f(x_n))$ de la curva y = f(x). Después, siguiendo la tangente L de ahí, al punto donde corta al eje de las x tendremos que ese punto será x_{n+1} .

La fórmula de x_{n+1} , se obtiene mediante el cálculo de la pendiente de la recta L de dos maneras: a partir de la derivada y por la definición de pendiente de dos puntos. Entonces,

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

y podemos despejar con facilidad a x_{n+1}:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (4)$$

Esta ecuación es la fórmula iterativa del método de Newton, llamado así porque alrededor de 1669, Newton introdujo un procedimiento algebraico (en vez de la construcción geométrica anterior) que equivale al uso de la ecuación (4).

El primer ejemplo de Newton fue la ecuación cúbica $\mathbf{x^3 - 2x - 5 = 0}$, para la cual encontró la raíz $\mathbf{x_* \approx 2.0946}$.

Supongamos ahora que queremos aplicar el método de Newton para resolver la ecuación

$$\mathbf{f(x) = 0} \qquad (5)$$

con una exactitud de k cifras decimales.

Recordemos que una ecuación se debe escribir precisamente en la forma (5) para usar la fórmula (4). Si alcanzamos en la iteración el punto en el que x_n y x_{n+1} concuerden en k cifras decimales, se seguirá que

$$x_n \approx x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)};$$

$$0 \approx -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)};$$

$$f(x_n) \approx 0$$

Así, habremos encontrado una raíz aproximada $\mathbf{x_n \approx x_{n+1}}$ de la ecuación. En la práctica, entonces, retendremos k cifras decimales en los cálculos y persistiremos hasta que sea $x_n = x_{n+1}$ con este grado de exactitud.

Ejemplo #2

Use el método de Newton para encontrar $\sqrt{2}$ con una precisión de nueve cifras decimales.

Solución:

Con mayor generalidad consideremos la raíz cuadrada de un número positivo como la raíz positiva de la ecuación

$$\mathbf{f(x) = x^2 - A = 0}$$

Puesto que $f'(x) = 2x$, la ecuación (4) da la fórmula iterativa

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x^2 - A}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right); \qquad (6)$$

El uso de la fórmula (6) con $\mathbf{A = 2}$ **y** $\mathbf{x_0 = 1}$ produce los valores

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2},$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}\right) = \frac{17}{12} \approx 1.416666667,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12}\right) = \frac{577}{408} \approx 1.414215686,$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{2}{577/408}\right) = \frac{665857}{470832} \approx 1.414213562,$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(\frac{665857}{470832} + \frac{2}{665857/470832}\right) \approx 1.414213562$$

y vemos como $\mathbf{x_4 = x_5}$ en nueve cifras decimales. Esta convergencia muy rápida es una importante característica del método de Newton. Como regla general (con algunas excepciones), cada iteración duplica el número de cifras decimales exactas.

Ejemplo #3

Use el método de Newton para resolver la ecuación de la bola de corcho

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 = 0$$

Solución:

Aquí,

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

de la fórmula de iteración (4) resulta que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3x_n{}^3 - 3x_n{}^2 + 1}{3x_n{}^2 - 6x_n} \tag{7}$$

Con $x_0 = 0.5$, la fórmula (7) da los valores

$$x_0 = 0.5,$$

$$x_1 = 0.5 - \frac{(0.5)^3 - (3)(0.5)^2 + 1}{(3)(0.5)^2 - (6)(0.5)} = 0.6667,$$

$$x_2 = 0.6528,$$

$$x_3 = 0.6527,$$
$$x_4 = 0.6527$$

Así, se obtiene la raíz $x_* \approx 0.6527$, conservando sólo cuatro cifras decimales.

Ejemplo #4

Use el método de Newton para encontrar x_* de la ecuación

$$x = \frac{1}{2}\cos x \qquad (8)$$

Solución:

Reescribimos la ecuación (8) en la forma

$$f(x) = 2x - \cos x = 0$$

Luego,

$$f\,'(x) = 2 + \operatorname{sen} x$$

por tanto la fórmula iterativa del método de Newton es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2x_n + \cos x_n}{2 + \operatorname{sen} x_n}$$

Empezando con $x_0 = 0.5$ y conservando cinco cifras decimales, esta fórmula produce

$$x_0 = 0.5$$
$$x_1 = 0.45063$$
$$x_2 = 0.45018$$
$$x_3 = 0.45018$$

Entonces, obtenemos que la raíz es **0.45018** con cinco cifras decimales.

PROGRAMACION

Podemos utilizar el software Mathematica para crear una pequeña función que implemente el método de Newton y así obtener el resultado de forma más rápida y precisa.

La función Newton recibe la función, la variable independiente, la condición inicial, el número de iteraciones y la precisión de cada valor resultante de las iteraciones, hasta encontrar la raíz aproximada, si es que la hay.

```
Newton[F_,Var_,Condi_,Iteraciones_,Precision_]:=
        Module[{Xn=Condi,I,Xnn=Condi},
```

```
    Print["La función es: "];
    Print[F];
    Der=D[F,Var];
    Print["La derivada es: "];
    Print[Der];
    Print["El resultado de las iteraciones es: "];
    For[I=1,I<=Iteraciones,I++,
        Xn=Xnn;
         If[N[Der/.Var->Xn]!=0,
            Xnn=N[Xn-((F/.Var->Xn)/(Der/.Var->Xn)),Precision],
            Print["Error: la derivada se anula"]
        ];
        Print["X[",I,"]= ",Xnn];

 ];
Print["La solución aproximada es:  "];
Print[Xnn];
Print["Error: "];
Print[N[Abs[(Xnn-Xn)/Xn],10]]]
```

Algunas llamadas a la función Newton, tomando como muestra los casos de los ejemplos anteriores.

Ejemplo #1

Newton[X^3-3X^2+1,X,0.5,5,4]
La función es:

$1 - 3 X^2 + X^3$
La derivada es:

$-6 X + 3 X^2$
El resultado de las iteraciones es:
X[1]= 0.6667
X[2]= 0.6528
X[3]= 0.6527
X[4]= 0.6527
X[5]= 0.6527
La solución aproximada es:
0.6527
Error:
$1.700960357\ 10^{-16}$

Ejemplo #2

Newton[2X-Cos[X],X,0.5,3,5]
La función es:

2 X - Cos[X]
La derivada es:
2 + Sin[X]
El resultado de las iteraciones es:
X[1]= 0.45063
X[2]= 0.45018
X[3]= 0.45018
La solución aproximada es:
0.45018
Error:
$8.059577708\ 10^{-8}$

Ejemplo #3

Newton[X^2-2,X,1,5,9]
La función es:

$-2 + X^2$
La derivada es:
2 X
El resultado de las iteraciones es:
X[1]= 1.5
X[2]= 1.41666667
X[3]= 1.41421569
X[4]= 1.41421356
X[5]= 1.41421356
La solución aproximada es:
1.41421356
Error:
$1.127640404\ 10^{-12}$

El software Mathematica además contiene funciones que implementan este método como es la función:

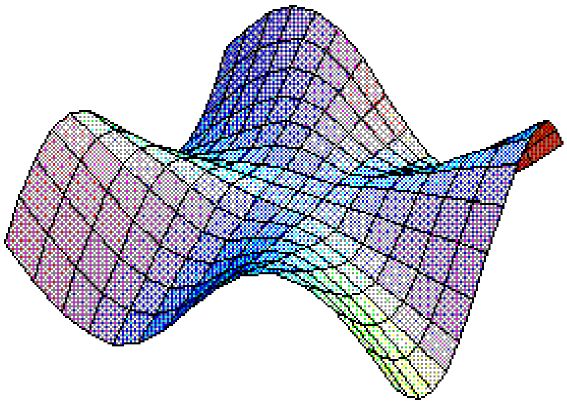
FindRoot[Ecuación,{x,condicion Inicial}]

Ejemplos:

FindRoot[X^3-3X^2+1= =0,{X,0.5}]
{X -> 0.652704}

FindRoot[X^2-2,{X,0.1}]
{X -> 1.41421}

FindRoot[2X-Cos[X]= =0,{X,0.5}]
{X -> 0.450184}



Cuarta Unidad

Cálculo diferencial y sus Aplicaciones

Problemas y Ejercicios

4.1.1 Máximos y mínimos de funciones.

»En los problemas del 1 al 12 encuentre los valores críticos de la función dada. Para esto realice el procedimiento manual, luego haga una función en el Sw. Mathematica que permita implementar este procedimiento y especifique el desarrollo.

Sugerencia: Utilizar dentro de la función el comando **Solve[ecuación,x]** donde ecuación = expresión==0.

Nota: Tiene que utilizarse la misma función para todo el grupo de problemas. Recuerde que , un número es considerado un punto crítico si cumple una de las dos condiciones: $f\,'(c)=0$ o $f\,'(c)$ no existe o no esta definida.

1) $f(x) = 2x^2 - 6x + 8$

2) $f(x) = x^3 + x - 2$

3) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x$

4) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 7$

5) $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$

6) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$

7) $f(x) = (4x - 3)^{1/3}$

8) $f(x) = x^{2/3} + x$

9) $f(x) = (x-1)^2(\sqrt[3]{x+2})$

10) $f(x) = \dfrac{x+4}{\sqrt[3]{x+1}}$

11) $f(x) = -x + \operatorname{sen}x$

12) $f(x) = \cos 4x$

»En los ejercicios del 13 al 23 localizar los extremos de la función dada en el intervalo que se indica. Para esto desarrolle primero el procedimiento manual y

luego realice una función en el Sw. Mathematica que permita obtener los mismos resultados.

Sugerencia: Utilizar dentro de esta función, la función desarrollada en el ejercicio anterior para obtener los valores críticos, más el procedimiento para obtener los máximos y mínimos en el intervalo dado.

13) $f(x) = 3x + 2$; en $[-2, 3]$

14) $f(x) = 4 - 3x$; en $[-1, 5]$

15) $f(x) = 4 - x^2$; en $[1, 3]$

16) $f(x) = x^2 + 3$; en $[0, 5]$

17) $f(x) = (x - 1)^2$; en $[-1, 4]$

18) $f(x) = x^2 + 4x + 7$; en $[-3, 0]$

19) $f(x) = x^3 - 3x$; en $[-2, 4]$

20) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$; en $[0, 4]$

21) $f(x) = 3 - 2x$; en $[-1, 1]$

22) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; en $[0, 3]$

23) $f(x) = 5 - 12x - 9x^2$; en $[-1,1]$

»En los ejercicios 24 y 25 localizar los extremos absolutos y relativos de la función dada (si los hay) en el intervalo indicado. Para esto realice el procedimiento manual y luego desarrolle una función en el sw Mathematica que permita obtener los mismos resultados. La salida de la función debe ser: - La gráfica de la función.

- Los valores críticos.

- Los extremos absolutos y relativos (si los hay).

Sugerencia: Utilizar dentro de la función, las funciones anteriores(valores críticos, máximos y mínimos) más el procedimiento para obtener los resultados de estos ejercicios.

Nota: Observe con cuidado los tipos de intervalo.

24) $f(x) = 2x - 3$

a) $[0,2]$ c) $(0, 2]$

b) $[0,2)$ d) $(0, 2)$

25) $f(x) = x^2 - 2x$ **a)** $[-1, 2]$ **c)** $(0, 2)$
b) $(1, 3]$ **d)** $[1, 3]$

4.1.2 Problemas de aplicación de máximos y mínimos de funciones.

» Resuelva e implemente usando el sw Mathematica.

26) Juan tiene 200 pies de tela de alambre con la que planea cercar un patio rectangular para su perro. Si desea que el área sea máxima, **cuáles deben ser las dimensiones?.**

27) Un granjero tiene 600 yardas de barda con la que va a construir un corral rectangular que tenga dos divisiones interiores paralelas a dos de los lados del corral. **Cuál es el área máxima total de dicho corral ?.**

4.1.3 Criterio de la primera derivada.(Func. crecient. y decrec.)

»En los ejercicios del 28 al 36 hallar los puntos críticos de f (si los hay), los intervalos de crecimiento, decrecimiento y localizar los extremos relativos. Utilice el criterio de funciones crecientes y decrecientes y el criterio de la primera derivada.

28) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

29) $f(x) = x^2 - 6x$

30) $f(x) = 2x^2 + 3x^2 - 12x$

31) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15$

32) $f(x) = x^4 - 2x^3$

33) $f(x) = x^{1/3} + 1$

34) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

35) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

36) $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x}{5}$

»Resuelva.

37) La altura (en pies) de una bola en el instante t (en segundos) viene dada por la función posición $S(t) = 96t - 16t^2$. Hallar el intervalo de tiempo en que la bola sube y el intervalo en que baja. **Cuál es la máxima altura alcanzada?.**

4.1.4 Teorema del valor medio.

»En los ejercicios del 38 al 41 determine si la función dada satisface la hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo indicado. Si es así, encuentre los valores de "c" que satisfagan la conclusión del teorema. Para esto realice el procedimiento manual y luego haga una función en el Sw. Mathematica que implemente el teorema para obtener los mismos resultados.

Sugerencia : -Graficar la función en el intervalo indicado.
-Aplicar reglas de sustitución.

38) $f(x) = x^2$; $[-1, 7]$

39) $f(x) = -x^2 + 8x - 6$; $[2, 3]$

40) $f(x) = x3 + x + 2$; $[2, 5]$

41) $f(x) = x^4 - 2x^2$; $[-3, 3]$

Nota: Para que una función satisfaga la hipótesis del teorema del valor medio debe ser polinomial y continua en el intervalo indicado.

4.1.5 Diferenciación implícita.

»En los ejercicios del 42 al 52 suponga que la ecuación dada define por lo menos una función diferenciable. Use diferenciación implícita para encontrar $\dfrac{dy}{dx}$.

42) $y^2 - 2y = x$

43) $xy^2 - x^2 + 4 = 0$

44) $x + xy - y^2 - 20 = 0$

45) $x^3y^2 = 2x^2 + y^2$

46) $(x^2 + y^2)^6 = x^3 - y^3$
47) $y^{-3}x^6 + y^6x^{-3} = 2x + 1$
48) $(x -1)^2 + (y + 4)^2 = 25$
49) $y^2 = \dfrac{x-1}{x+2}$
51) $xy = \text{sen}\,(x + y)$
52) $x = \sec y$

»En los ejercicios del 53 al 55 encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto o valor indicado, utilice diferenciación implícita. Luego grafique la curva y la tangente usando el Sw. Mathematica.

53) $x^4 + y^3 = 24$; $(-2, 2)$
54) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$; $x = 3$
55) $\tan y = x$; $y = \pi/4$

4.2.1 Derivadas superiores.

»En los ejercicios del 56 al 65 encuentre la segunda derivada de la función dada. Especifique el desarrollo manual y luego compruebe los resultados usando el Sw. Mathematica también especifique el procedimiento.

56) $y = -x2 + 3x - 7$
57) $y = (-4x + 9)^2$
58) $y = 10x^{-2}$
59) $y = x^3 + 8x^2 - \dfrac{2}{x^4}$
60) $f (x) = x^2 (3x - 4)^3$
61) $f (x) = \dfrac{2t-3}{t+2}$
62) $f (x) = \cos 10x$
63) $f (x) = x\,\text{sen}\,x$
64) $f (x) = \dfrac{1}{3+2\cos x}$
65) $f (x) = \sec x$

»En los ejercicios del 66 al 69 encuentre la derivada indicada. Al igual que en el ejercicio anterior especifique tanto el procedimiento manual como el procedimiento usando el Sw. Mathematica.

66) $y = 4x^6 + x^5 - x^3$; $\dfrac{d^4y}{dx^4}$

67) $y = \dfrac{2}{x}$; $\dfrac{d^5y}{dx^5}$

68) $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$; $f'''(x)$

69) $f(x) = \dfrac{1}{\sec(2x+1)}$; $f^{(5)}(x)$

4.2.2 Concavidad y el criterio de la segunda derivada.

»En los problemas del 70 al 74 use el criterio de concavidad para determinar dónde es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo la función dada, además encuentre los puntos de inflexión y diseñe la gráfica.

70) $f(x) = (x - 3)^2$
71) $f(x) = 4 - x^2$
72) $f(x) = x^3 - 12x$
73) $f(x) = (x - 3)^3 + 4$
74) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

»Aplique el criterio de la segunda derivada para encontrar los máximos y mínimos locales de las funciones dadas en los problemas 75 al 80 y el criterio del punto de inflexión para encontrar estos puntos.

75) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
76) $f(x) = x^3 - 3x + 1$
77) $f(x) = x^3$
78) $f(x) = x^5 + 2x$
79) $f(x) = x^2 (x - 1)^2$
80) $f(x) = (x - 1)^2 (x - 2)^3$

4.3.2 Método de Newton.

»En los ejercicios del 81 al 86 use el método de Newton para encontrar aproximaciones a todas las raíces reales de las ecuaciones dadas. Luego compruebe los resultados usando la función Newton que aparece en el texto. Si es necesario haga modificaciones a la función. Especifique el procedimiento.

81) $x^3 = -x + 1$
82) $x^3 - x^2 + 1 = 0$
83) $x^4 + x^2 - 3 = 0$

84) $x^4 = 2x + 1$
85) $x^2 = \operatorname{sen}x$
86) $x + \cos x = 0$

PROYECTO DE LA CUARTA UNIDAD.

Proyecto #6.

Para las siguientes Aplicaciones de la Derivada en Economía.

- **Investigar y analizar.**
- **Resolver un ejemplo.**
- **Programar una función en el Sw. Mathematica que implemente la aplicación.**

a). Ingreso.
b). Costo.
c). Utilidad.
d). Funciones marginales.

- Ingreso marginal.
- Costo marginal.
- Utilidad marginal.

5 Quinta Unidad
Aplicaciones del Método de Euler

Contenido

5.1 Método de Euler.

El método de Euler es un método numérico que resuelve ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales; esta vez lo estudiaremos sólo para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales de la forma:

$$\frac{dx}{dy} = f(x,y), \qquad y(0) = y_0. \qquad (1)$$

Aunque cabe señalar que, cuando el sistema de ecuaciones es cada vez más complicado se utiliza con más frecuencia el método de Euler, esto es debido a su sencillez y programación rápida.

Existen tres versiones:

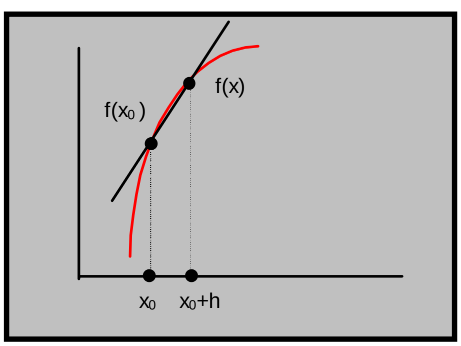
a) Euler hacia adelante,
b) Euler modificado y
c) Euler hacia atrás.

Sólo estudiaremos la versión de Euler hacia adelante debido a que estamos en la fase inicial del estudio de las ecuaciones diferenciales.

5.1.1 Método de Euler hacia adelante.

Este método recibe el nombre de Euler hacia adelante, debido a que utiliza la diferenciación numérica o aproximación por diferencias hacia adelante para evaluar las derivadas de una función por medio de valores dados, en los puntos de una determinada región.

Para ilustrar la diferenciación numérica consideremos una función y(x) como la que se muestra en la figura#5.1.1. Supongamos que se desea evaluar la primera derivada de y(x) en $x = x_0$. Si se conocen los valores de "y" en $\mathbf{x_0}$ y $\mathbf{x_0 + h}$, donde **h** es el tamaño del intervalo entre los dos puntos consecutivos en el eje x, entonces se puede aproximar $y'(x_0)$ mediante la interpolación lineal mostrada en la figura #5.1.1.



Figura#5.1.1. Aproximación hacia adelante.

La fórmula matemática de la aproximación por diferencias hacia adelante es:

$$y'(x_0) \approx \frac{y(x_0+h)-y(x_0)}{h} \quad \text{o} \quad \frac{y_{n+1}-y_n}{h} \approx y_n'$$

El método de Euler hacia adelante para la ecuación $y' = f(x,y)$ se obtiene reescribiendo la aproximación por diferencias hacia adelante,

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{h} \approx y'_n \qquad (2)$$

como

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad (3)$$

donde se usa $y'_n = f(x_n, y_n)$. Mediante la ecuación (3), se calcula $\mathbf{y_n}$ en forma recursiva como

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hy'_0 = y_0 + hf(x_0, y_0) \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{aligned}$$

Procedimiento:

- Utilizamos el método de Euler para calcular aproximaciones numéricas de la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dy} = f(x,y), \qquad y(a) = y_0 \quad \text{en un intervalo de la forma } \mathbf{a \le x \le b}.$$

- Escogemos un tamaño de intervalo o tamaño de paso de fijo $\mathbf{h > 0}$ para considerar los puntos $\mathbf{a = x_0, x_1, x_2, \ldots x_n}$ donde $\mathbf{x_n = x_{n-1} + h}$ para cada **n = 1, 2, 3**... .

- La meta será encontrar aproximaciones aceptables y_1, y_2, y_3 ... a los verdaderos valores de la solución y(x) de la ecuación (1) en los puntos x_1, x_2, x_3 ... . Por lo tanto, se investigarán aproximaciones de razonable exactitud

$$y_n \approx y(x_n) \text{ para cada n.}$$

- Cuando x = x_0, la derivada (razón de cambio) de y con respecto a x es $\mathbf{y' = f(x_0, y_0)}$. Si el cambio de "y" continúa a esta misma razón de x = x_0 a x = x_1 = x_0 + h, el cambio de "y" será hf(x_0,y_0) exacto. Se tomará por lo tanto

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

- como una aproximación al verdadero valor de y(x_1) de la solución para x = x_1. En forma similar, se tomará $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ como una aproximación de y(x_2). Al haberse alcanzado el n-ésimo valor aproximado $y_n \approx y(x_n)$ se tomará $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ como aproximación al verdadero valor de $\mathbf{y(x_{n+1})}$.

Ejemplo#1

Aplique el método de Euler para calcular la solución aproximada del problema de valor inicial

$\dfrac{dy}{dx} = x + y$, **y(0) = 1** en el intervalo $0 \le x \le 1$ con **h=0.1**, **h=0.01** y **h=0.001** respectivamente luego comparar la solución aproximada con la solución exacta **$y(x) = 2e^x - x - 1$**.

Solución:

Aquí, **f(x,y) = x + y**, por lo que la fórmula iterativa (3) es

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + y_n).$$

Las tablas# 5.1.1, #5.1.2 y #5.1.3 muestran el resultado que se obtiene comenzando con y_0=1 y usando los tamaños de paso h=0.1, h=0.01 y h=0.001 respectivamente. Con h=0.1 se puede realizar con facilidad el cálculo, con h=0.01 y h=0.001 se necesita una computadora y se muestran los resultados sólo para intervalos Δx = 0.1. Notemos en cada caso que el error $y_{verdadero} - y_{aprox}$. Aumenta cuando lo hace x; es decir, cuando x se aleja más y más de x_0. Pero el error disminuye con h. El porcentaje de error para el punto final x = 1 es de 7.25 % con h=0.1 y de 0.78 % con h=0.01, pero sólo de 0.08% cuando h=0.001.

Tabla#5.1.1. Con h =0.1.

N	X_n	Y_n	Yverdadera
0	0.0	1.00000	1.00000
1	0.1	1.10000	1.11034
2	0.2	1.22000	1.42281
3	0.3	1.36200	1.39972
4	0.4	1.52820	1.58365
5	0.5	1.72102	1.79744
6	0.6	1.94312	2.04424
7	0.7	1.19743	2.32751
8	0.8	2.48718	2.65108
9	0.9	2.81590	3.01921
10	1.0	3.18748	3.43656

Tabla#5.1.2. Con h=0.01.

N	X_n	Y_n	Yverdadera
0	0.0	1.00000	1.00000
10	0.1	1.10924	1.11034
20	0.2	1.24038	1.42281
30	0.3	1.39570	1.39972
40	0.4	1.57773	1.58365
50	0.5	1.78926	1.79744
60	0.6	2.03339	2.04424
70	0.7	2.31353	2.32751
80	0.8	2.63343	2.65108
90	0.9	2.99727	3.01921
100	1.0	3.40963	3.43656

Tabla#5.1.3. Con h=0.001.

N	X_n	Y_n	Yverdadera
0	0.0	1.00000	1.00000
100	0.1	1.11023	1.11034
200	0.2	1.24256	1.42281
300	0.3	1.39931	1.39972
400	0.4	1.58305	1.58365
500	0.5	1.79662	1.79744
600	0.6	2.04315	2.04424
700	0.7	2.32610	2.32751
800	0.8	2.64930	2.65108
900	0.9	3.01699	3.01921
100	1.0	3.43385	3.43656

Aunque el método de Euler es muy sencillo, debe utilizarse cuidadosamente para evitar dos tipos de errores. El primer tipo lo forman los errores de truncamiento. El segundo tipo lo constituye la posible inestabilidad, la cual será estudiada más adelante.

PROGRAMACION

Utilicemos el sw Mathematica para crear una función que nos permita aplicar el método de Euler para calcular aproximaciones numéricas de la solución de problemas de valor inicial.

La función es FEuler y recibe: la ecuación diferencial (Fder), la función solución (Fver), la condición inicial (Y0), el número de intervalos (Nint) y el tamaño de intervalos (H).

```
FEuler[Fder_,Fver_,Y0_,Nint_,H_]:=
    Module[{K=0,Vx=0.0,Vy=0.0,ListaN={},ListaXn={},ListaYn={},
            ListaYver={}},
        Print["USANDO EL METODO DE EULER PARA ",Fder];
        K=N[Nint/10];
        Print["-----------------------------------"];
        Print["Con"];
        Print["Y0: ",Y0];
        Print["N: ",Nint];
        Print["H: ",H];
        Vy=Y0;
        Inc=0;
        Print["LAS APROXIMACIONES SON:"];
        Print["-----------------------------------"];
        For[Inc=0,Inc<=Nint,Inc++,
           If[Nint >50,
            If[Inc/K==Floor[Inc/K],   (*cuando el número de intervalos es mayor de 50*)
              AppendTo[ListaN,Inc];
              AppendTo[ListaXn,Vx];
              AppendTo[ListaYn,Vy];
              AppendTo[ListaYver,Fver/.X->Vx];
```

```
          ],
          AppendTo[ListaN,Inc];
          AppendTo[ListaXn,Vx];
          AppendTo[ListaYn,Vy];
          AppendTo[ListaYver,Fver/.X->Vx];
        ];
        Vy=N[Vy+H*(Fder/.{X->Vx,Y->Vy}),7];   (*calcula las aproximaciones Yn*)
        Vx=Vx+H;                              (*calcula Xn*)
      ];

   Print[TableForm[{ListaX,ListaXn,ListaYn,ListaYver},
      TableDirections->{Row},
      TableSpacing->{3,0},TableHeadings->{{"N","Xn","Yn",
      "Yverdadera"}}]];]
```

Ejemplos:

Usemos la función para calcular las aproximaciones hechas a mano del ejemplo anterior, comparemos resultados y observemos las ventajas de utilizar el sw Mathematica para realizar estos cálculos.

Ejemplo #1

Llamado a la función FEuler[ ]:
con la ecuación diferencial dy/dx = x + y, y(0) = 1.

FEuler[X+Y,2*Exp[X]-X-1,1,10,0.1]

Resultado:

USANDO EL METODO DE EULER PARA X + Y

Con
Y0: 1
N: 10
H: 0.1

LAS APROXIMACIONES SON:

N	Xn	Yn	Yverdadera
0	0.	1	1.
1	0.1	1.1	1.11034
2	0.2	1.22	1.24281
3	0.3	1.362	1.39972
4	0.4	1.5282	1.58365
5	0.5	1.72102	1.79744
6	0.6	1.943122	2.04424
7	0.7	2.197434	2.32751
8	0.8	2.487178	2.65108
9	0.9	2.815895	3.01921
10	1.	3.187485	3.43656

Ejemplo #2

Llamado a la función FEuler[ ]:
con la ecuación diferencial **$dy/dx = -20y + 7e^{-0.5x}$, $y(0) = 5$.**

FEuler[-20*Y+7*Exp[-0.5*X],5*Exp[-20*X]+(7/19.5)*Exp[-0.5*X]-Exp[-20*X],5,10,0.01]

Resultado:

USANDO EL METODO DE EULER PARA -20Y + $7e^{-0.5X}$

Con
Y0: 5
N: 10
H: 0.01
LAS APROXIMACIONES SON:

N	Xn	Yn	Yverdadera
0	0.	5	4.35897
1	0.01	4.07	3.63211
2	0.02	3.325651	3.03668
3	0.03	2.729824	2.54888
4	0.04	2.252817	2.14918
5	0.05	1.870868	1.82163
6	0.06	1.564966	1.55314
7	0.07	1.319904	1.33302
8	0.08	1.123515	1.15248
9	0.09	0.9660676	1.00437
10	0.1	0.8397739	0.882808

Ejemplo #3

Llamado a la función FEuler[ ]:
con la ecuación diferencial **$dy/dx = -20y + 7e^{-0.5x}$, $y(0) = 5$.**

FEuler[-20*Y+7*Exp[-0.5*X],
5*Exp[-20*X]+(7/19.5)*Exp[-0.5*X]-Exp[-20*X],5,100,0.001]

Resultado:

USANDO EL METODO DE EULER PARA -20Y + $7e^{-0.5X}$

Con
Y0: 5
N: 100
H: 0.001
LAS APROXIMACIONES SON:

N	Xn	Yn	Yverdadera
0	0.	5	4.35897
10	0.01	4.149239	3.63211
20	0.02	3.453787	3.03668
30	0.03	2.885236	2.54888
40	0.04	2.420372	2.14918
50	0.05	2.040231	1.82163

60	0.06	1.729315	1.55314
70	0.07	1.474964	1.33302
80	0.08	1.266831	1.15248
90	0.09	1.096464	1.00437
100	0.1	0.9569558	0.882808

5.2 Aplicaciones del Método de Euler.

5.2.1 Modelo de la Epidemia. (caso de estudio).

En el período de 1968 - 1969 E.E.U.U. fue infectado por primera vez por un virus llamado “ La gripe de Hong Kong” por su lugar de descubrimiento.

Queremos modelar la difusión de dicha enfermedad de forma que podamos predecir que es lo que puede suceder con una epidemia similar en el futuro.

Desarrollemos un modelo para representar la propagación de la enfermedad en una población urbana, pongamos como ejemplo la ciudad de New York, con una población de 7,900,000 habitantes.

Para este caso de estudio, qué aspectos podemos considerar como procesos que experimentan algún cambio?. Qué es lo que nos interesa medir en un tiempo pasado, presente o predecir para un futuro?.

Sería interesante saber en algún tiempo específico, el número de individuos que han sido infectados por el virus y que se han recuperado siendo éstos inmunes a la enfermedad. Si ignoramos el movimiento dentro y fuera del área infectada, entonces el resto de la población está susceptible a la enfermedad.

Así que en cualquier tiempo la población total fijada de nuestro caso de estudio, puede ser dividida en tres grandes grupos:

- **Los que están infectados,**
- **los que se han recuperado y**
- **los que están susceptibles a contraer la enfermedad.**

5.2.1.1 Problema de valor inicial.

Para una enfermedad nueva, como la fiebre de Hong Kong en el año de 1968, el número inicial de individuos infectados fue muy pequeño y el resto fue inicialmente susceptible.

Sobre las consideraciones que se han hecho de la forma en la que el número de individuos susceptibles varía en el tiempo?, del número de individuos en recuperación? o el número de individuos infectados ?, podemos designar cada uno de estos grupos como una función del tiempo:

- **Los que están infectados = I(t).**
- **Los que se han recuperado = R(t).**
- **Los que están susceptibles = S(t).**

Fijemos N para representar el total de la población (la cual asumimos constante), entonces para cada tiempo tenemos que:

$$\mathbf{N = S(t) + I(t) + R(t)} .$$

Ignorando los cambios menores en la población por nacimientos, viajes, muertes no relacionadas y así, asumimos que la razón de cambio de S con respecto al tiempo depende del número de individuos en la categoría susceptibles, el número de individuos en la categoría de infectados y la cantidad de contacto que hay entre ellos.

Supongamos que cada individuo infectado tiene un número fijo β de contactos por día que son suficientes para difundir la enfermedad. No todos estos contactos son con individuos susceptibles, si asumimos una mezcla de población homogénea, la fracción de estos contactos que son susceptibles es $\frac{S(t)}{N}$. En promedio, cada individuo infectado genera $\beta\frac{S(t)}{N}$ nuevos individuos por día. Los nuevos casos de la enfermedad generados por todos los individuos infectados, describen:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} I(t)S(t)$$

si sustituimos $\frac{\beta}{N}$ por α escribimos la ecuación como:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha I(t)S(t)$$

Volviendo a la razón de cambio de I(t), para la cual necesitamos considerar el movimiento de individuos desde el grupo susceptibles dentro de grupo de infectados y el movimiento de individuos desde el grupo de infectados al grupo de recuperación, asumiendo que una fracción fija λ del grupo de infectados se recuperan en cualquier día.

Por lo tanto:

$$\frac{dI}{dt} = \alpha I(t)S(t) - \lambda I(t)$$

y

$$\frac{dR}{dt} = \lambda I(t)$$

Ahora tenemos las tres cantidades de interés S(t), I(t) y R(t) formando un sistema de tres ecuaciones diferenciales, donde cada ecuación tiene una condición inicial, que es un valor conocido al inicio de la epidemia.

Este valor es:

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha I(t)S(t) \qquad S(0) = 7{,}900{,}000$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha I(t)S(t) - \lambda I(t) \qquad I(0) = 10$$

$$\frac{dR}{dt} = \lambda I(t) \qquad R(0) = 0$$

Las constantes β y λ han sido seleccionados experimentalmente y tienen un valor de:
$\boldsymbol{\beta = 0.6 \quad \lambda = 0.34}$

5.2.1.2 Solución numérica: Método de Euler.

Ahora que ya tenemos las ecuaciones diferenciales que definen el modelo de la epidemia, podemos resolverlas utilizando el método de Euler.

Aproximemos cada una estas ecuaciones considerando un tamaño de intervalo h=1.
En las primeras aproximaciones tenemos:

$$S_{t+1} = S_t - h*(\alpha I_t S_t)$$

$$= 7{,}900{,}000 - 1*\frac{0.6}{7{,}900{,}000}(10)(7{,}900{,}000)$$

$$= 7{,}899{,}994$$

$$I_{t+1} = I_t + h(\alpha I_t S_t - \lambda I_t)$$

$$= 10 + 1*\frac{0.6}{7{,}900{,}000}(10)(7{,}900{,}000) - 0.34(10)$$

$$= 12.6$$

$$R_{t+1} = R_t + h*(\lambda I_t)$$

$$= 0 + (1) * (0.34)(10)$$

$$= 3.4$$

PROGRAMACION

Podemos crear una pequeña función con el sw Mathematica para implementar el modelo de la epidemia, USANDO EL METODO DE EULER y calcular así las aproximaciones del sistema de ecuaciones.

```
(*Método de Euler para el modelo de la epidemia*)

EpidEuler[PoblacN_,Sinic_,Infinic_,Recinic_,Nint_,H_]:=
     Module[{Inc=0,T=0},
     VBeta=0.6;
     VLambda=0.34;
     VAlfa=N[VBeta/PoblacN,3];
     Print[" USANDO EL METODO DE EULER"];
     Print["PARA EL MODELO DE LA EPIDEMIA"];
     Print["-----------------------------------"];
     Print["Con: "];
     Print["Beta :",VBeta];
     Print["Lambda :",VLambda];
     Print["Alfa :",VAlfa];
     Print["N: ",Nint];
```

```
Print["H: ",H];
VSus[0]=Sinic;
VInf[0]=Infinic;
VRec[0]=Recinic;
Print["LAS APROXIMACIONES SON:"];
Print["-----------------------------------"];
Print[" N  t   S(t)    I(t)    R(t)"];
Print["-----------------------------------"];
Print[AccountingForm[{Inc,T,VSus[Inc],VInf[Inc],VRec[Inc]}]];
For[Inc=1,Inc<=Nint,Inc++,
  VSus[Inc]=N[VSus[Inc-1]-(H*(VAlfa*VInf[Inc-1]*VSus[Inc-1])),7];
  VInf[Inc]=N[VInf[Inc-1]+H*((VAlfa*VInf[Inc-1]*
                              VSus[Inc-1])-(VLambda*VInf[Inc-1])),7];
  VRec[Inc]=N[VRec[Inc-1]+H*(VLambda*VInf[Inc-1]),7];
  T=T+H;
  Print[AccountingForm[{Inc,T,VSus[Inc],VInf[Inc],VRec[Inc]}]];
];]
```

El llamado a la función es:

```
EpidEuler[7900000,7900000,10,0,10,1]

 USANDO EL METODO DE EULER
PARA EL MODELO DE LA EPIDEMIA
-------------------------------------------------
Con:
Beta : 0.6
Lambda : 0.34
Alfa : 7.59*10^-8
N: 10
H: 1
LAS APROXIMACIONES SON:
-----------------------------------------------
 N    t       S(t)        I(t)         R(t)
-----------------------------------------------
{0,   0,  7900000,  10,          0}
{1,   1,  7899994.,  12.6,        3.4}
{2,   2,  7899986.,  15.87599,  7.684}
{3,   3,  7899977.,  20.00374,  13.08184}
{4,   4,  7899965.,  25.20467,  19.88311}
{5,   5,  7899950.,  31.75782,  28.4527}
{6,   6,  7899931.,  40.01473,  39.25036}
{7,   7,  7899907.,  50.41835,  52.85537}
{8,   8,  7899876.,  63.52677,  69.99761}
{9,   9,  7899838.,  80.04313,  91.59671}
{10, 10, 7899790.,  100.8534,  118.8114}
```

5.2.2 Aplicaciones en la elasticidad.

5.2.2.1 Sistema Masa-Resorte.

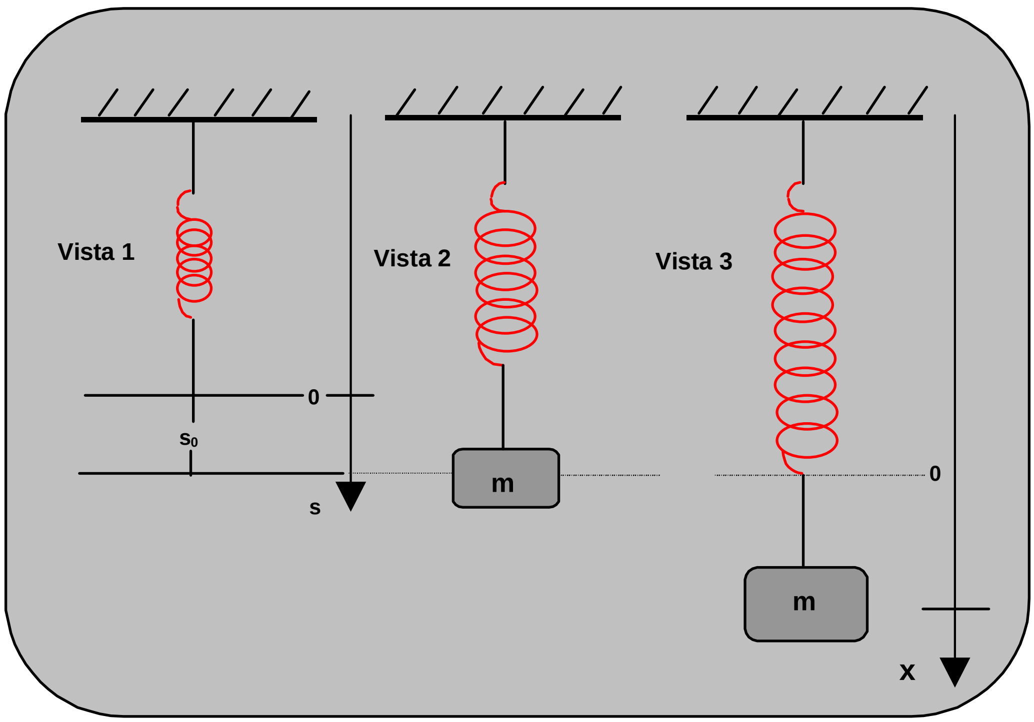
Los sistemas masa-resorte nos brindan la posibilidad de estudiar el fenómeno de la vibración y de conocer cuál es la frecuencia y amplitud de estas vibraciones.

La **ley de Hooke** afirma que la fuerza requerida para estirar un resorte a una distancia **s** de su longitud natural, es proporcional a **s**, la función de la fuerza entonces tiene la forma:

$$F(s) = ks$$

para alguna constante **k**, la cual es llamada "constante de elasticidad" o constante del resorte.

En la siguiente figura#5.2.1 se muestran tres vistas de un mismo resorte.



Figura#5.2.1. Tres vistas de un mismo resorte.

La primera vista representa su longitud natural; no hay ninguna fuerza aplicada. La segunda vista posee un objeto de masa **m** en el resorte, por lo que en esta vista podemos asumir que el sistema masa-resorte está en equilibrio ya que el objeto no se está moviendo.

Por lo tanto la fuerza en el resorte ejercida en el objeto balancea la fuerza gravitacional que el objeto ejerce sobre el resorte. Por la **ley de Hooke** esta fuerza es también ks_0, así la masa, la constante del resorte y el desplazamiento equilibrado están relacionados por:

$$mg = ks_0$$

Ahora analicemos la vista tres, aquí el resorte es estirado una distancia **x,** el sistema no se encuentra en equilibrio, si lo liberamos, habrá un desequilibrio de las fuerzas que causará el movimiento del objeto. En un extremo tendremos la fuerza gravitacional **mg** (positiva porque la dirección es positiva hacia abajo) y del otro extremo estará la fuerza de “restitución” del resorte, la cual de acuerdo a ley de Hooke es:

$$-ks = -k(x + s_0)$$

(negativa porque esta fuerza se opone al incremento es s). Así la fuerza total en el objeto es:

$$F_t = mg - kx - ks_0$$

si sustituimos $mg = ks_0$

entonces:

$$F_t = ks_0 - kx - ks_0$$

$$F_t = -kx$$

5.2.2.2 Solución numérica: método de Euler.

Por la segunda ley del movimiento de Newton, la fuerza total de un objeto en movimiento de masa m, es **m** veces su aceleración. Por la tanto tenemos una relación entre el desplazamiento **x** y su segunda derivada.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (1)$$

Si podemos formular el problema como un problema de valor inicial, entonces tenemos la esperanza de que poder generar una solución numérica o gráfica aproximada, la cual nos proveerá alguna evidencia de la solución real.

Además de la ecuación (1) del movimiento, conocemos algo acerca de cuando inicia el movimiento. En particular si bajamos la masa a un **desplazamiento inicial** x_0 antes de liberarla, sabemos que $x(0) = x_0$. Y si simplemente liberamos el objeto, sin lanzarlo hacia arriba o hacia abajo, entonces la velocidad inicial $x'(0)$, debe ser cero. Por lo tanto podemos escribir el problema de valor inicial de la siguiente forma:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \quad \text{con} \quad x(0) = x_0 \quad \text{y} \quad x'(0) = 0$$

El método de Euler como se ha usado en las aproximaciones anteriores aplica solamente a ecuaciones de primer orden, en las cuales la primera derivada es expresada por una fórmula involucrando las variables dependiente o independiente. Pero, como se vio en el modelo de la epidemia, el método puede ser usado con un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, con condiciones para cada función desconocida. Podemos usar este conocimiento si logramos expresar la ecuación del movimiento que es una ecuación diferencial de segundo orden como un sistema de dos ecuaciones de primer orden.

Las condiciones iniciales son conocidas, una para la función **x** que es la que estamos tratando de encontrar y la otra para su derivada. Por conocimientos anteriores podemos decir que la segunda función debe ser la velocidad.

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$ donde v es la velocidad,

entonces **x** y **v** deben de satisfacer el sistema de ecuaciones de primer orden:

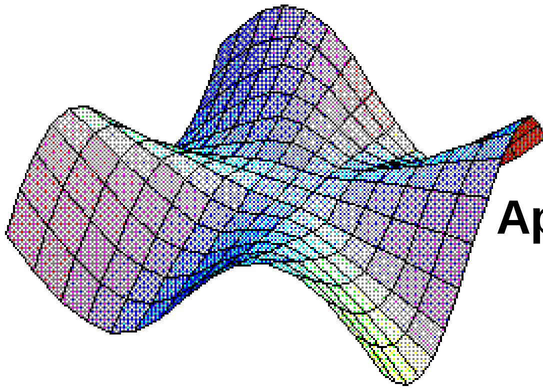
$$\frac{dx}{dt} = v(t), \qquad x(0) = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}x, \qquad v(0) = 0 \qquad (3)$$

Aplicando el método de Euler y considerando los valores , **m** y **k** constantes podemos obtener el siguiente sistema de ecuaciones para resolver las ecuaciones (2) y (3).

$$x_{t+1} = x_t + h * v_t \,, \qquad x(0) = 0$$

$$v_{t+1} = v_t - h(\frac{k}{m} * v_t), \qquad v(0) = 0$$



Quinta Unidad

Aplicaciones del método de Euler

Problemas y Ejercicios

5.1.1 Método de Euler hacia adelante.

» En los problemas del 1 al 9 use el método de Euler con h=0.1 para calcular el valor aproximado del problema del valor inicial dado, sobre el intervalo [0,1]. Encuentre la solución exacta y compare el valor aproximado en y(1) con ese valor exacto. Para esto, modifique la función que aparece en el texto (FEuler[ ]), para que la misma función se encargue de obtener la solución exacta. Después hacer un análisis de los resultados.

1) $y' = -y;\qquad y(0) = 2$
2) $y' = 2y;\qquad y(0) = 1/2$
3) $y' = y + 1;\qquad y(0) = 1$
4) $y' = x - y;\qquad y(0) = 1$
5) $y' = y - x - 1;\qquad y(0) = 1$
6) $y' = -2xy;\qquad y(0) = 2$
7) $y' = -3x^2 y;\qquad y(0) = 3$
8) $y' = \frac{1}{4}(1 + y^2);\qquad y(0) = 1$
9) $y' = \frac{2x}{1 + 3y^2};\qquad y(0) = 1$

» Resuelva los siguientes problemas en $0 \le t \le 5$ mediante el método de Euler hacia adelante y h=0.5 haciendo las operaciones a mano. Luego repita lo anterior con h=0.01 usando el programa que realizó en el ejercicio anterior modifiquelo si es necesario. Evalué los errores por comparación con los valores exactos que se dan a continuación.

11) $y' + ty = 1;\qquad y(0) = 1$
12) $y' + 3y = e^{-t};\qquad y(0) = 1$
13) $y' = (t^2 - y);\qquad y(0) = 0.5$

Solución exacta:

	caso 11	caso 12	caso 13
t	**y**	**y**	**y**
0	1.0000	1.0000	0.5000
1	1.3313	0.2088	0.4482
2	0.7753	0.0690	1.7969
3	0.4043	2.4955E-2	4.9253
4	0.2707	9.1610E-3	9.9725
5	0.2092	3.3692E-3	16.980

Sugerencia: La solución del caso 12 podría oscilar con h = 0.5, pero de todas formas realice los cálculos.

PROYECTO DE LA QUINTA UNIDAD.

Proyecto #7.

Investigar.

El Péndulo (Movimiento).

- Solución numérica utilizando el método de Euler.
- Programar una función en el Sw. Mathematica que implemente esta solución.

Matemática IIII

1

Primera Unidad
Vectores y Curvas Planas

Contenido

♦ 1.1 Descripción paramétrica de curvas

1.1.1 Movimiento lineal

Es el movimiento que se da sobre una línea recta, ya sea horizontal o vertical. Supóngase que una partícula se mueve sobre una línea recta, dada por la función **s = f(t)** siendo esta la ecuación del movimiento de la partícula donde **t** representa el tiempo. Los valores de **s** son distancias dirigidas (estas distancias se miden en centímetros, metros, pies, millas, etc), medidas desde un punto escogido denotado por la letra **"O"**. Cuando **s** está a la derecha o arriba de **O**, tomamos **s** como positiva entonces **s** > O, y cuando **s** está a la izquierda o abajo de **O**, tomamos **s** como negativa siendo **s** < O.

Definición de función de posición:

Se llama función de posición a una función **s** que proporciona la coordenada
del objeto sobre la recta en cualquier tiempo **t** en particular.

Ejemplo#1

Una partícula se mueve sobre una recta h , de acuerdo con la función de posición $s(t) = -t^2 - 4t + 3$, en donde **s** se mide en metros y t en segundos. Cuál es la posición de la partícula a los 0, 2, 6 segundos?.

Solución

Sustituyendo en la función de posición s(t), cuando t = 0 obtenemos

$s(t) = -t^2 - 4t + 3$;

s(0) = 3, s(2) = 7,

s(6) = -9 s(6) = -9 < O

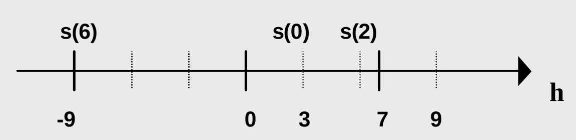


Fig 1.1.1

El último resultado significa que la posición de la partícula esta a la izquierda del punto de referencia s = 0, ver figura 1.1.1.

Velocidad , rapidez y aceleración en el movimiento lineal

Si, sobre un cierto lapso de tiempo Δt, el objeto cambia su posición una cantidad

$\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$, entonces por la fórmula $\text{Razon} = \dfrac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$ **,** la razón media de cambio de la distancia respecto al tiempo está dada por $\dfrac{\text{Cambio en la distancia}}{\text{Cambio en el tiempo}} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, a esto llamaremos velocidad media.

Definición de velocidad media:

Si **s(t)** da la posición en el tiempo **t** de un objeto que se mueve por una recta,
la velocidad media del objeto en el intervalo **[t,t+Δt]** está dada por $v_{media} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$

Velocidad instantánea

Si **s = f(t)** es la función de posición de un objeto en movimiento rectilíneo, la velocidad del objeto en el instante **t** está dada por $v(t) = \lim_{h->0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = s`(t)$.

Rapidez

Llamaremos rapidez al valor absoluto de la velocidad. Esta es siempre no negativa. Indica tan sólo cuán rápido se mueve un objeto, no en que dirección y se denota como | v(t) |.

Definición de aceleración:

Si **s** es la función de posición de un objeto en movimiento rectilíneo, su aceleración en el instante **t** está dada por a(t) = s``(t) = v`(t) donde v(t) es la velocidad en el instante **t**.

Ejemplo#2

Sea la función de posición s = 100 - 16t^2 de un cuerpo que se mueve en línea recta. Encuentre su ubicación s cuando su velocidad es cero.

Solución

s(t) = 100 - 16t^2 ;

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -32t$$

Cuando t = 0, tenemos v(t) = -32 * 0 = 0, entonces la velocidad es igual a cero,
s(t) = 100 - 16 *(0)^2 = 100; evaluando la función **s** en t = 0 entonces la partícula está ubicada a 100 unidades del origen y es positiva.

Ejemplo#3

Un físico descubre que cuando cierta sustancia se calienta , la temperatura medida en grados Celsius (o centígrados) después de t minutos , está dada por $g(t)=30t+6\sqrt{t+8}$. Calcular la velocidad media de g(t) durante el intervalo de tiempo [4,4.41], aplicar la definición.

Solución

Sustituyendo t = 4, Δt = 0.41 se obtiene un cambio en la posición de g en [4,4.41] siendo esta

$$g(t) = \frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} = \frac{(30(4.41)+6\sqrt{4.41}+8)-(120+6\sqrt{4}+8)}{0.41}$$

$$g(t) = vmedia(t) = \frac{12.9}{0.41} \cong 31.4 \frac{{}^0C}{min}$$

PROGRAMACIÓN

Programa para ejemplos donde se aplica la definición de velocidad media, para comprobar ejercicios de este tipo en el programa tiene que introducir la función, el intervalo de tiempo, y el controlador del intervalo que es el primer valor.

```
Vmedia[Fn_,T1_,T2_,Cont_]:=Module[{FT2,FT1,M,Deltat,Fg,Vmed},
Print[" "];
Print[" Salida del programa "];
Print[" "];
Print[StringForm["Función de posición g(t) = ``",Fn]];
Print[" "];
Deltat=T2-T1;
M=Cont;
 While[M>=T1 && M<=T2,
  FT2=Fn/.T->T2;
  Print[StringForm["Evaluando la función con T=4.41 g(t+h)=``",FT2]];
  Print[" "];
  FT1=Fn/.T->T1;
  Print[StringForm["Evaluando la función con T=4 g(t)=``",FT1]];
  Print[" "];
  Fg=((FT2-FT1)/Deltat);
  Vmed=N[Fg,4];
  Print[StringForm["Vmedia de g(t) el intervalo [4,4.41] es v(t)=``",Vmed]];
  M=M+1;
 ]
]
Vmedia[30*T+(6*Sqrt[T])+8,4,4.41,4]
```

```
Salida del programa

Función de posición g(t) = 8 + 6 Sqrt[T] + 30 T
Evaluando la función con T=4.41 g(t+h)=152.9
Evaluando la función con T=4 g(t)=140

Vmedia de g(t) el intervalo [4,4.41] es v(t)=31.46
```

Ejemplo#4

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal de acuerdo con la función de posición $s(t) = -t^2 + 4t + 3$ en donde **s** se mide en metros y **t** en segundos. Cuál es la posición de la partícula a los tiempos 0,2,6 segundos?. Encuentre la velocidad, rapidez y la aceleración de la partícula.

Solución

Aplicando la primera derivada a la función de posición s(t) obtenemos la velocidad

$v(t) = \frac{ds}{dt} = -2t + 4$; rapidez = $|v(t)| = -2t + 4$

Aplicando la primera derivada a la velocidad obtenemos la aceleración que no es mas que aplicar la segunda derivada a la función de posición $a(t)=\frac{d\nu}{dt}=-2$. Asignando valores a t se obtiene la velocidad, rapidez y aceleración de la partícula y el valor de la función de posición, ver fig. 1.1.2.

Como la aceleración es siempre negativa, la velocidad es siempre decreciente.

$\nu(t) = 2(-t + 2) > 0$ para $t < 2$ y $\nu(t) = 2(-t + 2) < 0$ para $t > 2$ .Si se considera que t sea negativo como positivo, entonces la partícula se mueve hacia la derecha durante el intervalo de tiempo $(-\infty,2)$, y hacia la izquierda durante el intervalo de tiempo $(2,\infty)$.

Tabla de valores 1.1.1

t	V	r	a	S
0	4	4	-2	3
2	0	0	-2	7
6	-8	8	-2	-9

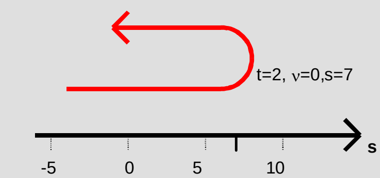


Fig 1.1.2

PROGRAMACIÓN

Programa para funciones donde se hace el cálculo de velocidad, rapidez y aceleración utilizando las notaciones de la derivada.

```
VRAcel[Fn_]:=Module[{Vel,Acel,Ctime,Time,Tm={},J,V,A,S,Rap},
Print[" "];
Print[" Salida del programa "];
Print[" "];
Print[StringForm["Función de posición Fn=`` ",Fn]];
Vel=D[Fn,T];
Acel=D[Vel,T];
Print[StringForm["Velocidad  v(t)=`` ",Vel]];
Print[StringForm["Aceleración a(t)=`` ",Acel]];
Print[" "];
Ctime=Input["Introduzca la cantidad de tiempos"];
For[J=1,J<=Ctime,J++,
   Time=Input["Valores del tiempo a evaluar"];
   Tm=Append[Tm,Time];
  ];
Print["Evaluando la función con t={0,2,6} "];
Print[" "];
  For[J=1,J<=Ctime,J++,
     V=Vel/.T->Part[Tm];
     A=Acel/.T->Part[Tm];
     S=Fn/.T->Part[Tm];
     Rap=Abs[V];
  ];
  Print[StringForm["Velocidad =  `` ",V]];
  Print[StringForm["Rapidez   =  `` ",Rap]];
  Print[StringForm["Aceler    =  `` ",Acel]];
```

```
  Print[StringForm["Valores de la fn. s =  `` ",S]];
]
VRAcel[(-T^2+(4*T)+3)]
```

Salida del programa

Función de posición Fn=3 + 4 T - T^2
Velocidad v(t)=4 - 2 T
Aceleración a(t)=-2

Evaluando la función con t={0,2,6}

Velocidad = {4, 0, -8}
Rapidez = {4, 0, 8}
Aceler = -2
Valores de la fn. s = {3, 7, -9}

1.1.2 Movimiento Circular

Cuando hablamos de movimiento circular nos referimos al movimiento de traslación de una partícula cuando describe una trayectoria circular, y su rapidez es constante. El vector velocidad cambia constantemente de dirección pero no de magnitud siendo esta constante. El vector aceleración apunta hacia el centro del círculo y es perpendicular a la velocidad. Como la velocidad es tangente al círculo y la aceleración va dirigida hacia al centro, esta se llama aceleración radial o centrípeta (esta palabra significa que se dirige hacia al centro). La aceleración es la rapidez con que cambia la velocidad al transcurrir el tiempo.

El movimiento circular mostrado en la figura 1.1.3 puede ser descrito convenientemente por las ecuaciones

$$x = a\cos\theta, \qquad y = a\operatorname{sen}\theta.$$

Estas son ecuaciones paramétricas para la curva en términos del ángulo θ.

Para describir el movimiento alrededor de un círculo, necesitamos conocer como x y y dependen del tiempo, podemos igualar las ecuaciones paramétricas de la forma que sean

$$x = f(t), \qquad y = g(t).$$

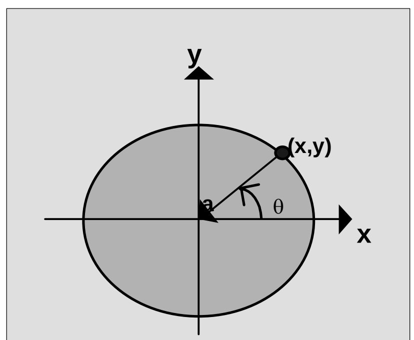


Fig 1.1.3

Las cuales necesariamente dependen de la dirección y la velocidad de rotación, y **t** representa el tiempo.

Velocidad, rapidez y aceleración del movimiento circular

En el movimiento lineal se detallaron las definiciones de velocidad, rapidez y aceleración en este tema lo que haremos es un resumen.

Sea P un punto sobre un círculo tal que su posición al tiempo **t** está dada por **s(t)** donde **s** es una función derivable.

La velocidad de la partícula P al tiempo t es $\nu(t) = s'(t)$.

La rapidez de la partícula P al tiempo t es **|** $\nu(t)$ **|**.

La aceleración de la partícula P al tiempo es $a(t) = s''(t)$.

Ejemplo#1 (Movimiento circular uniforme)

Considere un punto P que se mueve en torno a un círculo con centro en (0,0) y radio **r** a una velocidad angular constante de w radianes por segundo. Si su posición inicial es el punto (r,0). Encuentre su aceleración.

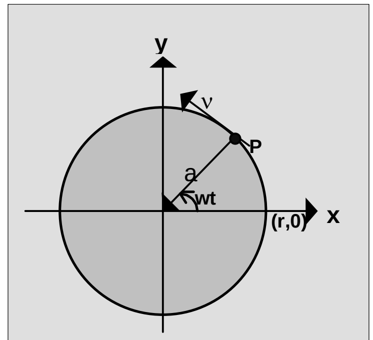


Fig 1.1.4

Solución

Las ecuaciones son $x = r\cos wt$, $y = r\,\mathrm{sen}\,wt$
El vector de posición en el tiempo t es :
$r(t) = (r\cos wt)i + (r\,\mathrm{sen}\,wt)j$
La velocidad es : $\nu(t) = (-rw\,\mathrm{sen}\,wt)i + (rw\cos wt)j$
La aceleración es : $a(t) = (-rw^2\cos wt)i - (rw^2\,\mathrm{sen}\,wt)j$
$a(t) = -rw^2(\cos wt + \mathrm{sen}\,wt) = -rw^2.$

Ejemplo#2

Las ecuaciones paramétricas de un punto que se mueve en el plano son ***x = 3cost, y = 2sent*** donde t representa el tiempo. Haga una gráfica de la trayectoria de P. Encuentre las expresiones de la velocidad y la aceleración.

Solución a

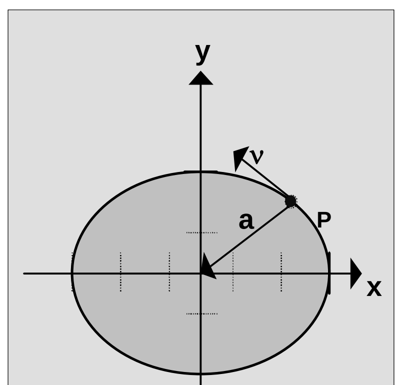


Fig 1.1.5

$x = 3\cos t$, $y = 2\,\mathrm{sen}\,t$;

$\frac{x}{3} = \cos t$, $\frac{y}{2} = \mathrm{sen}\,t$ Despejando t de las ecuaciones;

$\frac{x^2}{9} = \cos^2 t$, $\frac{y^2}{4} = \mathrm{sen}^2 t$; Igualando las ecuaciones

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = \cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t$ Por la identidad $\cos^2 t + \mathrm{sen}^2 t = 1$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \rightarrow$ Obtenemos la ecuación de la elipse

Solución b

El vector de posición es $r(t) = 3\cos t\,i + 2\,\mathrm{sen}\,t\,j$; La velocidad $\nu(t) = -3\,\mathrm{sen}\,t\,i + 2\cos t\,j$

La aceleración a(t) = -3costi -2sentj,

La rapidez $\nu(t) = \sqrt{(-3\,\text{sen}\,t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{9\,\text{sen}^2\,t + 4\cos^2\,t}$

Sustituyendo $\cos^2 t$ por $1-\text{sen}^2 t$ $|\nu(t)| = \sqrt{9\,\text{sen}\,t^2 + 4(1-\text{sen}^2\,t)} = \sqrt{5\,\text{sen}^2\,t + 4}$

PROGRAMACIÓN

Este programa resuelve ejercicios sobre movimiento circular, se piden como datos de entrada las ecuaciones en x y y en base al parámetro t.

```
Mcircular[Ecx_,Ecy_]:=Module[{Vp,V,A,R,Rap},
Print[" "];
Print["Salida del programa"];
Print[" "];
Vp=Ecx+Ecy;
Print[StringForm["Vector de posición Vp = ``",Vp]];
Print[" "];
V=D[Vp,T];
A=D[V,T];
R=D[Ecx,T]^2+D[Ecy,T]^2;
Rap=Sqrt[R];
Print[StringForm["La velocidad v(t)=``",V]];
Print[StringForm["La aceleración a(t)=``",A]];
Print[StringForm["La rapidez Rap=``",Rap]];
]Mcircular[3Cos[T],2Sin[T]]
```

Salida del programa

Vector de posición Vp = 3 Cos[T] + 2 Sin[T]
La velocidad v(t)=2 Cos[T] - 3 Sin[T]
La aceleración a(t)=-3 Cos[T] - 2 Sin[T]
La rapidez Rap=Sqrt[4 Cos^2 [T] + 9 Sin^2 [T]]

1.1.3 Combinación del movimiento Lineal y Circular

Como ya conocemos los conceptos de movimiento lineal y circular es esta sección sólo abordaremos ejemplos. Recordemos que en Física la cantidad de movimiento de un cuerpo de masa **m**, que se mueve en línea recta con velocidad ν, se define como **p = mν.**

Ejemplo#1

Un faro se localiza en una pequeña isla a 2 mi(millas) de una costa recta. El haz luminoso del faro gira a una velocidad constante de 6 grados por segundo. Con qué rapidez va desplazándose el rayo de luz a lo largo de la costa en un punto que se encuentra a 3 mi del punto costero más cercano del faro?

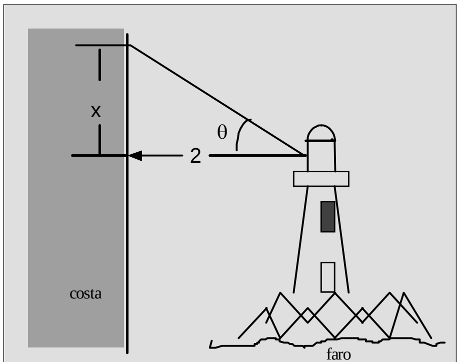


Fig. 1.1.3

Solución

Primero introducimos las variables θ y x como podemos ver en la figura 1.1.3. Además, se cambia la información de θ radianes, recordando que 1^0 equivale a π/180 radianes. Así,

$\frac{d\theta}{dt} = 6 * \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{30} \text{rad/seg}$; Se quiere $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=3}$; Se conoce $\frac{x}{2} = \tan\theta$ o bien $x = 2\tan\theta$.

Derivando la última ecuación con respecto a t resulta: $\frac{dx}{dt} = 2\sec^2\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi}{15}\sec^2\theta$

En el instante x = 3, tanθ = 3/2, así que de la identidad trigonométrica $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, se tiene que $\sec^2\theta = 13/4$. Por lo tanto,

$$\left.\frac{dx}{st}\right|_{x=3} = \frac{\pi}{15} * \frac{13}{4} = \frac{13\pi}{60} \text{mi/s}.$$

1.1.4 Descripción general de curvas en forma paramétrica

El estudio de las curvas tiene una gran historia en las Matemáticas. Las curvas describen algunas de las formas más hermosas en Matemática. Por lo general las curvas planas que hemos encontrado son sobre todo gráficas de ecuaciones.

Definición de curvas planas:

Una curva plana se determina mediante un par de ecuaciones paramétricas **x = f(t) , y = g(t),** $a \le t \le b$ (Intervalo I), donde f \`y g\` existen y son continuas en [a,b], f \`(t) y g\`(t) no son cero al mismo tiempo en(a,b).

Terminología referente a curvas

Representación de algunas curvas, para las que I es un intervalo cerrado [a,b].

Supongamos que C es una curva parametrizada por x = f(t), y = g(t), $a \le t \le b$, y que A y B son los puntos (f(a),g(a)) y (f(b),g(b)), respectivamente

- C es una curva alisada si f \` y g\` son continúas en [a,b] y no son cero simultáneamente en (a,b), ver figura 1.1.6.a.

- C es alisada parte por parte si se puede expresar como la unión de un número finito de curvas suaves alisadas ,ver figura 1.1.6.b.
- C es una curva cerrada si A = B , es decir si los extremos coinciden, ver figura 1.1.6.c.
- C es una curva cerrada simple si A = B y la curva no se cruza a sí misma en ningún punto, entonces es una curva cerrada simple, ver figura 1.1.6.d.
- Si C no es una curva cerrada, entonces el sentido positivo de C es el sentido correspondiente a los valores crecientes de t.

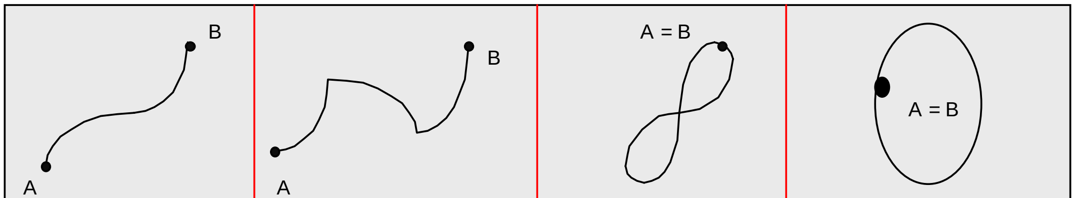


Fig1.1.6a Fig1.1.6.b Fig1.1.6.c Fig1.1.6d

El nombre convencional para una descripción de una curva en términos de una función de posición es “***<u>Representación paramétrica</u>*“ . t** puede representar el tiempo si x y y describen la posición de una partícula como una función de tiempo. En el contexto de representación paramétrica , el parámetro t siempre es una variable.

Otra clase importante de curvas es la trayectoria de un punto móvil en el plano. Pudiendo describir este movimiento dando su posición (x(t),y(t)) en el tiempo t, el parámetro t es una variable independiente. Esto nos conduce a la definición de curvas paramétricas.

<u>Definición de curvas paramétricas:</u>

Una curva paramétrica C del plano es un par de funciones x = f(t), y = g(t), son ecuaciones paramétricas de C con parámetro **t** donde x e y , son funciones continuas del número real t en algún intervalo I.

Cada valor del parámetro t da un punto (f(t),g(t)), y el conjunto de todos los puntos es la gráfica de la curva C. Las ecuaciones paramétricas sirven para formar una tabla de valores con puntos P(x,y) de la curva y graficarlos.

Eliminación de parámetro

Para conocer una curva mediante ecuaciones paramétricas puede ser deseable eliminar el parámetro, a veces esto puede realizarse despejando t en una ecuación y sustituyéndolo en otra, esto lo podemos resumir en los siguientes pasos.

Ecuaciones Paramétricas → Despejar t en una ecuación → Sustituir t en la otra ecuación → Ecuación rectangular

Ejemplo#1

Elimine el parámetro **t** y después dibuje la gráfica de las siguientes ecuaciones x = t + 1 , y = 2t - 1

Solución

Despejando t en la primera ecuación nos queda t = x -1 y sustituyendo t en la segunda ecuación obtenemos: $y = 2(x - 1) - 1 = 2x - 2 - 1 \Rightarrow y = 2x - 3$, dando valores a x obtenemos la tabla de valores 1.1.2.
Los comandos del software Mathematica utilizados para dibujar la gráfica de la función son los siguientes :

Plot[2X-3,{X,0,4},AxesLabel->{"Eje x","Eje y"}, PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0.2,0.1,0.8]}}]

Tabla de valores 1.1.2	
X	***Y***
0	**-3**
1	**-1**
2	**1**
3	**3**
4	**5**

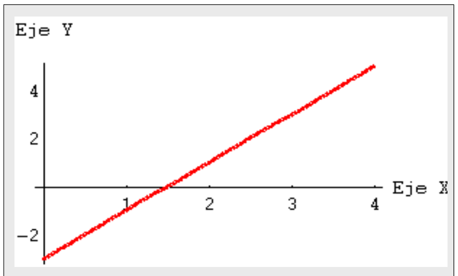


Fig.1.1.7

Ejemplo#2

Considerar la curva con la descripción paramétricas x = -2sent, y = -3cost , $0 \le t \le \pi$. Encontrar una descripción de la curva en términos de x,y, hacer el esquema de la curva de salida .

Solución

$$\left(\frac{x}{-2}\right) = \operatorname{sen} t \quad , \qquad \left(\frac{y}{-3}\right) = \cos t \quad ; \qquad \left(\frac{x}{-2}\right)^2 + \left(\frac{y}{-3}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

La gráfica es una parte de la elipse. Dando valores a t obtenemos la tabla de valores .1.1.3.

Los comandos del software Mathematica utilizados para hacer la gráfica son:

ParametricPlot[{-2*Sin[T],-3*Cos[T]},{T,0,Pi},AxesLabel->{"Eje x","Eje y"}, PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0.2,0.1,0.8]}}]

Tabla de valores 1.1.3		
T	***X***	***Y***
0	0	3
$\pi/2$	-2	0
π	0	-3

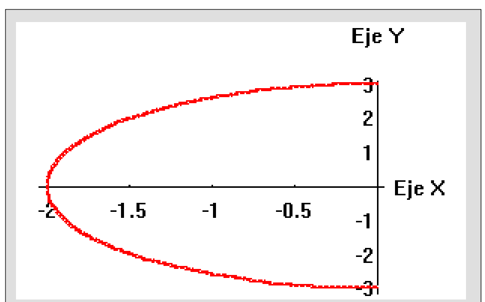


Fig. 1.1.8

Ejemplo#3

Elimine el parámetro, luego identifique y dibuje la curva $x = t^2 + 2t$; $y = t - 3$; $-2 \le t \le 3$.

Solución

De la segunda ecuación despejamos t, y nos queda t = y + 3, sustituimos la expresión en la primera ecuación y obtenemos

$$x = (y+3)^2 + 2(y+3) = y^2 + 8y + 15 \quad \textbf{ó} \quad (x+1) = (y+4)^2$$

la gráfica es una parábola con vértice en (-1,-4) y abre hacia la derecha.

Tabla de valores 1.1.4		
T	**X**	**Y**
-2	**0**	**-5**
-1	**-1**	**-4**
0	**0**	**-3**
1	**3**	**-2**
2	**8**	**-1**
3	**15**	**0**

PROGRAMACIÓN

Programa de ecuaciones paramétricas sobre eliminación de parámetro del ejemplo 3.

```
EcParam[Ecx_,Ecy_,a_,b_]:=Module[{Vrt,Ec,ERec,Tvxy,Vt},
Print["***Salida del programa***"];
Print["  "];
Print[StringForm["Primera ecuación X = ``",Ecx]];
Print[StringForm["Segunda ecuación Y = ``",Ecy]];
Print["  "];
Print["*** Despejando t en la segunda ecuación tenemos *** "];
Vrt=Solve[Y-T+3==0,T];
Print[StringForm["Valor de T = ``",Vrt]];
Print["  "];
Print[" *** Sustituyendo t en la primera ecuación tenemos *** "];
Ec=Expand[Ecx/.Vrt];
Print[StringForm["Ecuación obtenida al sustituir T = ``",Ec]];
Print["  "];
Print[" *** Tabla de Valores ***"];
Vt=Table[T,{T,a,b}];
Tvxy=Table[{Ecx,Ecy},{T,a,b}];
TableForm[{Tvxy,Vt},TableDirections -> {Row,Column,Row},
                TableHeadings -> {{"X","Y","T"}},
                TableSpacing -> {1,1}]
]
EcParam[(T^2)+2T,T-3,-2,3]
```

Salida del programa

Primera ecuación X = 2 T + T^2
Segunda ecuación Y = -3 + T

*** Despejando t en la segunda ecuación tenemos ***
Valor de T = {{T -> 3 + Y}}

*** Sustituyendo t en la primera ecuación tenemos ***
Ecuación obtenida al sustituir T = {15 + 8 Y + Y^2}

*** Tabla de Valores ***

X	Y	T
0	-5	-2
-1	-4	-1
0	-3	0
3	-2	1
8	-1	2
15	0	3

***** Gráfica de la ecuación *****

```
ParametricPlot[{(T^2+2T),(T-3)},{T,-2,3},Frame->True,
AxesLabel->{"Eje X","Eje Y"},

PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[1,0,0]}}];
```

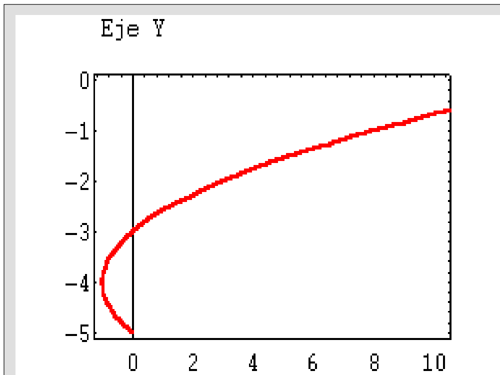


Fig.1.1.9

1.1.5 Longitud de una curva plana

La longitud de arco es la distancia a lo largo de la curva.

Definición:

Una curva plana es suave si se puede determinar por un par de ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, donde f \` y g\` existen y son continuas en [a,b] , f \`(t) y g \`(t) no son cero al mismo tiempo en [a,b].

El adjetivo suave se elige para indicar que un objeto que se mueve a lo largo de la curva de modo que el instante t su posición sea (x,y) no sufrirá cambios bruscos de dirección ni altos retrocesos.

Longitud de una curva suave dada en forma paramétrica

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)^2 + g'(t)^2\right)}dx \; ; \qquad S = \int_{t_o}^{t} \sqrt{\left(\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2\right)}dt$$

Casos especiales cuando están definidas en base a una sola variable (x ó y)

Los siguientes teoremas determinan la longitud de arco de una curva dada cuando x se expresa como una función de y y viceversa.

Teorema A:

Si la función **f** y su derivada **f`** son continuas en el intervalo cerrado [a,b], entonces la longitud de arco de la curva y = f(x) , del punto (a,f(a)) al punto (b,f(b)) está dada por :
$$S = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx = \int_a^b \sqrt{\left(1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2\right)}dx \; .$$

Teorema B:

Si la función **f** y su derivada **f`** son continuas en el intervalo cerrado [c,d], entonces la longitud de arco de la curva x = f(y) , del punto (f(c),c) al punto (f(d),d) está dada por :
$$S = \int_c^d \sqrt{1+[f'(y)]^2}dy = \int_c^d \sqrt{\left(1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2\right)}dy \; .$$

Ejemplo#1

Encontrar las ecuaciones paramétricas de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, usando la longitud de una curva con el punto de referencia de S en P(0,0).

Solución

Escribir las ecuaciones paramétricas del círculo x = acost, y = asent.

$$\frac{dx}{dt} = -a\,\mathrm{sen}\,t \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = a\cos t$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t)}dt \quad = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t))}dt$$

$$\boxed{= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 dt} = \int_0^{2\pi} a dt = [a * t] = 2\pi a}$$

PROGRAMACIÓN

Programa sobre longitud de arco para ambos casos (una y dos ecuaciones)

```
LArco:=Module[{CEc,LInf,LSup,Ecx,Ecy,Dx,Dy,Arco,S,Var,Ay,Ax,Res},
Print[" "];
Print["  Salida del programa "];
Print[" "];
CEc=Input["Cantidad de ecuaciones a derivar"];
LInf=Input["Introduzca el Límite Inferior"];
LSup=Input["Introduzca el Límite Superior"];
If[CEc==2,
  Ecx=Input["Ecuación en x"];
  Ecy=Input["Ecuación en y "];
  Print[StringForm["Ecuación en x = ``",Ecx]];
  Print[StringForm["Ecuación en y = ``",Ecy]];
  Dx=D[Ecx,T];
  Dy=D[Ecy,T];
  Print[" "];
  Print["Derivadas"];
  Print[" "];
  Print[StringForm["Derivada Dx =``",Dx]];
  Print[StringForm["Derivada Dy =``",Dy]];
  Arco=Sqrt[Dx^2+Dy^2];
  S=Integrate[Arco,{T,LInf,LSup}]/.{T->LInf,T->LSup};
  Print[" "];
  Print[StringForm["Longitud arco S=``",S]],
  If[CEc==1,
    Var=Input["Introduzca la var [X/Y]? para obtener la long. de arco"];
    If[Var==X,
      Ecx=Input["Ecuación en x"];
      Print[StringForm["Ecuación en x =``",Ecx]];
      Dy=D[Ecx,Y];
      Print[StringForm["Derivada Dx =``",Dx]];
      Ay=Sqrt[1+Dy^2];
      S=n[Integrate[Ay,{Y,LInf,LSup}]/.{Y->LInf,Y->LSup},5];
      Print[StringForm["Longitud de arco =``",S]];
    ];
    If[Var==Y,
      Ecy=Input["Ecuación en y"];
      Print[StringForm["Ecuación en y =``",Ecy]];
     Dx=D[Ecy,X];
      Print[StringForm["Derivada Dx =``",Dx]];
      Ay=Sqrt[1+Dx^2];
      S=N[Integrate[Ay,{X,LInf,LSup}]/.{X->LInf,X->LSup},5];
      Print[StringForm["Longitud de arco =``",S]],
   ];
```

 ]
 ]
]Larco

Salida del programa

Ecuación en x = A Cos[T]
Ecuación en y = A Sin[T]

Derivadas
Derivada Dx =-(A Sin[T])
Derivada Dy =A Cos[T]
Longitud arco S=2 Sqrt[A^2] Pi

Ejemplo#2

Encuentre la longitud de arco de la curva y **= x$^{3/2}$** entre los puntos (1,1) y (4,8).

Solución

$y = x^{3/2}$ **,** $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} x^{1/2}$

$S = \int_1^4 \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2} dx = \int_1^4 \sqrt{\left[1 + \left(\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4x}}\right)\right]} dx$; Haciendo cambio de variable $u = 1 + \frac{9}{4x} \quad \rightarrow \quad du = \frac{9}{4}dx$

$S = \int_1^4 \sqrt{\left(1 + \left(\frac{9}{4x}\right)\right)} dx = \frac{4}{9}\int_1^4 \sqrt{u}du = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C$; $\qquad S = \left[\frac{8}{27} * \left(1 + \frac{9}{4x}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + C$

En consecuencia $S = \int_1^4 \sqrt{\left(1 + \frac{9}{4x}\right)} dx = \left[\left(1 + \frac{9}{4x}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 \quad = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{13}{8}\right)^{\frac{3}{2}}\right) = 7.63$

♦ 1.2 Funciones vectoriales de variable real y movimiento curvilíneo

Para una mejor comprensión recordemos el concepto de funciones escalares o reales, en las cuales la entrada es un escalar y su salida es otro escalar.

Una función f es una regla de correspondencia que asocia a cada objeto x de un conjunto llamado "*dominio*" un valor único f(x) de un segundo conjunto llamado "*rango*" que es el conjunto de valores obtenidos.

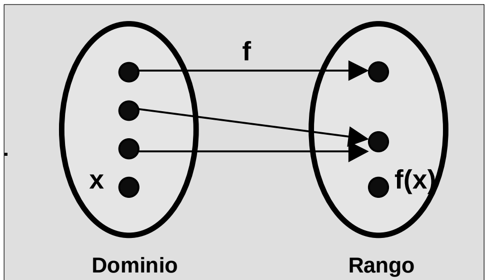


Fig 1.2.1

La forma de leer una función es : **f(x) : Se lee " f de x " o bien " f en x "**

Como ya conocemos lo que es una función escalar el concepto de función vectorial se nos hace un poco familiar. Empecemos recordando la diferencia entre una función escalar y una función vectorial a través de ejemplos de la vida real.

"La presión y la temperatura"

Son cantidades descritas por un número.

"La fuerza magnética y la fuerza de gravedad"

Son cantidades que para describirlas requieren de magnitud y dirección.

Ya conocemos que las ecuaciones paramétricas de la forma x = f(t) y y = g(t) son convenientes para describir el movimiento lineal. Si se combinan los pares ordenados y los vectores entonces obtenemos la descripción de una función vectorial, es decir que las funciones vectoriales transforman números reales en vectores. La primera componente del vector $\bar{r}(t)$ es la coordenada x y la segunda componente es la coordenada y. Donde para cada valor de t, el correspondiente valor de $\bar{r}(t)$ es entonces un par de números reales.

Una función vectorial es aquella cuyo *"dominio"* es un conjunto de números reales y cuyo *"rango"* es un conjunto de vectores.

Definición de función vectorial:

Sean f y **g** dos funciones reales de una variable t. Entonces para todo número t en el dominio común a f y g, existe un vector R definido por r**(t) = (f(t)i + g(t)j o bien r = fi + gj.**

Una función r vectorial con variable real t Asocia a cada número real t un vector r(t). Por lo tanto, $r(t) = f(t)i + g(t)j = \langle f(t), g(t) \rangle$, donde f y g son funciones ordinarias de valores reales. Un ejemplo representativo **r**(t) = t^2**i** + e^t **j** = < t^2,e^t >

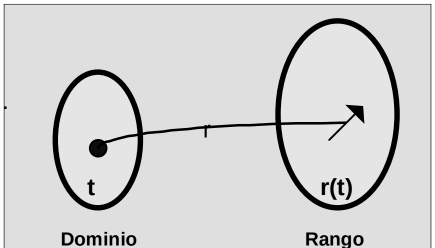


Fig 1.2.2

1.2.1 Cálculo para funciones vectoriales (Límite y Fórmulas de derivación)

Para entrar en detalles sobre los límites de funciones vectoriales es necesario conocer todo acerca de los límites de números reales en este tema lo que se hizo fue hacer una referencia sobre los límites de números reales y luego a los de funciones vectoriales.

Uno de los conceptos más importantes de las Matemáticas es el concepto de límite. Esta noción no solo es importante por si misma para describir el comportamiento de una función, sino que revela la clave para conceptos importantes como la derivada. La noción de límite es la idea que distingue el cálculo de otras ramas de la Matemática.

Límite

La siguiente expresión sobre límite $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se lee:**" El límite de f(x), cuando x tiende a "a" , es L".**

Para analizar el límite de f en **"a"** no necesitamos que f esté definida en **"a".** Lo que necesitamos es que f esté definida en alguna vecindad de **"a"** (Esto quiere decir, un conjunto que se obtiene suprimiendo el punto simple **"a"** de algún intervalo abierto que lo contenga).

Definición informal de límite:

Decimos que el número L es el límite de f(x) cuando x tiende a **"a"** una vez que el número **f(x)** pueda acercarse a **L**, simplemente escogiendo una x lo suficientemente cerca, aunque no sea igual al número **"a".** Esto significa que f(x) tiende a acercarse más y más a **"L".**

Ejemplo#1

Encuentre el $\lim_{x \to 3} (4x - 5)$

Solución

Cuando x esta cerca de 3, 4x - 5 estará cerca de 4 * 3 - 5 = 7 y escribimos $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$

Utilizando los comandos del software Mathematica se resuelve de la siguiente forma

In[1]:=Limit[(4*X)-5,X->3]
Out:= 7

Límites Unilaterales

Cuando una función salta , el límite no existe en los puntos donde salta para todas las funciones, resulta natural introducir límites unilaterales. El símbolo **x -> a⁺** significa que **x** se aproxima a **"a"** por la derecha y **x->a⁻** significa que **x** se aproxima a **"a"** por la izquierda.

Definición de límite por la izquierda:

Sea f una función definida en un intervalo abierto (c,a). Entonces $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ significa que f(x) puede acercarse arbitrariamente a L_1 escogiendo x suficientemente cerca de **"a"**, con x < a, ver figura 1.2.3.a.

Definición de límite por la derecha:

Sea f una función definida en un intervalo abierto (a,c). Entonces $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L_2$ significa que f(x) puede acercarse arbitrariamente a L_2 escogiendo x suficientemente cerca de **"a"**, con x > a, ver figura 1.2.3.b.

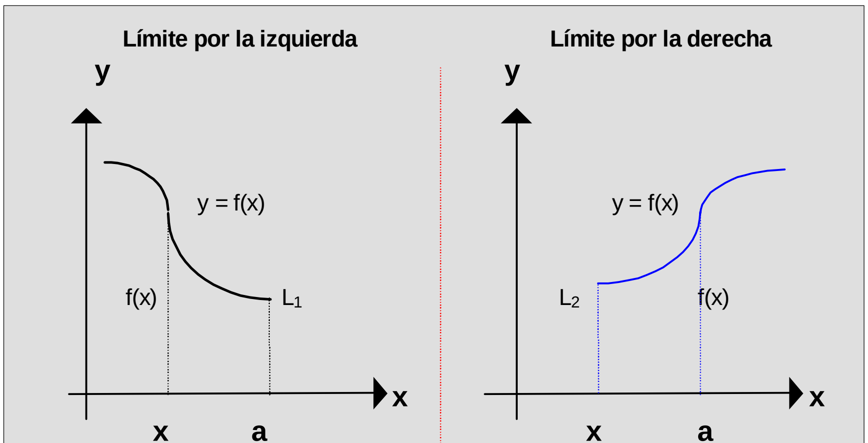


Fig 1.2.3a Fig 1.2.3b

Las gráficas anteriores no pretenden dar la impresión de que **f(x)** no está definida para **x** ≥ **a**, sino ilustrar que para que **x -> a**$^-$ solamente deban tomarse en cuenta los valores de **x** que son menores que **"a".** Análogamente para que **x -> a**$^+$ solo deben tomarse en cuenta los valores de **x** que son mayores que **"a"**.

El siguiente teorema describe la relación entre límites y límites unilaterales

Teorema:

Sea a un punto contenido en un intervalo abierto y f una función definida en todo el intervalo excepto posiblemente en **"a".** Entonces

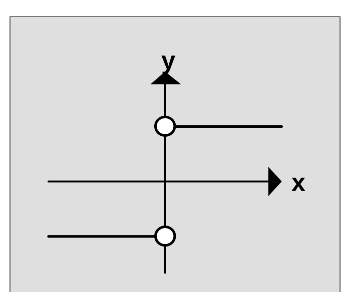
$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y solo si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

Este teorema significa que el lim de f(x) cuando x tiende a **"a"** existe si y solo si los límites por la derecha y por la izquierda existen y son iguales.

Ejemplo#2

Sea $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Calcular el $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

Solución



ción

Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y $f(x) = \frac{x}{x} = 1$.

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$.

Si $x < 0$, entonces $|x| = -x$ y $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$.

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$.

Como los límites por la izquierda y por la derecha no son iguales, del teorema anterior deducimos que $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. Por lo tanto f no está definida en x=0, ver fig. 1.2.4.

Ejemplo#3

Un gas se mantiene a temperatura constante dentro del cilindro mostrado en la figura 1.2.5.a. Cuando el gas se comprime el volumen disminuye hasta que se llega a una presión crítica. Al rebasar ésta presión el gas se convierte en líquido. Utilizar la gráfica de la figura 1.2.5.b, para interpretar y calcular el $\lim_{p\to 100^-} V$ y $\lim_{p\to 100^+} V$.

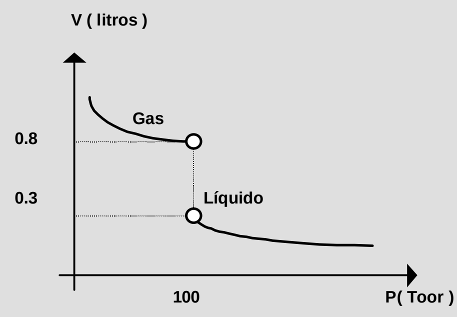


Fig 1.2.5a

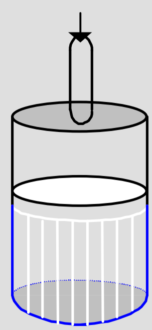


Fig 1.2.5b

Solución

De la gráfica 1.2.5 se deduce que cuando la presión P (en torrs :mm de mercurio es una unidad de medida de la presión) es baja la sustancia es gaseosa y el volumen V(en litros) es grande . Cuando P se acerca a 100 tomando valores mayores que 100 , **V** disminuye y tiende a 0.8, es decir, $\lim_{p\to 100^-} V = 0.8$. Cuando P tiende a 100 tomando valores menores que 100 la sustancia es líquida y V aumenta muy lentamente tendiendo a 0.3, es decir, $\lim_{p\to 100^+} V = 0.3$. Cuando P = 100 la forma líquida y gaseosa coexisten en equilibrio y la sustancia no puede clasificarse como gas ni como líquido.

Recomendación

Para una mejor comprensión de la definición formal de límite y poder resolver ejercicios usando la definición, el estudiante debe tener nociones sobre todo lo relacionado con desigualdades.

Definición formal de límite

Decir que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$, dada (no importa que tan pequeño sea), existe una correspondiente $\delta > 0$ tal que $| f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < | x - a | < \delta$; es decir, $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

En el calculo de límite usamos las letras griegas ε -> Epsilon y δ -> Delta, las cuales representan los números positivos arbitrarios.

La gráfica 1.2.6 ayuda a comprender esta definición, para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que $0 < | x - a | < \delta$ $|f(x) - L| < \varepsilon$, esto enfatiza que primero se da el número ε y debe producirse el número δ.

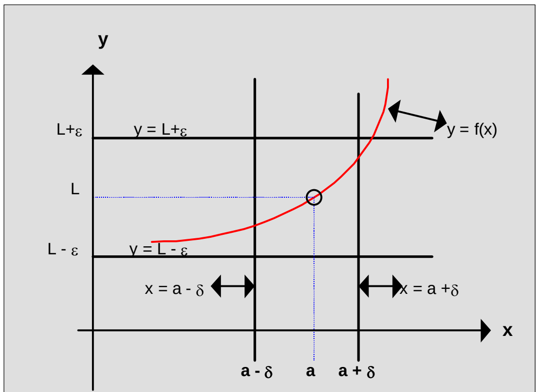


Fig 1.2.6

Los puntos de la gráfica de y = f(x) que satisfacen la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ son los que están entre las rectas horizontales ($y = L - \boldsymbol{\varepsilon}$ **,** $y = L + \boldsymbol{\varepsilon}$ **)**. Los puntos de la gráfica que satisfacen la desigualdad $| x - a | < \delta$ son los que están entre las rectas verticales ($y = a - \delta$**,** $y = a + \delta$ **)**. La definición significa que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y solo si lo que sigue es verdad.

Una inspección sobre la figura 1.2.6 que puede creerse es que entre más cerca se encuentra las dos rectas horizontales , mas cerca deberán estar los dos verticales. Esto es ***"hacer que f(x) se acerque a L haciendo que x se acerque a*** **<a> ".**

Ejemplo#4

Usando la definición de límite comprobar que el $\lim_{x \to 4} (3x - 7) = 5$

Análisis preliminar

Sea $\boldsymbol{\varepsilon}$ un número entero positivo cualquiera. Debemos encontrar una $\delta > 0$ tal que
$0 < | x - 4 | < \delta \Rightarrow (3x - 7) - 5 < \varepsilon$

Tomando la desigualdad de la derecha y resolviéndola tenemos :

$(3x-7)-5<\varepsilon$

$|3x-12|<\varepsilon$

$|3(x-4)|<\varepsilon$

$|3||x-4|<\varepsilon$

$x-4<\dfrac{\varepsilon}{3}$

Esta desigualdad da la parte que necesitamos, tomamos $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ para hacer la prueba formal.

Prueba formal

Sea $\varepsilon > 0$, ahora escogemos $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, entonces $0 < | x - 4 | < \delta$ implica

$| (3x - 7) - 5 | = | 3x - 12 |$

$| 3(x - 4) | = | 3 | | x-4 | < 3\delta$

$| 3 | | x-4 | < 3\dfrac{\varepsilon}{3}$ sustituyendo el valor de δ

$| 3 | | x-4 | < \varepsilon$

$x-4<\dfrac{\varepsilon}{3}$

Cuando no se usa la definición formal sobre límites existen ciertos teoremas para resolver ejercicios los cuales se muestran a continuación.

Teorema principal sobre límites:

Sea n un entero positivo, k una constante, y f y g funciones con límites en C. Entonces,

1. $\lim\limits_{x\to a} K = K$; 2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$; 3. $\lim\limits_{x\to a} K f(x) = K \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

4. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) + g(x) \right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

5. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) - g(x) \right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

6. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \bullet g(x) \right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \bullet \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

7. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) / g(x) \right] = \lim\limits_{x\to a} f(x) / \lim\limits_{x\to a} g(x)$,dado que $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$;

8. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \right]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x) \right]^n$;

9. $\lim\limits_{x\to a}\left[\sqrt[n]{f(x)} \right] = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, dado que $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ cuando n es par ;

En el caso de ejercicios que tengamos la siguiente situación ,cuando t tiende a un valor cualquiera y el cociente toma la forma de $\frac{0}{0}$, entonces siempre se debe buscar una simplificación algebraica(factorización) del cociente antes de tratar de tomar el límite.

Ejemplo#5

Aplique el teorema A para encontrar $\lim_{x\to 3} 2x^4$

Solución

$$\lim_{x\to 3} 2x^4 = 2\lim_{x\to 3} x^4 \quad \Rightarrow \text{ Aplicando el teorema 3}$$

$$= 2\left[\lim_{x\to 3} x\right]^4 \quad \Rightarrow \text{ Aplicando el teorema 8}$$

$$= 2*(3)^4 = 162 \quad \Rightarrow \text{ Aplicando el teorema 2}$$

Teorema de sustitución:

Si f es una función polinomial o una función racional, entonces, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, siempre que el valor del denominador para a no sea cero, en el caso de una función racional.

Los ejemplos para aplicar este tipo de teorema son como el que se resolvió en el ejemplo1 los cuales se resuelven sustituyendo el valor a que tiende x.

Límites de funciones vectoriales

La noción mas fundamental en cálculo es la de límite. En forma intuitiva el $\lim f(t) = L$ significa que el vector F(t) tiende al vector L cuando t tiende a **"a" .** otra alternativa es que el vector F(t) - L se acerca a cero cuando t tiende a **"a" ,** ver figura 1.2.7**.**

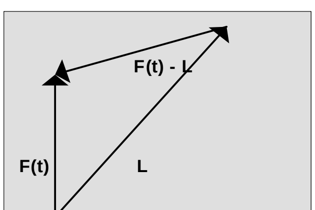


Fig 1.2.7

La definición es idéntica a la definición formal de límite para funciones de variable real, algo que hay que aclarar es que el símbolo | F(t) - L | se refiere ahora al módulo del vector |F(t) - L |.

Teorema de límite sobre funciones vectoriales:

Sea F(t) = f(t) i + g(t) j. Entonces F tiene límite en **"a"** si y solo si f y g tienen límites en **"a"**. En este caso

$$\lim_{x\to a} F(t) = \left[\lim_{x\to a} f(t)\right] i + \left[\lim_{x\to a} g(t)\right] j$$

Todos los teoremas comunes de límites se cumplen para los límites de funciones vectoriales.

Fórmulas de Derivación

Si R es una función vectorial diferenciable y R(t) es un vector diferente de cero de magnitud constante y dirección variable para toda t en el intervalo, entonces los vectores R(t) y $D_t R(t)$ son ortogonales.

La derivada F`(t) de una función vectorial se define de misma forma que una derivada de una función real.

$$F`(t) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(h)}{h}.$$ Esto puede escribirse como

$$F`(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\left[\, f(t+h)i + g(t+h)j \,\right] - \left[\, f(t)i + g(t)j \,\right]}{h}$$

$$F`(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} i + \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} j;\ F`(t) = f`(t)\, i + g`(t)\, j$$

Teorema:

Si F(t) = f(t)i + g(t)j siendo f y g funciones derivables de t entonces,

F ` ( t ) = f `(t)i + g`( t )j = < f `(t) , g`(t) >.

Propiedades de las derivadas para funciones vectoriales:

Sean F y G funciones diferenciales de valores reales, h una función diferenciable de valor real y C es un escalar. Entonces,

1. D_t [C F(t)] = CF `(t);
2. D_t [F(t) + G(t)] = F `( t ) + G`(t);
3. D_t [h(t)F(t)] = h(t)* F `( t ) + h`(t) * F(t);
4. D_t [F(t).G(t)] = F(t)*G`( t ) + G( t )*F `(t);
5. D_t [F(h(t))] = F `(h( t ) ) * h`(t) (Regla de la cadena)

Ejemplo#1

En el siguiente ejemplo aplique la propiedad número 4 de las derivadas de funciones vectoriales, F(t) = t i + t^2 j, G(t) = t^2 i - t j.

Solución

$F(t) = ti + t^2j$, $F`(t) = i + 2tj$
$G(t) = t^2i - tj$, $G`(t) = 2ti - j$

D_t [F(t).G(t)] = F(t)*G`( t ) + G( t )*F`(t)

F(t)*G`(t) = ($ti + t^2j$) (2ti - j)
F(t)*G`(t) = $2t^2i^2 + 2t^3ij - tij - t^2j^2$

G(t)*F`(t) = ($t^2i - tj$) (i + 2tj)
G(t)*F`(t) = $t^2i^2 - tij + 2t^3ij - 2t^2j^2$

D_t [F(t).G(t)] = $3t^2i^2 - 2tij + 4t^3ij - 3t^2j^2$

PROGRAMACIÓN

Derivadas de funciones vectoriales donde se aplica la propiedad 4 de las derivadas de funciones vectoriales (Tómese i = A y j = B) para efectos de corrida del programa ya que la i la confunde con los números complejos. Se piden como datos de entrada la cantidad de ecuaciones y las funciones a utilizar.

```
Dervect[CEc_,Fn1_,Fn2_]:=Module[{Df,Dg,FG,GF,Vect},
  Print[" "];
  Print[" Salida del programa "];
  Print[" "];
  Print["** Funciones introducidas ** "];
  If[CEc>0,
    Print[StringForm["Función 1 F(t)=(``)",Fn1]];
    Print[StringForm["Función 2 G(t)=(``)",Fn2]];
    Df=D[Fn1,T];
    Dg=D[Fn2,T];
    Print[" "];
    Print["** Derivadas ** "];
    Print[" "];
    Print[StringForm["Primera Derivada Df(t)=(``)",Df]];
    Print[StringForm["Segunda Derivada Dg(t)=(``)",Dg]];
    FG=Expand[Fn1*Dg];
    GF=Expand[Fn2*Df];
    Print[" "];
    Print["** Productos de funciones **"];
    Print[StringForm["FG = ``",FG]];
    Print[StringForm["GF = ``",GF]];
    Print[" "];
    Vect=FG+GF;
    Print[StringForm["Dt= ``",Vect]],
  Print["Error "];
  ];
]
Dervect[2,((T*A)+(T^2)*B),((T^2)*A-(T*B))]
```

Salida del programa

** Funciones introducidas **

Función 1 $F(t)=(A\ T + B\ T^2\ )$

Función 2 $G(t)=(-(B\ T) + A\ T^2\ )$

** Derivadas **

Primera Derivada $Df(t)=(A + 2\ B\ T)$

Segunda Derivada $Dg(t)=(-B + 2\ A\ T)$

** Productos de funciones **

$FG = -(A\ B\ T) + 2\ A^2T^2\ - B^2T^2\ + 2\ A\ B\ T^3$
$GF = -(A\ B\ T) + A^2T^2\ - 2\ B^2T^2\ + 2\ A\ B\ T^3$
$Dt= -2\ A\ B\ T + 3\ A^2T^2\ - 3\ B^2\ T^2\ + 4\ A\ B\ T^3$

1.2.2 Movimiento curvilíneo

El objetivo es estudiar el movimiento de un punto en el plano. Sea t la medida del tiempo y supóngase que las coordenadas de un punto móvil P están dadas por las ecuaciones paramétricas, $x = f(t)$ y $y = g(t)$. Entonces, el vector $r(t) = f(t)i + g(t)j$ que se supone sale del origen, se llama " **vector de posición** " del punto. Cuando t varía, la punta de r(t) traza la trayectoria del punto móvil P (ver figura 1.2.8). Esta es una curva y el movimiento correspondiente puede ser denominado como movimiento curvilíneo.

Por analogía con el movimiento lineal, definimos la velocidad $\nu(t)$ y la aceleración a(t) del punto móvil P por :

$$\upsilon(t) = r`(t) = f`(t)i + g`(t)j\ ; \qquad a(t) = r``(t) = f``(t)i + g``(t)j$$

$|\upsilon(t)|$ es la rapidez (módulo de la velocidad) del punto móvil P.
a(t) vector aceleración apunta hacia el lado cóncavo de la curva (el lado hacia el que se dobla la curva para ello ver figura 1.2.9).

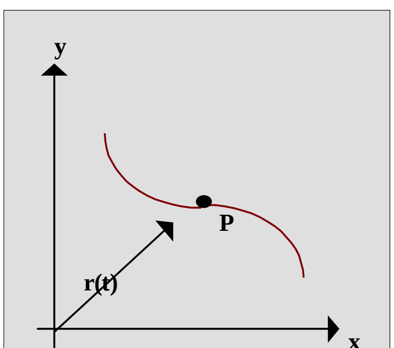


Fig 1.2.8

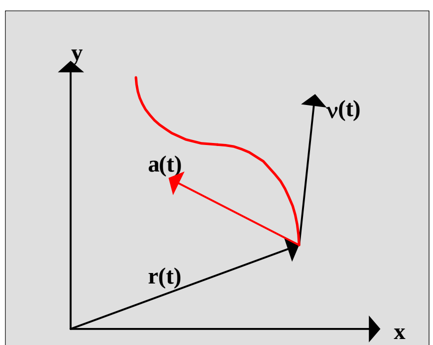


Fig 1.2.9

Ejemplo#1

Encuentre la velocidad, rapidez y aceleración cuando t=2, si $r(t) = \left(\frac{2}{t}\right)i + \left(\frac{3}{t+1}\right)j$.

Solución

$$\upsilon(t) = -\left(\frac{2}{t^2}\right)i - \left(\frac{3}{(t+1)^2}\right)j \;; \qquad \text{Evaluando en } t = 2$$

$$\left|\upsilon(t)\right| = -\left(\frac{2}{4}\right)i - \left(\frac{3}{9}\right)j = -\left(\frac{1}{2}\right)i - \left(\frac{1}{3}\right)j \quad ; \quad r(t) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6}\sqrt{13} \rightarrow \text{Rapidez}$$

$$a(t) = \sqrt{\frac{4}{t^4} + \frac{9}{(1+2t+t)^2}} = \sqrt{\frac{2}{t^2} + \frac{3}{(t+1)^2}} \quad ; \quad a(t) = \sqrt{\left(\frac{-1}{4}\right)i + \left(\frac{1}{9}\right)j}$$

1.2.3 Curvatura y aceleración

Cuando una partícula se mueve sobre una curva C puede cambiar su velocidad, lenta o rápidamente, dependiendo de como se doble la curva. Para medir esta rapidez cuando C cambia de forma se usa el concepto de curvatura. La curvatura indica que tanto se cierra una curva. Por ejemplo una recta tiene curvatura cero. Una curva que se dobla en forma muy cerrada tiene una gran curvatura y una curva que no es muy cerrada tiene poca curvatura, (ver figura 1.2.10).

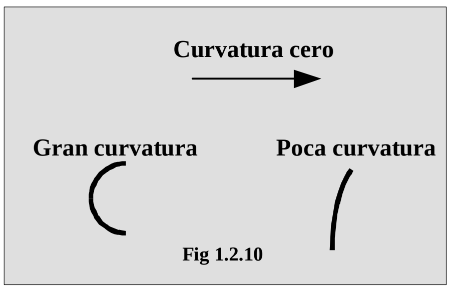


Fig 1.2.10

La curvatura es la razón de ***“cambio de dirección“.*** La dirección de una curva se determina por el vector velocidad.

Para $a \le t \le b$, sea $r(t) = f(t)i + g(t)j = < f(t), g(t) >$ el vector de posición de un punto
$P = P(t)$ en el plano. Supóngase que $r`(t)$ existe y que es continua y que $r`(t)$ (vector velocidad) diferente de 0 en el intervalo [a,b]. Entonces, cuando t aumenta, P traza una curva suave (ver figura 1.2.11) y la longitud $s = h(t)$ de la trayectoria de $P(a)$ a $P(t)$ está dada por

$$S = h(t) = \int_a^t \sqrt{f`(u)^2 + g`(u)^2}\, du = \int_a^t \left| r`(u) \right| du$$

La velocidad del punto móvil es $\dfrac{ds}{dt} = | r'(t) | = \left|\upsilon(t)\right|$;

Como $\mathbf{r'(t) \neq 0}$, **la** $\left|\upsilon(t)\right|$ **| > 0**, por lo tanto **s** aumenta cuando **t** aumenta.

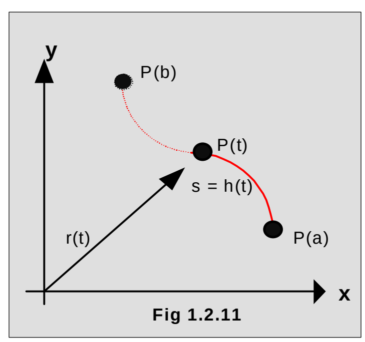


Fig 1.2.11

Para llegar a la definición de curvatura necesitamos introducir algunos vectores unitarios, tangentes y normales a las curvas, los cuales son útiles para estudiar lo que es la curvatura.

Si r es una función vectorial y la curva C determinada por r\`(t) es regular, entonces r\`(t) es un vector tangente a C. Si r\`(t) ≠ 0, entonces el vector tangente **T(t)** de C se define de la siguiente forma:

Definición de vector tangente unitario: $T(t) = \dfrac{r`(t)}{|r`(t)|} = \dfrac{\upsilon(t)}{|\upsilon(t)|}$

En la gráfica 1.2.12 se puede apreciar el vector tangente.

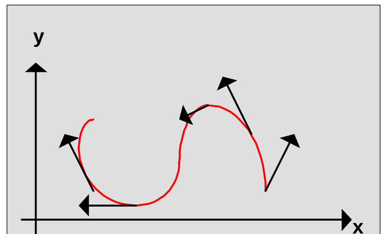


Fig 1.2.12

Cuando P(t) se mueve sobre la curva, el vector unitario **T(t)** cambia de dirección (ver figura 1.2.12). A éstos cambios respecto a la longitud de arco **s,** es a lo que se llama " ***vector de curvatura*** " en P , Entonces la ***"Curvatura*** κ (kappa)***"*** de la curva en el punto, es definida como la

magnitud de $\dfrac{dT}{ds}$; es decir $\kappa = \dfrac{dT}{ds}$; Utilizando la regla de la cadena nos quedaría

$\dfrac{dT}{ds} = \dfrac{dT}{dt} * \dfrac{dt}{ds} = \dfrac{T`(t)}{|\upsilon(t)|}$ donde $\kappa = \left|\dfrac{dT}{ds}\right| = \dfrac{T`(t)}{\upsilon(t)} = \dfrac{|T`(t)|}{|\upsilon`(t)|}$

Ejemplo#1

Demuestre que cada punto de un círculo de radio **a** tiene una curvatura igual a $\kappa = \dfrac{1}{a}$, ver figura 1.2.13.

Solución

Podemos suponer que el círculo tiene su centro en el origen. Entonces , su ecuación vectorial puede escribirse como r(t) = acosti + asentj. Entonces,

$\upsilon(t)$ = r\`(t) = -asenti + acostj

$|\ \upsilon(t)\ | = [a^2 sen^2 t + a^2 cos^2 t]^{1/2} = a$

$T(t) = \dfrac{\upsilon(t)}{|\upsilon(t)|} = \dfrac{\upsilon(t)}{a} = -sen\,t\,i + cos\,t\,j$

$\kappa = \dfrac{T`(t)}{\upsilon(t)} = \dfrac{|-\cos\ ti - sentj|}{a} = \dfrac{1}{a}$

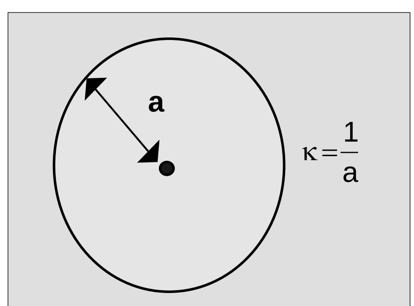


Fig 1.2.13

Puesto que la curvatura es recíproca al radio de curvatura, cuanto mayor sea el círculo menor será su curvatura.

El ejemplo #1(círculo) nos lleva a otras ideas.

Sea P un punto de la curva donde $\kappa \neq 0$. Considérese el círculo tangente a la curva en P que tiene la misma curvatura. Su centro estará en el lado cóncavo de la curva. Este círculo se llama *círculo de curvatura (o círculo oscultor)* ; su radio $R = 1/\kappa$ es el *radio de curvatura* y su centro es el *centro de curvatura*, ver figura 1.2.14.

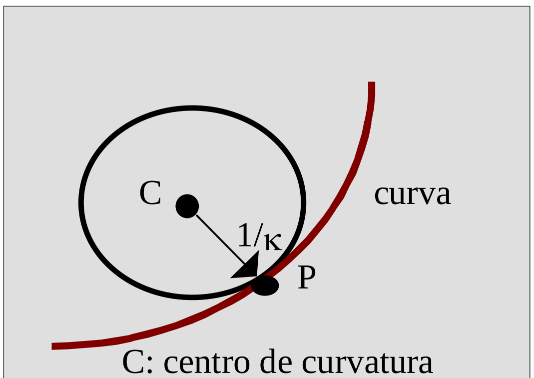


Fig 1.2.14

Antes de resolver el ejemplo 2 daremos la definición de la curva hipocicloide e ilustraremos su gráfica. Las ecuaciones paramétricas pueden usarse para definir una curva por ejemplo la hipocicloide la cual está descrita por un movimiento físico.

Definición de la hipocicloide:

Es la curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar por el interior de otra circunferencia.

La ecuación en forma paramétrica es :

$$x = (A-a)\cos\varphi - \lambda\, a\cos\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right),$$

$$y = (A+a)\,\text{sen}\varphi - \lambda\, a\,\text{sen}\left(\frac{A+a}{a}\varphi\right)$$

Para $m = 4$ es la hipocicloide con cuatro ramas (La Astroide)

$x = A\cos^3\varphi$, $y = A\,\text{sen}^3\varphi$;

$0 \leq \varphi \leq \varphi$

A : El radio del círculo estacionario

a : El radio del círculo móvil

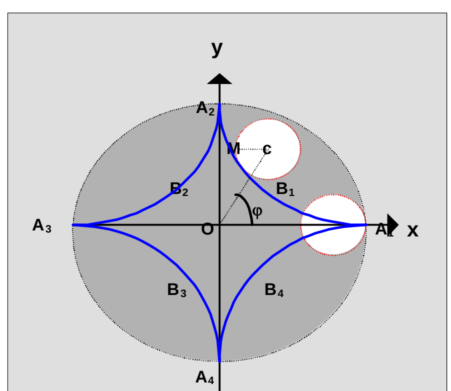


Fig 1.2.15

Ejemplo#2

Encontrar la curvatura y el radio de curvatura de la hipocicloide $r = 8\cos^3 t\,i + 8\text{sen}^3 t\,j$ en el punto P donde $t = \frac{\pi}{12}$. Después, dibuje la gráfica de esta hipocicloide donde se muestre el círculo de curvatura en P.

Solución *Para* $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$\upsilon(t) = r`(t) = (-24\cos^2 t * \text{sen}t)i + (24\text{sen}^2 t * \text{Cos}t)j$; $| \upsilon(t) | = 24\text{sen}t * \cos t$

$T(t) = -\cos t\,i + \cos t\,j$; $T`(t) = \text{sen}t\,i + \cos t\,j$

$$\kappa = \frac{|T`(t)|}{|\upsilon(t)|} = \frac{|\text{sen}\,t\,i + \cos t\,j|}{24\,\text{sen}\,t * \cos t} = \frac{1}{24\,\text{sen}\,t * \cos t} \quad ;$$

$$\kappa = \frac{1}{12\,\text{sen}\,2t} = \kappa\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{12 * \frac{1}{2}} = \frac{1}{6} \quad ; \qquad R\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6$$

La gráfica para este ejemplo es la figura 1.2.16.

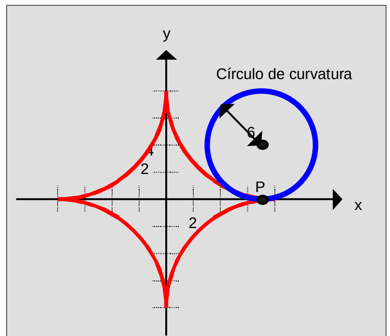


Fig 1.2.16

Otras fórmulas de curvatura

Teorema A

Considérese una curva con ecuación vectorial $r(t) = f(t)i + g(t)j$ esto es, ecuaciones paramétricas de una curva suave $x = f(t)$, $y = g(t)$.

Entonces $$\kappa = \frac{|(x`y`` - y`x``)|}{[(x`)^2 + (y`)^2]^{3/2}}$$

En particular ,si la curva es la gráfica de $y = g(x)$, entonces $\kappa = \frac{|y``|}{[1 + (y`)^2]^{3/2}}$

Ejemplo#3

Sea C la curva con ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = t^3$. Calcular la curvatura en el punto correspondiente a $t = \frac{1}{2}$.

Solución

$x` = 2t$, $y` = 3t^2$; $x`` = 2$, $y`` = 6t$

$$\kappa = \frac{|(x'y'' - y'x'')|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{|(2t)(6t) - (3t^2)(2)|}{\left[(2t)^2 + (3t^2)^2\right]^{3/2}} ;= \frac{6t^2}{\left(4t^2+9t^4\right)^{3/2}}$$; Evaluando $t = \frac{1}{2}$ entonces

$$\kappa = \frac{6t^2}{\left(4t^2+9t^4\right)^{3/2}} = \frac{\frac{6}{4}}{\left(\frac{25}{16}\right)^{3/2}} = \frac{96}{125} \cong 0.77$$

1.2.4 Componente tangencial y normal de la aceleración

Sea P = P(t) un punto de una curva suave . Defínase un nuevo vector N = N(t) llamado vector unitario normal en P, mediante

$N = \frac{dT/ds}{|dT/ds|} = \frac{1}{\kappa}\frac{dT}{ds}$, de modo que $\frac{dT}{ds} = \kappa \,.\, N$; ahora, $T = \cos\phi i + \operatorname{sen}\phi j$ por lo que

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{d\phi}\frac{d\phi}{ds} = \left(-\operatorname{sen}\phi i + \cos\phi j\right)\frac{d\phi}{ds}$$

Como T . N = 0, por lo tanto N es un vector unitario perpendicular a T y apunta al lado cóncavo de la curva.

Expresión de la aceleración vectorial en términos de T y N

Esto es: *"Descomponer* **a** *en sus componentes tangencial y normal a la curva".* Entonces el vector velocidad satisface $\nu = |\nu|\, T = \frac{ds}{dt} * T$

Se sabe que el módulo de la velocidad es la rapidez y si derivamos la función vectorial ν(t) obtenemos la aceleración la cual viene a ser la segunda derivada de la función original.

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}T + \frac{ds}{dt}\frac{dT}{dt}$; $a = \frac{d^2s}{dt^2}T + \frac{ds}{dt}\frac{dT}{dt}\frac{ds}{dt}$. Entonces $\boxed{a = \frac{d^2s}{dt^2}T + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa . N}$

Este resultado se ilustra en la figura 1.2.17

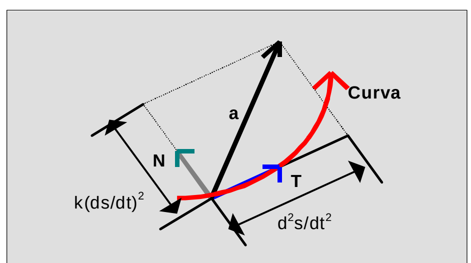


Fig 1.2.17

Expresemos **a** en la forma $a = a_T T + a_N N$ siendo sus componentes

Componente tangencial $\rightarrow a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\upsilon . a}{\lvert\upsilon\rvert}$	**Componente normal** $\rightarrow a_N = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \kappa\,\lvert\upsilon\rvert^2$

Las componentes tangencial y normal de la aceleración son útiles para el estudio de las fuerzas que actúan sobre un objeto en movimiento que recorre una curva C.

La componente normal $a_N = \kappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ depende solamente de la rapidez de P y de la curvatura de C . Si la rapidez o la curvatura son grandes, también lo es la componente normal de la aceleración(siempre y cuando la otra no sea muy pequeña). Para calcular $\mathbf{a_N}$, observamos que hay que calcular κ, pero, esto puede evitarse cuando se advierte que T y N son perpendiculares, y por lo tanto

$$\boxed{|a|^2 = a^2{}_T * a^2{}_N}$$

Ejemplo#1

Calcule los componentes normal y tangencial de la aceleración sin encontrar la curvatura para el movimiento dado por $r = t^2 i + \frac{1}{3} t^3 j$ para $t \geq 0$.

Solución

$\nu = 2ti + t^2 j$, $a = 2i + 2tj$

$$|\nu| = \sqrt{4t^2 + t^4} = \sqrt{t^2(4+t^2)} = t\sqrt{4+t^2}$$

$$a_T = \frac{\nu.a}{|v|} = \frac{(2t+t^2)(2+2t)}{t\sqrt{4+t^2}} = \frac{4t+2t^3}{t\sqrt{4+t^2}} = \frac{t(4+2t^2)}{t\sqrt{4+t^2}} = \frac{4+2t^2}{\sqrt{4+t^2}}$$

$$a^2{}_N = |a|^2 - a^2{}_T = \left(\sqrt{4+4t^2}\right)^2 - \frac{(4+2t^2)^2}{\left(\sqrt{4+t^2}\right)^2} = 4 + 4t^2 - \frac{16+16t^2+4t^4}{4+t^2} = \frac{4t^2}{4+t^2}$$

$$a_N = \sqrt{\frac{4t^2}{4+t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{4+t^2}}$$

Ejemplo#2

Un tren que se mueve a lo largo de una vía recta con rapidez constante ν, por lo que $\mathbf{a_T} = 0 = a_N$ (debido a que en una recta $\kappa = 0$). Suponer que a un t = 0, el tren entra a una curva. De acuerdo con la ley de Newton, la fuerza es F = m * a.

Solución

La fuerza sobre el carro de masa es : $F = ma = m\frac{d^2s}{dt^2}T + m\kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 N$.

El conductor, de masa m no experimenta una fuerza. El conductor debe disminuir su velocidad para empezar a tomar una curva muy pronunciada.

Ejemplo#3

Una partícula se mueve conforma a las ecuaciones paramétricas $x = \frac{3}{2}t^2$, $y = \frac{4}{3}t^3$. Encuentra las componentes Normal y Tangencial de su vector aceleración, cuando t = 1, utilizando la fórmula que contiene a κ.

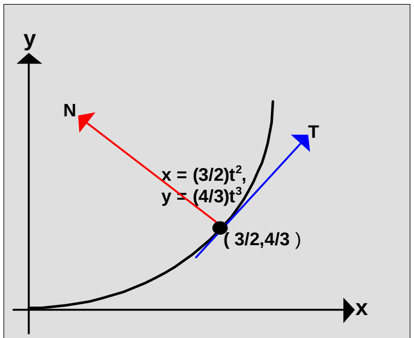


Fig 1.2.18

Solución

La partícula tiene como vector de posición $r = \frac{3}{2}t^2 i + \frac{4}{3}t^3 j$

$\nu = 3ti + 4t^2 i$; $|\upsilon| = \sqrt{9t^2 + 16t^4}$; $a = 3i + 8tj$

$$a_T = \frac{\nu * a}{|\nu|} = \frac{(3t + 4t^2)(3 + 8t)}{\sqrt{9t^2 + 16t^4}} = \frac{9t + 32t^3}{\sqrt{9t^2 + 16t^4}}$$. Evaluando en t = 1 obtenemos

$|\nu| = \sqrt{9(1)^2 + 16(1)^4} = 5$; $a_T = \frac{9(1) + 32(1)^3}{\sqrt{9(1)^2 + 16(1)^4}} = \frac{41}{5}$

Derivando las ecuaciones para hacer el cálculo de la curvatura y evaluando en t =1.

$x' = 3t$; $x'' = 3$; $y' = 4t^2$; $y'' = 8t$

$$\kappa = \frac{|(x'y'' - y'x'')|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{(3t*8t) - (4t^2 * 3)}{\left[(3t)^2 + (4t^2)^2\right]^{3/2}} = \frac{|(3*8) - (4*3)|}{[9 + 16]^{3/2}} = \frac{12}{125} = 0.096$$

$$a_N = \kappa * |\nu|^2 = \frac{12}{125} * 5^2 = \frac{12}{5} = 2.4$$

PROGRAMACIÓN

Programa para cálculos de las componentes normal y tangencial de la aceleración, se piden como datos de entrada las ecuaciones en x y y , el valor del tiempo con el que desea evaluar y la cantidad de ecuaciones.

CompNyT[Ex_,Ey_,T1_,Ces_]:=Module[{Vp,Vel,Acel,R,Rap,V1,V2,A1,A2,AT,

```
             Vr,Atan,Dx,Dxx,Dy,Dyy,Den,Num,N1,Curv,AN},
   Print["Salida del programa"];
   If[Ces==2,
     Vp=Ex+Ey;
     Print[" ** Las funciones son vectoriales(i,j) ** "];
     Print[StringForm["Vector de posición Vp(t)=``",Vp]];
     Print[" "];
     Vel=D[Vp,T];
     Acel=D[Vel,T];
     V1=Part[Vel,1];
     V2=Part[Vel,2];
     A1=Part[Acel,1];
     A2=Part[Acel,2];
     R=V1^2+V2^2;
     Rap=Simplify[Sqrt[R]];
     Print[StringForm["Velocidad V(t)=``",Vel]];
     Print[StringForm["Aceleración a(t)=``",Acel]];
     Print[StringForm["Rapidez=``",Rap]];
     Print[" "];
     Print["* Componente  tangencial y normal de la aceleración *"];
     AT=Simplify[((V1*A1)+(V2*A2))/Rap];
     Print[StringForm["Aceleración Tangencial AT=``",AT]];
     Print[" "];
     Print["* Evaluando en t=1 tenemos *"];
     Vr=Rap/.T->T1;
     Atan=AT/.T->T1;
     Print[StringForm["Valor de la Rapidez R=``",Vr]];
     Print[StringForm["Aceleración Tangencial Atan=``",Atan]];
     Print["* Cálculo de la curvatura *"];
     Dx=D[Ex,T];
     Dy=D[Ey,T];
     Dxx=D[Dx,T];
     Dyy=D[Dy,T];
     N1=(Dx*Dyy)-(Dxx*Dy);
     Num=Sqrt[N1]^2/.T->T1//N;
     Den=N[Sqrt[((Dx^2)+(Dy^2))^3]/.T->T1,3];
     If[(Den!=0),
       Curv=Num/Den;
          Print[StringForm["Curvatura K = ``",Curv]],
     Print["Error división entre cero"];
     ];
     Print[" "];
     Print["* Componente normal de la aceleración *"];
     AN=Curv*Vr^2;
     Print[StringForm["Aceleración Normal AN=``",AN]],
   Print["Error el número de ecuaciones no es el correcto"];
   ];
]
CompNyT[(3/2)T^2,(4/3)T^3,1,2]
```

Salida del programa

** Las funciones son vectoriales(i,j) **

Vector de posición Vp(t)=(3/2)T^2 + (4/3)T^3

Velocidad V(t)=3 T + 4 T^2

Aceleración a(t)=3 + 8 T
Rapidez=Sqrt[9 T^2 + 16 T^4]

* Componente tangencial y normal de la aceleración *

Aceleración Tangencial AT= (9 T + 32 T^ 3) / (Sqrt[9 T^2 + 16 T^4])

* Evaluando en t=1 tenemos *
Valor de la Rapidez R=5

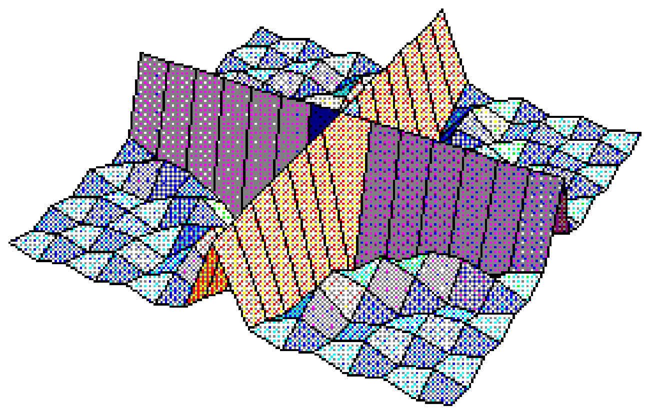
Aceleración Tangencial Atan=(41/5)

* Cálculo de la curvatura *
Curvatura K = 0.096

Aceleración Normal AN=2.4

Primera Unidad

Vectores
y
Curvas
Planas



Problemas y Ejercicios

Problemas y Ejercicios de las sección 1.1

♦ **1.1.1 Movimiento Lineal**

1) S es la función de una partícula que se mueve en una recta horizontal. Determine la posición, la velocidad, rapidez y la aceleración de la partícula durante el intervalo de tiempo indicado y haga su gráfica. Para estos ejercicios haga el desarrollo manual y de realice el análisis sobre l a posición donde se encuentra la partícula, si está ubicada a la izquierda o a la derecha del punto O y que significa esto, luego compruebe en el segundo programa presentado sobre movimiento lineal los resultados para saber si son los requeridos.

a) $s(t) = 4t^2 - 6t + 1$ $\frac{1}{2} \le t \le 3$; b) $s(t) = t^2 - 4t - 2$ $-1 \le t \le 5$
c) $s(t) = 3t^4 - 8t^3$ $-1 \le t \le 3$; d) $s(t) = 3t^2 - 12t + 1$ $0 \le t \le 5$
e) $s(t) = t^3 - 9t + 1$ $-3 \le t \le 3$; f) $s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$ $2 \le t \le 9$

2) La altura (pies) de un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba, desde el nivel del suelo, está dado por : $s(t) = -16t^2 + 48t$.

a) Determinar el intervalo de tiempo cuando $\nu > 0$.
b) Hallar la altura máxima alcanzada por el proyectil.
c) Implemente un programa modelo para este ejercicio usando el Lenguaje Matemática.

3) Hallar la velocidad media de la función dada en el intervalo que se indica, estos ejercicios resuélvalos primero manualmente luego compruebe su respuesta en el primer programa del movimiento lineal.

a) $s(t) = 2t + 7$, $1 \le t \le 2$; b) $s(t) = 3t - 1$, $0 \le t \le 1/3$
c) $s(t) = 1 / (t+1)$, $0 \le t \le 3$; d) $s(t) = t^2 - 3$, $2 \le t \le 2.1$
e) $s(t) = t^2 - 6t - 1$, $-1 \le t \le 3$

4) Un automóvil viaja a 100pies/segs, cuando de improviso el conductor aplica los frenos (s = 0, t = 0) la función de posición del automóvil es : $s(t) = 100t - 5t^2$ **.**

a) Cuánto tiempo y a que distancia patina el automóvil antes de detenerse?
b) Desarrolle una función para resolver este ejercicio utilizando el software Matemática.

Problemas y Ejercicios de las sección 1.1.2 y 1.1.3

- **1.1.2 Movimiento circular**
- **1.1.3 Combinación de movimiento lineal y circular**

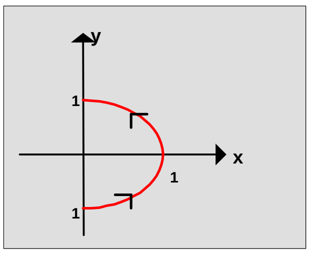
1) Demostrar que las ecuaciones paramétricas de los ejercicios describen el movimiento de un punto en (x,y). Haga un análisis sobre la dirección del movimiento (contra las manecillas del reloj o viceversa).

a) $x = 5\cos t$, $y = 5\operatorname{sen} t$ $0 \le t \le 2\pi$; b) $x = -5\cos t$, $y = 5\operatorname{sen} t$ $0 \le t \le 2\pi$
c) $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ $0 \le t \le 2\pi$

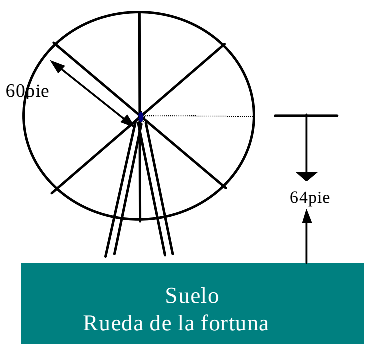
2) Demuestre que cada una de los siguientes pares de ecuaciones paramétricas tienen la

misma gráfica, que es el semicírculo de la figura mostrada. Diseñe las graficas de cada
ejercicio usando comandos del software Mathematica.

a) $x = \sqrt{1-t^2}$, $y = t$, $-1 \le t \le 1$
b) $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $\pi/2 \le t \le \pi/2$
c) $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $-1 \le t \le 1$



3) La rueda de la fortuna que se muestra en la siguiente figura da una vuelta cada dos minutos.
Con qué rapidez se eleva una pasajera en el instante en que se encuentra a 94 pie arriba del suelo ? Cuál es la velocidad horizontal en el mismo instante.



Problemas y Ejercicios de las sección 1.1.4
♦ 1.1.4 Descripción de curvas en forma parametrica

1) Las ecuaciones paramétricas de un punto que se mueve en el plano son : $x = 3\cos t$, $y = 2\operatorname{sen} t$ donde t representa el tiempo. Desarrolle una gráfica de la trayectoria de P usando los comandos de Mathematica.

2) Elimine el parámetro para determinar la gráfica de la curva paramétrica y grafiquelas Utilizando los comandos del Lenguaje Mathematica. Compruebe sus resultados en el programa. Elabore un programa que acepte diferentes ecuaciones y presentar los resultados.

a) $x = t + 1$, $y = 2t^2 - 4t + 1$; b) $x = t^2$, $y = t^3$
c) $x = t + 1$, $y = 2t^2 - t - 1$; d) $x = 5\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$

e) $x = t$, $y = \sqrt{t^2 - 1}$

3) Dibuje las curvas asignando valores a los parámetros.

a) $x = 2t$, $y = 3t$, t en los Reales; b) $x = 3\operatorname{sen}t$, $y = 5\cos t$, $0 \le t \le \pi$
c) $x = t - 1$, $y = \sqrt{t}$, $0 \le t \le 4$; d) $x = t^2$, $y = t^3$, $-1 \le t \le 2$

4) Trazar la representación de la curva C y encuentre una ecuación rectangular cuya gráfica contenga a los puntos de C.

a) $x = t - 2$, $y = 2t + 3$, $0 \le t \le 5$; b) $x = t^2 + 1$, $y = t^2 - 1$, $-2 \le t \le 2$
c) $x = 4t^2 - 5$, $y = 2t + 3$, t en los reales ; d) $x = 2\operatorname{sen}t$, $y = 3\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$
e) $x = e^t$, $y = e^{-2t}$, t en los reales

Problemas y Ejercicios de las sección 1.1.5

♦ 1.1.5 Longitud de arco de una curva plana

1) Encuentra el área bajo un arco de una cicloide. También encuentra la longitud de ese arco $x = a(t - \operatorname{sen}t)$, $y = a(1 - \cos t)$; $0 \le t \le 2$.

2) Encuentre la longitud de arco de las curvas en los ejercicios siguientes utilice la fórmula indicada, una vez que los haya desarrollado manualmente, compruébelos en el programa de la longitud de arco.

a) $y = x^{3/2}$ $1 \le t \le 4$ y $1 \le t \le 8$; b) $y = 2x^{1/2}$ $1/3 \le x \le 7$
c) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$ $1 \le x \le 8$; d) $x = \frac{y^4}{16} + \frac{1}{2}y^2$ $-2 \le y \le -1$
e) $x = t^3$, $y = 2t^2$ $0 \le t \le 1$; f) $x = \cos^3 t$ $y = \operatorname{sen}^3 t$; $0 \le t \le \pi/2$
g) $x = (½)\, t^2 + t$, $y = (½)\, t^2 - t$ $0 \le t \le 1$; h) $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen}t$; $0 \le t \le \pi/2$
i) $x = t^3$, $y = t^2$ $0 \le x \le 4$

3) Encuentre la longitud de arco del segmento de recta que va de (0, 1) a (5,13). Implemente un programa que resuelva ejercicios de este tipo.

Problemas y Ejercicios de las sección 1.2.1

♦ 1.2.1 Cálculo para funciones vectoriales(Limite y Derivación)

Compruebe los resultados de los ejercicios sobre límites con los comandos del Mathematica, pero antes tienes que hacer el desarrollo manual.

1) Encuentre los límites indicados o establezca que no existen.

a) $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^4 - x^3 - 2x^2 + 1}{3x^2 - 5x + 7}\right)$; b) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^2 + 2x - 24}{x - 4}\right)$

c) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 4x - 5}\right)$; d) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{t^2 + 7t + 7}{t^2 - 4t - 5}\right)$

2) Límites unilaterales

Determine los siguientes límites, si es que existen $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x,y)$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x,y)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ para las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = \dfrac{|x|}{x}$; b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2+1 & \to \quad x<1 \\ 1 & \to \quad x=1 \\ x+1 & \to \quad x>1 \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} 3x-1 & \to \quad x\le 1 \\ 3-x & \to \quad x>1 \end{cases}$; d) $f(x,y) = \begin{cases} x^3 & \to \quad x\le 1 \\ 3-x & \to \quad x>1 \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} |x-1| & \to \quad x\ne 1 \\ 1 & \to \quad x>1 \end{cases}$; f) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{|x-4|}{x-4}$

g) $\lim\limits_{x\to 5^-} \sqrt{5-x}$; h) $\lim\limits_{x\to 5^+} \sqrt{x^2-25}+3$

3) Utilizando la definición de límite resuelva los siguientes ejercicios dando una prueba formal de cada límite (Ver ejemplo 2).

a) $\lim\limits_{x\to 3} (5x-11) = 4$; b) $\lim\limits_{x\to 5} \left(\dfrac{x^2-25}{x-5}\right) = 10$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{x^2+5-6}{x-1}\right) = -5$; d) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x} = 2$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2x^3+3x^2-2x-3}{x^2-1}\right) = 5$; f) $\lim\limits_{x\to 3} (x^2-2x) = 3$

4) Encontrar cada uno de los límites aplicando el teorema. Justifique cada uno de los pasos

Además simule una función para resolver ejercicios aplicando este teorema.

a) $\lim\limits_{x\to 3} (7x-4)$; b) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2+1)(3x-1)$; c) $\left(\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x}{3x^3-16}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{3x-5}$; e) $\lim\limits_{t\to -2} (2t^3+15)^{13}$; f) $\lim\limits_{y\to 2} (4y^3+8y)^{1/3}$

5) Encuentre el límite requerido o indique que no existen para los siguientes ejercicios de funciones vectoriales, compruébelo con los comandos del software Mathematica.

a) $\lim\limits_{t\to 1} (2\,\mathrm{sen}\,t)i + (\cos t)j$; b) $\lim\limits_{x\to 1} ((3t)i - (t^2)j)$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{t-2}{t^2-4}\right)i + \left(\dfrac{t^2+t-6}{t-2}\right)j$; d) $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{\mathrm{sen}\,t}{t}\right)i + \left(\dfrac{t}{e^t}\right)j$

6) Encuentre Dt r(t) y D^2 r(t) para la siguientes funciones y compruebe con los comandos de Mathematica para verificar las derivadas.

a) $r(t) = (2t+3)^2\, i - 2^{2t}\, j$; b) $r(t) = (2+\mathrm{sen}\,t)\, i + \cos t\, j$

c) $r(t) = (\ln t)\, i - \left(\frac{1}{t}\right) j$; d) $r(t) = (t^2 - 3)i + (2t + 1)j$

e) $r(t) = \left(\frac{t-1}{t+1}\right) i + \left(\frac{t-2}{t}\right) j$; f) $r(t) = e^{2t} i + (\ln t) j$

g) $r(t) = \sqrt{2t+1}\, i + (t+1)^2 j$; h) $r(t) = e^{2t} i + e^{-t} j$

7) Encuentre D_t[r(t) . r `(t)]. Si $r(t) = e^{2t} i + \ln(t^3) j$

8) Encuentre D_t[h(t) . r(t)] y compruébelos en el programa sobre derivadas.

a) $r(t) = \sqrt{t-1}\, i + \ln\left(2t^2\right) j$ y $h(t) = 2^{-3t}$
b) r(t) = 3ti - j y h(t) = 2i - 5tj
c) r(t) = icost + jsent y h(t) = isent - icost
d) $r(t) = t\, i + t^2 j$ y $h(t) = t^2 i - t\, j$
e) $r(t) = t^2 i + (t - 1) j$ y h(t) = isent + icost

9) Aplique la propiedad de la suma a la siguiente función D_t[r(t) + q(t)].
Si $r(t) = t^2 i + (t - 1) j$ y q(t) = isent + icost

10) Diseñe un programa que resuelva cualquier función y se aplique cualquiera de las propiedades de las derivadas, utilizando el software Mathematica.

Problemas y Ejercicios de las sección 1.2.2
♦ 1.2.2 Movimiento curvilíneo

1) Se da la posición de una partícula móvil en el momento t mediante r(t). Encuentre la velocidad y aceleración vectorial (ν,a) y la rapidez en el momento $t = t_1$. Dibuje la parte de la gráfica r(t) que contenga la posición de la partícula cuando $t = t_1$ (para ello utilice comandos del Mathematica) y desarrolle $\nu(t_1)$ y $a(t_1)$ con sus puntos iniciales en P.

a) $r(t) = e^{-t} i + e^{t} j$ $t_1 = 1$; b) $r(t) = 2\cos t\, i - 3\mathrm{sen}^2 t\, j$ $t_1 = \pi/3$
c) $r(t) = 3t^2 i + t^3 j$ $t_1 = 2$; d) $r(t) = (3t^2 - 1)\, i + t\, j$ $t_1 = 1/2$
e) $r(t) = e^{-1/2} i + e^{-t} j$ $t_1 = 2$; f) $r(t) = \frac{2}{t} + \frac{3}{t+1}$; $t_1 = 2$

2) Un punto se mueve a lo largo del círculo $x^2 + y^2 = 25$ con una rapidez angular constante de 6 radianes/segs, comenzando en (5, 0). Encuentre la expresión de r(t), ν(t), |ν(t)|, a(t) .

Problemas y Ejercicios de las sección 1.2.3
♦ 1.2.3 Curvatura

1) Encuentre la curvatura de la curva dada en el punto que se indica de los siguientes ejercicios, utilice la fórmula adecuada de la curvatura. Desarrolle un programa que al

introducir una función cualquiera de la solución correcta, impleméntelo de tal forma que resuelva ejercicios donde se aplique cualquiera de las fórmulas de curvatura.

a) $y = x^3$ P = (0 ,0) ; b) y = cosx P = (0 ,1)
c) $y = 2 - x^3$ P= (1,1) ; d) y = cos2x P = (0,1)
e) x = 5cost , y = 4sent P = (π/4) ; f) $x = t - t^2$, $y = 1 - t^3$ P = (0,1)
g) x = 2cost , y = 2sent P = (π/4) ; h) x = t - 1, $y = \sqrt{t}$ P = (3,2)

2) Para las curvas y el punto P dados, calcule la curvatura, radio de curvatura y centro de curvatura. Dibuje la curva y la circunferencia de curvatura en P.

a) y = senx P = (π/2,1) ; b) $y = x^2$ P = (1,1)

c) $y = (x + 4)^2$ P = (-3 ,-1) ; d) $y = e^x - 1$ P = (0 ,1)

3) Determine el vector unitario tangente T, la curvatura, y el radio de curvatura de la curva determinada por r(t). Trazar la gráfica de la curva y representar el vector T correspondiente al valor de t dado y el círculo de curvatura en t = 1. Estos resultados compruébelos en un programa que usted desarrollará para resolver ejercicios de este tipo.

a) $r(t) = t\,i + \frac{1}{2}t^2\,j$ t = 1 ; b) $r(t) = t^3\,i + 3t\,j$ t = 1
c) $r(t) = 4t^2\,i + 4t\,j$ t = 1/2 ; d) r(t) = 4cost i + 3sent j t = π/4
e) $r(t) = 2ti + t^2\,j$ t = 1

Problemas y Ejercicios de las sección 1.2.4
♦ 1.2.4 Componente tangencial y normal de la aceleración

1) Una partícula se mueve sobre la parábola $y = x^2$ de manera que la componente horizontal de su velocidad es siempre 3. Calcule las componentes normal y tangencial de la aceleración en el punto (1,1)?.

2) Dado el vector de posición de una partícula móvil. Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración.

a) $r(t) = (2t + 1)i + (3t^2 - 1)j$; b) r(t) = i tcost + j tsent

3) Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en t, evaluando en t = t1. Verifique los resultados de los ejercicios en el programa de componentes tangencial y normal de la aceleración.

a) $r(t) = t^2 i + tj$, t = 1 ; b) $r(t) = (2t + 1)i + (t^2 - 2)j$, t = -1.
c) r(t) = acost i + asent j, t = π/6 ; d) $r(t) = (1 - t^2)i + (2t)j$, [0,2]

4) Calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración para la hélice circular r(t) = bcost + bsent + ctk, b > 0. Utilice la fórmula donde no se utilice la curvatura para calcular la aceleración normal. Desarrolle una función para resolver ejercicios de este tipo con ayuda del software Mathematica.

Proyectos de la Primera Unidad

Proyecto#1

Una Partícula se mueve a lo largo de la curva que tiene las ecuaciones paramétricas dadas, donde t seg es el tiempo. Encontrar:

a) El vector velocidad $v(t)$
b) El vector Aceleración $A(t)$
c) La rapidez en $t = t1$
d) Trazar la trayectoria de la partícula y las representaciones del vector velocidad y el vector aceleración en $t = t1$.

1) $x = t^2 + 4$, $y = t - 2$; $t1 = 3$
2) $x = 2 / t$, $y = (-\frac{1}{4})t$; $t1 = 4$

Proyecto#2

En los movimientos lineal y curvilíneo investigue todo lo relacionado con el movimiento de proyectiles y diseñe los respectivos programas que resuelvan ejercicios modelos de ambos movimientos

2

Segunda Unidad

Funciones de dos y tres variables

Contenido

♦ 2.1 Gráfica de funciones de dos y tres variables

Las funciones de variables múltiples tienen varias variables independientes dependiendo del caso, ya sean de dos o tres variables. El estudio de diferentes fenómenos nos obliga a utilizar las funciones de dos variables independientes, citemos algunos ejemplos:

- El área de un triángulo depende de dos cantidades las cuales son la base y la altura.
- Un fabricante puede saber que el costo C, para producir un artículo determinado depende de: Material, mano de obra, el equipo, mantenimiento (Costo) y otros gastos, en este caso
  para producir el artículo tenemos cinco variables.

Una función de dos variables puede expresarse por medio de una tabla o analíticamente a través de una fórmula, la fórmula permite formar la tabla de valores que toma la función para cada par de valores de las variables independientes. Las funciones de dos variables se pueden graficar directamente, no así las funciones de mayor número de variables independientes.

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales, una función f de dos variables, definidas en el dominio D del plano, es una correspondencia que asocia a cada par (x,y) en D un único número real que se denota por f(x,y).

Una función de tres variables, definida en el dominio D del espacio, es una correspondencia que se asocia a cada punto(x,y,z) en D un único número real que se denota por f(x,y,z).

A menudo se utiliza una expresión en x y y para especificar f(x,y) y se supone que el dominio es el conjunto de todos los pares (x,y) para los que la expresión tiene sentido.

Definición de funciones de dos variables :

Una función de dos variables es una regla de correspondencia que asigna a cada pareja ordenada de números reales (x,y) de un subconjunto del plano, uno y sólo un valor real ***z*** es el conjunto ***R*** de números reales.

Dominio : Es el conjunto de parejas ordenadas (x,y) de la función z.
Rango : Es el conjunto de valores correspondientes a **z**.

Una función de dos variables usualmente se escribe como: **z = f(x,y).** Esta interpretación se puede apreciar en la figura 2.1.1. Puede notarse en el diagrama que a cada par (x,y) que pertenece al dominio, f le hace corresponder un valor **z** al rango.

Se entiende por gráfica de una función de dos variables, la gráfica de la ecuación z = f(x,y). Por lo general, esta gráfica será una superficie, ver figura 2.1.2 dado que a cada x,y del dominio le corresponde un solo valor de **z**, cada línea vertical corta a la superficie a lo más en un punto. La gráfica de una función z = f(x,y) es una superficie en el espacio tridimensional.

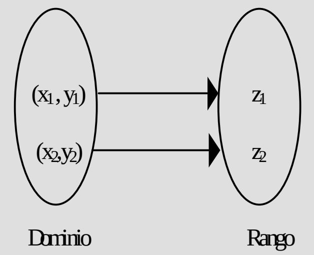


Fig 2.1.1

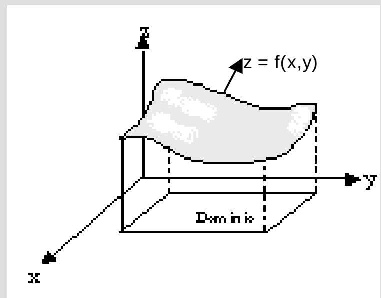


Fig 2.1.2

Ejemplo#1

Dada la siguiente función $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Encontrar el dominio, el rango de f y trazar la gráfica.

Solución

En virtud de que los valores de **z** deben ser reales, la cantidad subradical debe ser positiva, o sea, debe cumplirse la condición $25 - x^2 - y^2 \geq 0$.

El dominio de la función es el conjunto de todas las parejas ordenadas (x,y) que satisfacen $25 - x^2 - y^2 \geq 0$. Este es el conjunto de todos los puntos en el plano **xy** en el círculo $x^2 + y^2 = 25$ y en la región interior acotada por el círculo.

Ya que $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ vemos que el rango está definido por $\mathbf{0 \leq z \leq 5}$, por lo tanto el rango de la función es el conjunto de todos los números reales en el intervalo cerrado [0,5]. De la ecuación $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ obtenemos los puntos para hacer la gráfica de la función, ver figura 2.1.3. Haciendo $z = x = 0$ $y^2 = 5 \therefore y = \pm 5$; haciendo $z = y = 0$ $x^2 = 5 \therefore x = \pm 5$.

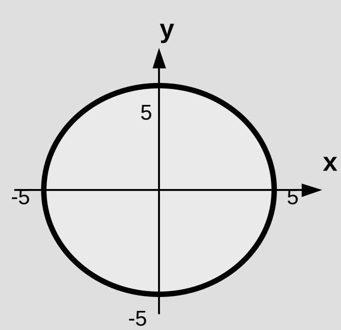


Fig 3.1.3

Otro método gráfico útil para describir una función f de dos variables consiste en trazar en el plano xy las gráficas de las ecuaciones f(x,y) = k para varios valores de k. Las graficas que se obtienen de esta manera son las curvas de nivel de la función f.

Ejemplo#2

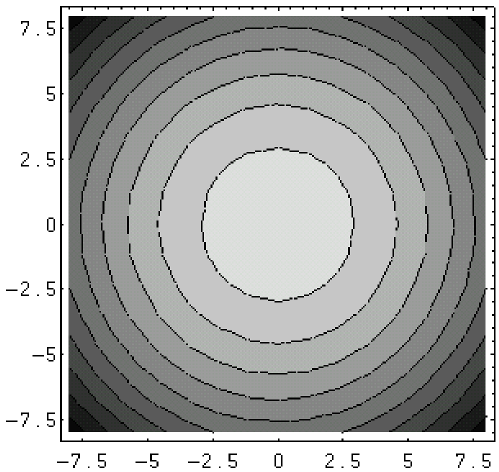
Trazar las curvas de nivel de la función $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ con $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Solución

Las curvas de nivel son las gráficas de las ecuaciones de la forma f(x,y) = k, es decir $9 - x^2 - y^2 = k : x^2 + y^2 = 9 - k$ en el plano xy.

Estas son circunferencias cuando $0 \leq k \leq 9$. La grafica muestra las curvas de nivel para
K = 0, 2, 4, 6, 8.

El comando para dibujar las curvas de nivel es : **ContourPlot[9-(x^2)-(y^2),{x,-8,8},{y,-8,8}]**



Superficies en tres Dimensiones

La gráfica de una ecuación de tres variables normalmente es una superficie. Para esquematizar una superficie se hace uso frecuente de las trazas. La traza(secciones transversales) de una superficie en el plano es la línea de intersección de la superficie con el plano. Las trazas son importantes en los planos coordenadas. Estas tres líneas se llaman:

Traza xy; Traza xz; Traza yz;

Sus ecuaciones se pueden encontrar a partir de la superficie, tomando z = 0 , y = 0 y x = 0 respectivamente. Es mas fácil visualizar encontrando las intersecciones de las superficies con los planos bien seleccionados.

Superficies Cuadráticas

Si una superficie es la gráfica en tres dimensiones de una ecuación de 2do grado, se llama superficie cuadrática. Las Secciones planas de una superficie cuadrática son las cónicas. La ecuación general de 2do grado tiene la forma

$$AX^2 + BX^2 + CZ^2 + DXY + EXZ + FYZ + GX + HY + IZ + J = 0$$

Es posible demostrar que cualquiera de dichas ecuaciones puede ser reducida, mediante rotaciones y traslaciones de los ejes coordenados, por una de las formas

$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + J = 0$ Ec.1 o $AX^2 + BY^2 + IZ = 0$ Ec.2

Las superficies cuadráticas representadas por la ecuación 1 son simétricas con respecto a los planos coordenados y con respecto al origen, se llaman cuadráticas centrales.

Tipos generales de superficies cuadráticas

Elipsoides, Hiperboloides, Paraboloides, los nombres provienen del hecho de que las trazas en los planos paralelos a los planos coordenados son elipses, hipérbolas y parábolas

Elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, Hiperboloide de un hoja $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, Paraboloide elíptico $z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$

Paraboloide hiperbólico $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$, Cono elíptico $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

La gráfica de $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$ en la que a, b, c son números reales positivos es un elipsoide.

Las trazas en los tres planos coordenados son las siguientes

Traza	Ecuación de la traza	Gráfica
Traza xy	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Elipse
Traza xy	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Elipse
Traza xy	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Elipse

Ejemplo#3

Dada la siguiente función $z = x^2 + y^2$. Trazar su gráfica.

Solución

La gráfica de f es la superficie que tiene la ecuación $z = x^2 + y^2$. La traza de la superficie en el plano **xy** se encuentra usando la ecuación $z = 0$ y obtenemos $x^2 + y^2 = 0$ que es el origen.

Las trazas en los planos **xz** y **yz** se encuentra usando las ecuaciones $y = 0$ y $z = 0$ respectivamente con la ecuación $z = x^2 + y^2$ obtenemos las parábolas $z = x^2$, $z = y^2$.

La sección transversal de la superficie en un plano $z = k$, paralelo al plano **xy**, es un círculo con centro en el eje **z** y radio $\sqrt{k}$. Dando valores a x y y obtenemos los siguientes valores para z.

Tabla de valores 2.1.1

x	y	z
0	0	0
1	1	1
2	2	4
3	3	9

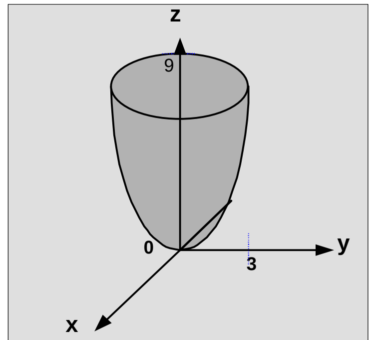


Fig 2.1.4

Cuadro resumen de algunas gráficas en tres dimensiones

Elipsoide

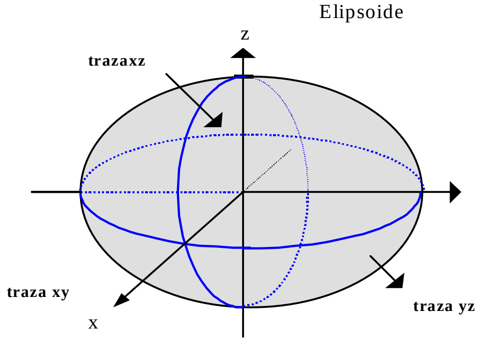


Fig 2.1. 5a

Paraboloide

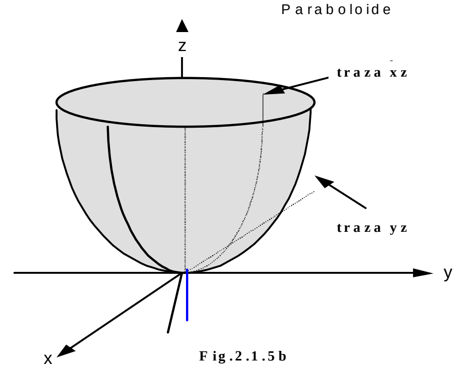


Fig.2.1.5b

Hiperboloide de dos hojas

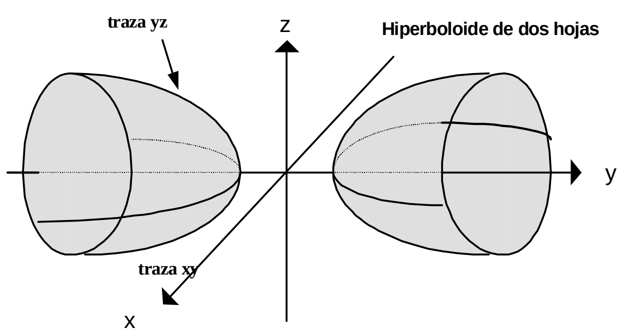


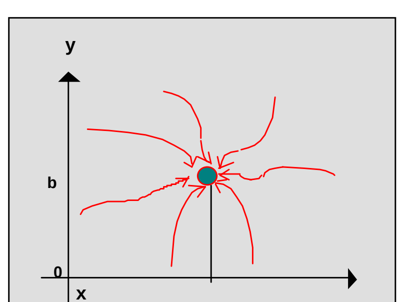
Fig.2.1.5c

♦ 2.2 Límites y continuidad

2.2.1 Límite

Sea f una función de dos variables y consideremos f(x,y) cuando (x,y) varía dentro del dominio D de f.

Significado intuitivo de límite



$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Este tiene el significado intuitivo usual . Los valores de f(x,y) se acercan más y más al número L cuando $(x,y) \to (a,b)$. El problema es que (x,y) puede acercarse a (a,b) de un número de formas diferentes, ver figura 2.2.1.

Lo que se quiere es una definición formal que de el mismo valor de L sin importar la trayectoria que sigue (x,y) en su aproximación a (a,b).

Definición formal de límite:

Decir que el $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ significa para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ correspondiente tal que $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$. Ver figura 2.2.2.

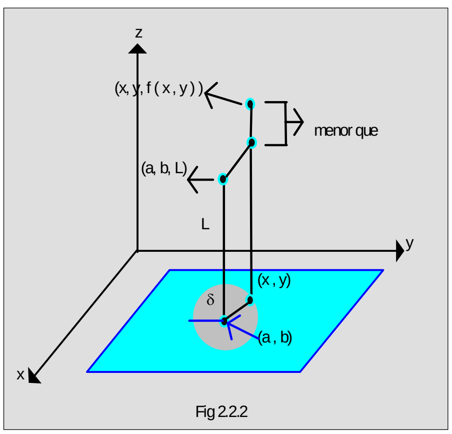


Fig 2.2.2

Explicación necesaria para interpretar $|(x,y) - (a,b)|$ **.**

Considérese a (x,y) y (a,b) como vectores . Entonces $|(x,y) - (a,b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ y los puntos que satisfacen $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta$ son los interiores al círculo de radio δ con excepción del centro (a,b), ver figura 2.2.3.

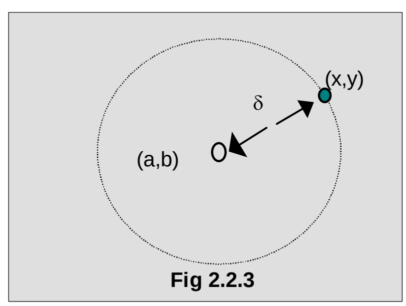


Fig 2.2.3

Advertencia de la definición

- La definición ignora la noción de trayectoria de aproximación a (a,b). Esto es que si trayectorias diferentes de aproximación conducen a valores diferentes de L, entonces el límite no existe.
- No tiene importancia el comportamiento (x,y) en (a,b); la función ni siquiera necesita estar definida en (a,b). Esto se deduce de la restricción $0 < |(x,y) - (a,b)| < \varepsilon$.

- La definición puede extenderse a funciones de tres variables (o más). Basta con sustituir (x,y) y (a,b) por (x,y,z) y (a,b,c) donde quiera que se presenten.

Para los límites de funciones de dos variables todos los teoremas usuales de límites también son validos .

Si f y g son funciones de dos variables, entonces (f + g), (f * g), (f / g) se definen de la misma manera que las funciones de una variable.

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[f(x,y) + g(x,y) \right] = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left[\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \right] = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)} \;\to\; \text{si} \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) \neq 0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \sqrt{f(x,y)} = \sqrt{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)} \;\to \text{si} \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) > 0$$

Como en el caso de funciones de una variable los límites de polinomios y funciones racionales de dos variables pueden calcularse por sustitución, como ejemplo de esto tenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \left(x^2y + 3y \right) = (1^2)(2) + (3)(2) = 8$$

Ejemplo#1

Evaluar el siguiente límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-3)} x^3 - 4xy^2 + 5y - 7$

Solución

Como f(x,y) es un polinomio, podemos calcular el límite sustituyendo **x** por 2 y **y** por -3.

$$\lim_{(x,y)\to(2,-3)} x^3 - 4xy^2 + 5y - 7 = 2^3 - 4(2)(-3)^2 + 5(-3) - 7 = -86$$

Ejemplo#2

Evaluar el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,4)} \left[\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]$

Solución

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)} \left[\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,4)} \left(x^2 - y^2\right)}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,4)} x^2 - \lim_{(x,y)\to(3,4)} y^2}{\sqrt{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,4)} \left(x^2 + y^2\right)}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(3,4)} \left[\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] = \frac{9 - 16}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{-7}{5}$$

Para las funciones de dos variables es más complicado analizar los límites por que en un plano coordenado hay una infinidad de curvas diferentes o ***trayectorias*** a lo largo de las cuales (x,y) puede acercarse a (a,b). Si el límite de la definición formal existe, entonces f(x,y) tiende al límite independientemente de la trayectoria escogida. Esto ilustra la siguiente regla para el análisis de los límites.

Regla de las dos trayectorias:

Si dos trayectorias que llevan a un punto P(a,b) producen dos valores límites diferentes para f, entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ no existe.

Para resolver ejercicios de este tipo podemos aplicar dos métodos el de la parábola
$Y = kx^2$ donde $k \neq 0$ o el de la recta **$y = mx$** donde $m \neq 0$.

Ejemplo#3

Demostrar que el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)}$ no existe.

Solución

Si (x,y) tiende a (0,0) a lo largo del eje **x**, entonces la coordenada **y** siempre es cero y la expresión $(x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)$ se reduce a (x^2 / x^2) o a 1. Entonces el valor límite a lo largo de esta trayectoria es 1.

Si (x,y) tiende a (0,0) a lo largo del eje **y**, entonces la coordenada **x** siempre es cero y la expresión $(x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)$ se reduce a $(-y^2 / y^2)$ o a -1. Como podemos observar se obtienen dos valores diferentes, por la regla de las dos trayectorias, el límite no existe.

Es un hecho que pueden escogerse otras trayectorias que llegan al origen. Utilizando el método de la recta $(y = mx, x \neq 0)$, si (x,y) tiende a (0,0) a lo largo de la recta y = 2x, entonces

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 - (2x)^2}{x^2 + (2x)^2} = \frac{x^2 - 4x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{-3x^2}{5x^2} = \frac{-3}{5}$$

por lo tanto, el límite a lo largo de la recta y = 2x es (-3 / 5).

2.2.2 Continuidad

Al estudiar el límite de una función de varias variables hemos visto que la función no tiene que estar definida en (a,b), y aún cuando tomara un valor en dicho punto no tiene necesariamente que coincidir con el valor del límite.

Ahora veremos el caso particular de funciones que si están definidas en el punto (a,b) y que además toman el valor de L del límite en dicho punto. Estas son las llamadas ***"funciones continuas".*** La palabra ***Continuo :*** Es la descripción que sigue un proceso sin cambios.

A veces es conveniente pensar que las funciones que son continuas en todos los números de un intervalo son aquellas cuyas gráficas pueden trazarse sin levantar el lápiz del papel; es decir, las que no tienen interrupciones.

Continuidad en un punto

Se dice que f(x,y) es continua en un punto (a,b) si y solo si las siguientes tres condiciones se satisfacen.

1. Existe el límite de la función f y éste es un valor finito, es decir (f tiene un valor en (a,b)).
2. La función f está definida en (a,b), es decir, existe f(a,b) (f tiene un límite en (a,b)).
3. f(a,b) = L (el valor de f en (a,b) sea igual al límite en ese punto).

En síntesis se necesita que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Es conveniente señalar que la definición de continuidad exige el cumplimiento de estas tres condiciones y que el incumplimiento de cualquiera de ellas es suficiente para afirmar que una función no es continua, entonces se dice que la función es discontinua.

Una función puede estar definida en (a,b), tener límite finito en dicho punto , pero no cumplir la tercera condición , o sea , no coincidir el valor de la función en (a,b) con el valor del límite en dicho punto; pero el reciproco no es cierto, por lo que lo siguiente puede afirmarse.

- Una función puede tener límite en (a,b) y no ser continua en dicho punto.
- Una función es continua en (a,b), tiene necesariamente límite en (a,b) , y además $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

Propiedades de las operaciones con funciones continuas

f y g son funciones, k es una constante y n un número entero positivo.

Teorema:

Si f y g son continuas en C, también la serán k * f, f + g, f - g, f * g, f/g (siempre cuando g (c) $\neq 0$, f^n y $\sqrt[n]{f}$ (siempre que sea f(c) > 0 cuando n sea par).

Las funciones polinomiales de dos variables son continuas en toda su extensión, dado que son sumas y productos de funciones continuas.

Las funciones racionales de dos variables son cocientes de funciones polinomiales, y por lo tanto, son continuas siempre que el denominador no sea cero.

Teorema sobre composición de funciones:

Si una función g de dos variables es continua en (a,b) y una función f de una variable es continua en g(a,b) , entonces la función compuesta fog, definida por (fog)(x,y) = f(g(x,y))

Este teorema ayuda a verificar la continuidad de la composición de funciones de varias variables.

Ejemplo#1

Demuestre que $f(x,y) = \cos(x^3 - 4xy + y^2)$ es continua en todo punto del plano.

Solución

La función $g(x,y) = x^3 - 4xy + y^2$, es un polinomio, es continua en toda su extensión. También $f(t)=\cos t$ es continua en todo número t que pertenece a los reales. Concluimos por el teorema anterior que $f(x,y) = f(g(x,y))$ es continua para toda (x,y) del plano.

Continuidad sobre un conjunto

Decir que f(x,y) es continua sobre un conjunto **" S "** debería significar que f(x,y) es continua en cada punto del conjunto, y así es, pero hay algunas delicadezas relacionadas con esta afirmación que hay que aclarar.

Vocablos relativos a conjuntos en el plano y en el espacio

- Vecindad de radio δ en un punto P
  Es el conjunto de todos los puntos Q tales que $|Q - P| < \delta$.
- Vecindad en dos dimensiones
  Es el **interior** de un círculo, ver ilustración en la figura 2.2.4a.
- Vecindad de radio δ de tres dimensiones
  Es el **interior** de una esfera, ver ilustración en la figura 2.2.4b.

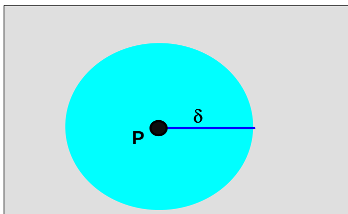


Fig 2.2.4a

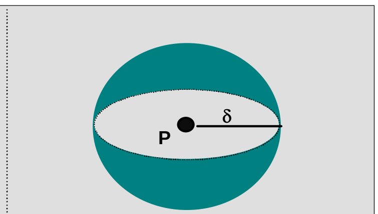


Fig2.2.4b

Un punto P es un **punto interior** de un conjunto **"S"** si existe una vecindad de P contenida en **"S"**. El conjunto de todos los puntos interiores de **"S"** es el interior de **"S"**. Por otro lado, P es un **punto frontera** de **"S"** si toda vecindad de P contiene puntos que pertenecen a **"S"** otros que no pertenecen.

- ***Punto frontera de "S" :*** Es el conjunto de todos los puntos frontera de **"S"**.
- ***Conjunto abierto :*** Si todos los puntos son interiores.
- ***Conjunto cerrado*** *:* Si contiene todos sus puntos frontera.

La ilustración de estos puntos la podemos observar en la figura 2.2.5.

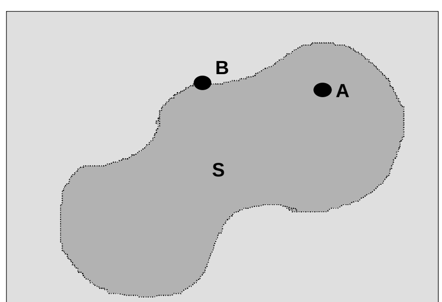


Fig 2.2.5

Si **"S"** es un conjunto abierto , decir que f es continua en **"S"** significa que f es continua en todo punto **"S"**. Por otra parte, si **"S"** contiene alguno o todos sus puntos frontera, debemos ser cuidadosos en dar la interpretación correcta a la continuidad en dichos puntos. Decir que f es continua en un punto frontera P de **"S"** significa que f(Q) debe aproximarse a f(P) cuando **Q** tiende a **P** a través de puntos de **"S"**.

Ejemplo#1

Analizar la continuidad**, sea** $f(x,y)=\begin{cases} 0 \text{ Si } x^2+y^2\le 1 \\ 4 \text{ en otro caso} \end{cases}$

Solución

Si **"S"** es el conjunto $\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$ es correcto decir que f(x,y) es continua sobre **"S"** y sería incorrecto decir que f(x,y) es continua en todo el plano, ver figura 2.2.6.

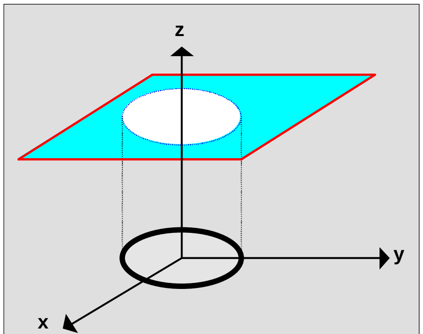


Fig 2.2.6

♦ 2.3 Derivadas parciales

El proceso de encontrar una derivada parcial se llama diferenciación parcial. Las derivadas parciales de funciones de dos variables se definen en forma análoga a las de una variable. La derivada f'(x,y) de una función de dos variables como

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

se puede interpretar de la siguiente forma:

Así, dada f(x,y), primero se incrementa una de las variables, digamos x, en una cantidad h, luego se divide entre h el incremento correspondiente f(x + h, y) - f(x, y) de f y finalmente, se hace tender h a cero. Esto nos lleva al concepto de derivada parcial f_x(x,y) de f respecto a **x**, para la variable **y** el proceso es similar.

Definición:

Sea **f** una función de dos variables (x, y). **"Las primeras derivadas parciales de f con respecto a x y a y"** son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \qquad f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\ .$$

En esta definición, x y y son fijas(arbitrarias) y h es la única variable. Razón por el cual se usa la notación de límites para funciones de una variable, en lugar de "$(x,y)\to(a,b)$". Para determinar f_x (x,y) se considera a **y** como una constante y se deriva f(x,y) con respecto a x. De forma análoga, para determinar f_y (x,y) la variable x es una constante y f(x,y) se deriva con respecto a y .

Ejemplo#1

Dada f(x,y) = $3x^2$ - 2xy + y^2 encontrar f_x f(x,y) y f_y f(x,y), en base a la definición y sustituir (3,-2) por (x,y) en la expresión.

Solución

Cálculo de f_x

$$f_x\, f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = f_x\, f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{(3(x+h)^2 - 2(x+h)y + y^2) - (3x^2 - 2xy + y^2)}{h}$$

$$f_x\, f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2 - 2xy - 2yh + y^2 - 3x^2 + 2xy - y^2)}{h}$$

$$f_x\, f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{(6xh + 3h^2 - 2yh)}{h} = \frac{6xh}{h} + \frac{3h^2}{h} - \frac{2yh}{h} = 6x + 3h - 2y$$

$f_x\, f(x,y) = 6x - 2y = 6(3) - 2(-2) = 18 + 4 = 22$

Cálculo de f_y

$$f_y\, f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h} = f_y\, f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{(3x^2 - 2x(y+h) + (y+h)^2 - 3x^2 + 2xy - y^2)}{h}$$

$$f_y\, f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{(3x^2 - 2xy - 2xh + y^2 + 2yh + h^2 - 3x^2 + 2xy - y^2)}{h}$$

$$f_y\, f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{-2xh + 2yh + h^2}{h} = \frac{-2xh}{h} + \frac{2yh}{h} + \frac{h^2}{h} = -2x + 2y + h$$

$f_y\, f(x,y) = -2x + 2y = -2(3) + 2(-2) = -6 - 4 = -10$

Interpretación física y geométrica

Considérese la superficie cuya ecuación es : $z = f(x,y)$. El plano $y = y_0$ corta esta superficie en la curva plana **QPR** ver figura 2.3.1, y el valor de $f_x\,(x_0,y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a esta curva en P $(x_0,y_0\,,f(x_0,y_0))$. Análogamente, el plano $x = x_0$ corta la superficie en la curva **LPM** ver figura 2.3.2, y $f_y\,(x_0,y_0)$ es la pendiente de la recta tangente a esta curva en P.

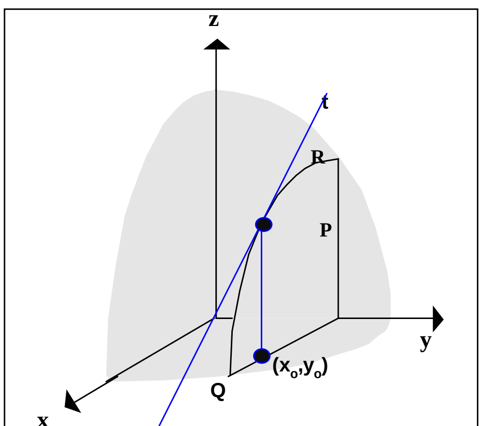


Fig 2.3.1

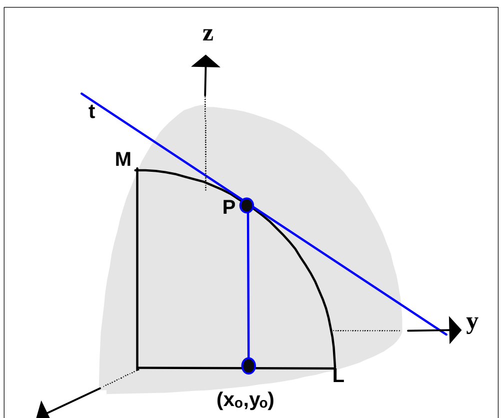


Fig 2.3.2

• 2.3.1 Notación y terminología

Derivadas parciales de primer orden

La palabra terminología significa ***“Como se leen las derivadas parciales de cualquier función“*** por ejemplo para leer $\frac{\partial f}{\partial x}$ o $\frac{\partial f}{\partial y}$, se menciona simplemente como “***la parcial de f respecto a x****, o bien respecto a y* “. El símbolo **“∂“** se llama signo de la derivada parcial.

En el cuadro siguiente se muestran algunas notaciones comunes para las derivadas parciales de primer orden.

Si w = f(x,y) entonces $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial w}{\partial x} = w_x, f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial w}{\partial y} = w_y$

Hay fórmulas de las derivadas parciales parecidas a las de funciones de una variable.
Si **u = f(x,y)** y **v = g(x,y)**, entonces la regla del producto y la del cociente para derivadas parciales son :

$\frac{\partial}{\partial x}(uv) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}$; Regla del producto ; $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{v^2}$; Regla del cociente

También se puede utilizar la notación de subíndices $(fg)_x = fg_x + gf_x$, $\left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{gf_x - fg_x}{g^2}$

$\frac{\partial}{\partial y}(U)^n = nU^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}$; La regla de la potencia, donde n es cualquier número real.

Ejemplo#1

Si $z = x^2 \operatorname{sen}(xy^2)$. Encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

Solución

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2\frac{\partial}{\partial x}\left[\operatorname{sen}(xy^2)\right] + \operatorname{sen}(xy^2\ \frac{\partial}{\partial y}(x^2))$$

$$= \left[x^2\cos(xy^2)\ \frac{\partial}{\partial x}(xy^2)\right] + \operatorname{sen} xy^2 * 2x = \left[x^2\ \cos(xy^2)\ y^2\right] + \left[2x\ \operatorname{sen}\ xy^2\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y^2\ \cos(xy^2) + 2x\ \operatorname{sen} xy^2\ =\ x^2\ \cos(xy^2) * 2xy = 2x^3\ y\cos(xy^2)$$

Utilizando el comando de las derivadas del software Mathematica resulta lo siguiente

```
D[(X^2)Sin[X(Y^2)],X]
D[(X^2)Sin[X(Y^2)],Y]
```

Derivada con respecto a X $\Rightarrow$ X^2 Y^2 Cos[X Y^2] + 2 X Sin[X Y^2]
Derivada con respecto a Y $\Rightarrow$ 2 X^3 Y Cos[X Y^2]

Ejemplo#2

Sea $f(x,y) = 2x^4 y^3 - xy^2 + 3y + 1$. Obtener las primeras derivadas parciales de f.

Solución

$f_x(x,y) = 8x^3y^3 - y^2$; Considerar a **y** como una constante y se deriva con respecto a **x**.
$f_y(x,y) = 6x^4y^2 - 2xy + 3$; Considerar a **x** como una constante y se deriva con respecto a **y**.

Utilizando el comando de las derivadas del software Mathematica resulta lo siguiente

D[2(X^4)(Y^3) - X(Y^2) + (3Y) + 1,X] , D[2(X^4)(Y^3) - X(Y^2) + (3Y) + 1,Y]
Derivada con respecto a X $\Rightarrow$ $-Y^2 + 8X^3Y^3$,
Derivada con respecto a Y $\Rightarrow$ $3 - 2XY + 6X^4Y^2$

Derivadas parciales de segundo orden

Si f es una función de dos variables (x,y), entonces f_x y f_y son también funciones de dos variables y se pueden considerar sus primeras derivadas parciales, a estas primeras derivadas parciales le podemos calcular otra derivada parcial a las que se les llama segundas derivadas parciales de f. En el cuadro siguiente se muestran las notaciones comunes para las derivadas parciales de segundo orden.

$\frac{\partial}{\partial x} f_x = (f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial}{\partial y} f_x = (f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$
$\frac{\partial}{\partial y} f_y = (f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$\frac{\partial}{\partial x} f_y = (f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$

f_{xy} significa que primero se deriva con respecto a **x** y después con respecto a y, **y** que f_{yx} es lo contrario. Cuando se usa la notación ***"∂"***, el orden es al revés, es decir para encontrar $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ se deriva primero con respecto a **y** y después con respecto a **x.** f_{xy} y f_{yx} se les llama segundas derivadas parciales mixtas (o cruzadas) de f o simplemente, parciales mixtas de f.

El siguiente teorema afirma que en condiciones adecuadas, las derivadas parciales cruzadas son iguales, es decir, el orden de derivación no altera el resultado.

Teorema:

Sea f una función de dos variables (x,y). Si f , f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas en una región abierta R, entonces $f_{xy} = f_{yx}$ en R..

Ejemplo#3

Encuentre las segundas derivadas parciales de f(x,y) = xe^y - sen(x/ y) + x^3y^2.

Solución

$$f_x(x,y) = e^y - \frac{1}{y}\cos(x/y) + 3x^2y^2 \quad ; \quad f_y(x,y) = xe^y + \frac{x}{y^2}\cos(x/y) + 2x^3y$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{1}{y^2}\text{sen}(x/y) + 6xy^2 \quad ; \quad f_{yy}(x,y) = xe^y + \frac{x^2}{y^4}\text{sen}(x/y) - \frac{2x}{y^3}\cos(x/y) + 2x^3$$

$$f_{xy}(x,y) = e^y - \frac{x}{y^3}\text{sen}(x/y) + \frac{1}{y^2}\cos(x/y) + 6x^2y\,;$$

$$f_{yx}(x,y) = e^y - \frac{x}{y^3}\text{sen}(x/y) + \frac{1}{y^2}\cos(x/y) + 6x^2y$$

2.3.2 Razón de cambio de funciones de dos y tres variables

Las derivadas parciales se pueden interpretar como razones de cambio instantáneos. De hecho toda derivada es una medida de una razón de cambio.

Si f es una función de dos variables (x,y), la derivada parcial de f respecto a **x** en el punto $P_0(x_0,y_0)$ da la razón de cambio instantánea, en P_0, de f(x,y) por unidad de cambio es **x** (**x** varía y **y** se mantiene fija en **y**). Análogamente, la derivada parcial de f respecto a **y** en el punto $P_0(x_0,y_0)$ da la razón de cambio instantánea, en P_0, de f(x,y) por unidad de cambio es **y.**

Empecemos con un ejemplo, supóngase que la cuerda de un violín está fija en los puntos A y B , y que vibra en el plano **xy**.

La figura 2.3.2 muestra la posición de la cuerda en un instante t. Si z = f(x,t) designa la altura de la cuerda en el punto P de abscisa **x** en el momento t, entonces $\partial z/\partial x$ es la pendiente de la cuerda en P y $\partial z/\partial t$ es la razón de cambio en el tiempo a la altura de P y a lo largo de la recta vertical indicada. En otras palabras $\partial z/\partial t$ es la velocidad vertical de P.

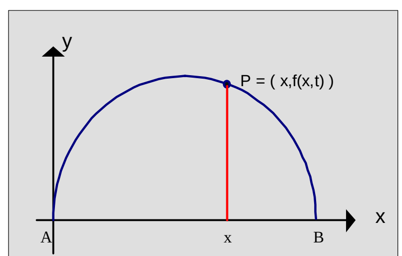


Fig 2.3.2

Cuando preguntas por la razón de cambio necesitas especificar el estado de las variables independientes (su variación). Cuál está fija y cual está cambiando?

El nombre convencional de la razón de cambio instantánea es ***"La parcial de z con respecto a x o t*** .

Ejemplo#1

El volumen V de un cilindro circular recto está dado por la ecuación **$V = \pi r^2 h$** donde **r** es el radio, **h** es la altura. Si se conserva fija h = 10pulg. Encuentre la razón de cambio de **V** con respecto a r cuando r = 6 pulgadas.

Solución

$V = \pi r^2 h$, $\partial v/\partial r = 2\pi rh$; Introduciendo valores obtenemos $\partial v/\partial r = 2\pi\,(6)\,(10) = 120\pi$.

Programación

Esta función tiene como objetivo encontrar la razón de cambio de la función del volumen, se piden como datos de entrada: la función, el valor del radio, el valor de la altura por si se quiere evaluar la función

```
Evolumen[Vol_,Vr_,Vh_]:=Module[{Dvol,Rc},
    Print[" "];
    Print["  Salida del programa  " ];
    Print[StringForm["Ecuación del volumen V = ``",Vol]];
    Print[" "];
    Dvol=D[Vol,R];
    Print[" Introduciendo valores "];
    Print[StringForm["La derivada del volumen es dv/dr = ``",Dvol]];
    Rc=Dvol/.{R->Vr,H->Vh,Pi->3.1416}//N;
    If[Rc!=0,
        Print[StringForm["La razón de cambio del volumen es Rc = ``",Rc]],
   Print["La razón de cambio no existe"];
   ]
]
Evolumen[Pi*(R^2)*H,6,10]
```

Salida del programa

Ecuación del volumen PiR^2H
Introduciendo valores
La derivada del volumen es dv/dr = 2 H Pi R
La razón de cambio del volumen es Rc = 120Pi

Ejemplo#2

De acuerdo con la ley de los gases perfectos, la presión, temperatura y volumen de un gas están relacionados por la ecuación Pv = Kt donde K es constante. Encuentre la razón de cambio de la presión (lbs/pulg^2) con respecto a la temperatura cuando esta es de 40^0Celsius. Si el volumen se conserva fijo a 100 pulg^3.

Solución

Despejando P de la ecuación original $P = kt / V$; Derivando $\partial p/\partial t = k / V$

Introduciendo valores obtenemos $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{V} = \frac{100}{V}$

2.3.3 Aplicaciones de las derivadas parciales a la economía

Empecemos por introducir conceptos en base a funciones de una variable. En economía la variación de alguna cantidad con respecto a otra puede ser descrita por un concepto promedio o por un concepto marginal.

El concepto de promedio expresa la variación de una cantidad sobre un rango específico de valores de una segunda cantidad.

El concepto marginal es el cambio instantáneo en la primera cantidad que resulta de un cambio en la segunda cantidad.

Como podemos observar el cálculo se ha convertido en un instrumento importante para resolver problemas económicos. Si para describir una cierta cantidad económica se usa una función f, entonces se emplea el adjetivo marginal para hacer referencia a la derivada de f.

Términos económicos usados con frecuencia

- **x e y**

Representan el número de unidades de ciertos artículos, estos valores deben ser positivos ya que la producción de un número negativo en la práctica no tiene sentido. Si el costo de la producción de **x** unidades de un artículo y **y** unidades de otro artículo es dada por C(x,y) entonces C se llama función de costo. Las derivadas parciales de C se llaman función de costo marginal.

- **C(x,y) :** Costo total al producir (x e y) unidades de os artículos, **C** es la función del costo
  total y C\` es la función de costo marginal.
- **Q(x) :** Función del costo promedio **Q(x) = C(x) / x**
- **R(x) :** Ingreso **R(x,y) = px + qy; R(x) = xP(x)**
- **S(x) :** Función utilidad(Ganancia) **S(x) = R(x,y) - C(x,y);**
  Ingreso menos el costo total

Para determinar la máxima utilidad que puede ser obtenida, usamos la ecuación de la demanda para expresar **S** en términos de **p** y **q** o de **x** y **y**.

Consideremos ahora dos artículos relacionados para los cuales **p** es el precio por unidad de **x** unidades del primer artículo y **q** es el precio por unidad de **y** unidades del segundo artículo. Entonces las ecuaciones de la demanda para estos dos artículos se pueden escribir, como **x = f(p, q) ; y = g(p,q), entonces**

$\frac{\partial x}{\partial P}$ **:** da la demanda marginal (parcial) de **x** con respecto a **p**.

$\frac{\partial x}{\partial Q}$ **:** da la demanda marginal (parcial) de **x** con respecto a **q**.

$\frac{\partial y}{\partial P}$ **:** da la demanda marginal (parcial) de **y** con respecto a **p**.

$\frac{\partial y}{\partial Q}$ **:** da la demanda marginal (parcial) de **y** con respecto a **q**.

Artículos sustitutos

Esto ocurre cuando una disminución en la demanda para un artículo como un resultado de un aumento en su precio origina un aumento en la demanda para el otro artículo; Por tanto, cuando las mercancías son sustitutas ya que $\frac{\partial x}{\partial P}$ es siempre negativa, concluimos que la $\frac{\partial y}{\partial P}$ es positiva; y como la $\frac{\partial y}{\partial Q}$ es siempre negativa , se sigue $\frac{\partial x}{\partial Q}$ es positiva. Consecuentemente los dos artículos son sustitutos si y solo si $\frac{\partial x}{\partial Q}$ y $\frac{\partial y}{\partial P}$ son positivas;

Ejemplo#1

Las ecuaciones de la demanda para dos artículos que son producidos por un monopolista son: x = 6 - 2P + Q , y = 7 + P -Q donde 100x es la cantidad solicitada del primer artículo si el precio es p dólares por unidad y 100y es la cantidad solicitada del segundo artículo si el precio es q dólares por unidad. Demostrar que los dos artículos son sustitutos si cuesta $2 producir cada unidad del primer artículo y $3 producir cada unidad del segundo artículo, encontrar las cantidades solicitadas y los precios de los artículos de tal manera que se tenga la máxima utilidad. Tómese p y q como variables independientes.

Solución

Cuando se produzcan y se vendan 100x unidades del primer artículo y 100y unidades del segundo artículo, el número de dólares del ingreso total es 100px + 100qy, y el número de dólares del costo total de producción es:

C = 200x + 300y, por lo tanto si S dólares es la utilidad, tenemos:
S = 100px + 100qy - 200x - 300y

Introduciendo valores de x y y

$S = 100\,p(6 - 2p + q) + 100\,q(7 + p + q) - 200(6 - 2p + q) - 300(7 + p - q)$
$S = 100(6p - 2p^2 + pq + 7q + pq - q^2 - 12 + 4p - 2q - 21 - 3p + 3q)$
$S = 100(-2p^2 + 2pq - q^2 + 7p + 8q - 33)$

Primeras derivadas parciales

$$\frac{\partial s}{\partial p} = 100(-4p + 2q + 7) \quad ; \quad \frac{\partial s}{\partial q} = 100(2p - 2q + 8)$$

Haciendo las primeras derivadas parciales igual a cero y resolviendo simultáneamente

$$\begin{array}{l} -4p + 2q + 7 = 0 \\ \underline{\;2p - 2q + 8 = 0\;} \\ -2p + 0 + 15 = 0 \end{array} \; ; \; p = \frac{15}{2} = 7.5 \qquad \begin{array}{l} -4p + 2q + 7 = 0 \\ \underline{\;4p - 4q + 16 = 0\;} \\ 0 - 2q + 23 = 0 \end{array} \; ; \; q = \frac{23}{2} = 115$$

Introduciendo los valores de p y q , podemos encontrar el valor de x y y.

$$x = 6 - 2p + q = 6 - 2\left(\frac{15}{2}\right) + \left(\frac{23}{2}\right) = 6 - 15 + \frac{23}{2} = 2.5 \quad ; \quad y = 7 + p - q = 7 + \left(\frac{15}{2}\right) - \left(\frac{23}{2}\right) = 15 - \frac{8}{4} = 3$$

Estos valores encontrados se introducen en la ecuación S.

$$S = 100px + 100qy - 200x - 300y$$
$$S = \left[100(7.5)2.5\right] + \left[100(115)3\right] - \left[200(2.5)\right] - \left[300(3)\right] = 3{,}925$$

Concluimos que se obtendrá la máxima utilidad S cuando se produzcan y se vendan 100(2.5) = 250 unidades del primer artículo a $7.50 por unidad y cuando se produzcan y se vendan 100(3) = 300 unidades del segundo artículo a $11.50 por unidad, los artículos son sustitutos.

Programación

Este programa obtiene la solución del ejemplo de las derivadas parciales aplicadas a la economía, se piden como datos de entrada: las ecuaciones de la demanda, la cantidad de productos solicitados, los variables p y q, y los costos por unidad de cada producto.

```
Monopolio[Edx_,Edy_,Cpsx_,Cpsy_,P_,Q_,Cu1_,Cu2_]:=Module[{I1,I2,Cp,Cq,
                    Utd,Vut,S,Dsp,Dsq,Res,Dmx,Dmy,G,Ganan,Vp1,Vp2},
    Print[" "];
    Print["  Salida del programa   " ];
    Print[" "];
    Print[StringForm["Ed x= `` ",Edx]];
    Print[StringForm["Edy= `` ",Edy]];
    Print[" "];
    I1=Cpsx*P;
    I2=Cpsy*Q;
    Cp=Cpsx*Cu1;
    Cq=Cpsy*Cu2;
    Utd=I1+I2-Cp-Cq;
    Vut=Expand[Utd]/.{X->Edx,Y->Edy};
    S=Simplify[Vut];
    Print[StringForm["S= `` ",S]];
    Dsp=D[S,P];
    Dsq=D[S,Q];
    Print[StringForm["Derivada Ds/dp = `` ",Dsp]];
    Print[StringForm["derivada Ds/dq = `` ",Dsq]];
    Print[" "];
    Print["Precios de venta de los artículos "];
    Res=Solve[{Dsp==0,Dsq==0},{P,Q}];
    Print[StringForm["Valor de p y q  Res=``",Res]];
    Dmx=Edx /.Res;
    Dmy=Edy/.Res;
    Print[StringForm["El valor de x =``",Dmx]];
    Print[StringForm["El valor de y=``",Dmy]];
    Print[" "];
    Print["Introduciendo valores de X y Y en Ecn. S"];
    G=S/.Res;
    Ganan=G/.{X->Dmx,Y->Dmy};
    Print[StringForm["La max. utilidad es Ganancia=``",Ganan]];
    Vp1=Cpsx/.X->Dmx;
    Vp2=Cpsy/.Y->Dmy;
    Print[" "];
    Print["Las ventas totales de los productos son:"];
    Print[" "];
    Print[StringForm["Venta de A=``",Vp1]];
    Print[StringForm["Venta de B=``",Vp2]];
]
Monopolio[6-2P+Q,7+P-Q,100X,100Y,P,Q,2,3]
```

Salida del programa

Edx = 6 - 2 P + Q,   Edy = 7 + P - Q

S= 100 (-33 + 7 P - 2 P^2 + 8 Q + 2 P Q - Q^2)

Derivada Ds/dp = 100 (7 - 4 P + 2 Q)
derivada Ds/dq = 100 (8 + 2 P - 2 Q)

Precios de venta de los artículos
Valor de p y q Res={{P -> 15/2, Q ->23/2}}

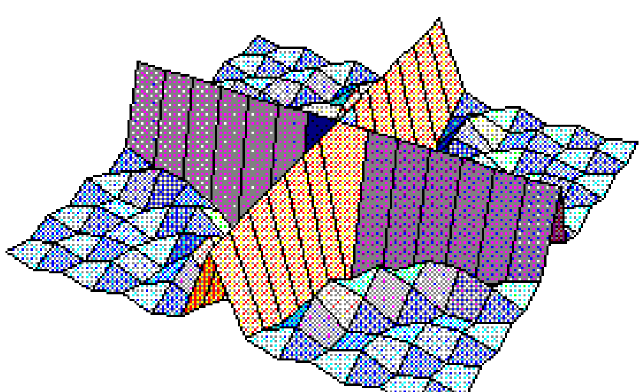
x = 5/2,   y=3

Introduciendo valores de X y Y en Ecn. S
La max. utilidad es Ganancia={3925}

Las ventas totales de los productos son: A = {250}, B = {300}

Segunda Unidad

Funciones de Dos



y Tres Variables

Problemas y Ejercicios

Problemas y Ejercicios de las sección 2.1

♦ **2.1 Grafica de funciones de dos variables**

1) Determine el dominio de las funciones indicadas

a) $f(x,y) = y^2$; b) $f(x,y) = s^3 - 2t^2 + 8st$

2) En los siguientes ejercicios, describa la gráfica de f, utilice los comandos del software Mathematica para crear estas gráficas.

a) $f(x,y) = 6 - 2x - 3y$; b) $f(x,y) = \sqrt{72 + 4x^2 - 9y^2}$

c) $f(x,y) = 6$; d) $f(x,y) = 6 - x - 2y$

e) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; f) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$

g) $f(x,y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

3) Determine el dominio de f y el valor de f en los puntos indicados

a) $f(x,y) = 2x - y^2$; (-2,5), (5,-2), (0, - 2)

b) $f(x,y) = xy / (x - 2y)$; (2,3), (-1,4), (0, 1)

c) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$; (1,1), (0,4), (-3, 3)

Problemas y Ejercicios de las sección 2.2

♦ 2.1 Limites y Continuidad de funciones de dos variables

1) Encuentre el límite indicado o establezca que no existe, compruebe su desarrollo con los
comandos del software Mathematica.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} \left(3x^2y - xy^3\right)$; b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,1)} \left(xy^3 - xy + 3y^2\right)$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,\pi)} \left(x\cos^2 xy - \operatorname{sen}(\frac{xy}{3})\right)$; d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{3x^2+3y^2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4-y^4}$; f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2}{3+xy}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3-2x^2y+3y^2x-2y^3}{x^2+y^2}$

2) Demuestre que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ no existe, considérese el eje de las **x** como una
trayectoria y la recta y = x como otra trayectoria.

3) En los siguientes ejercicios, dibuje el conjunto indicado. Describa la frontera del
conjunto, finalice estableciendo si el conjunto es abierto, cerrado o ninguna de las dos
cosas.

a) $\{(x,y) : 2 \le x \le 4 \;,\; 1 \le y \le 5\}$; b) $\{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 \le 4\}$

c) $\{(x,y) : x > 0 \;,\; y > \operatorname{sen}(1/x)\}$

4) Aplique el teorema de la composición de funciones para determinar en donde es continua h.
Encuentre h(x,y) = g(f(x,y)). Elabore una función para resolver ejercicios de este tipo.

a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $g(t) = \frac{t^2-4}{t}$; b) $f(x,y) = x + \tan y$, $g(z) = z^2 + 1$

5) Investigue la continuidad de las siguientes funciones en el punto indicado.

a) $f(x,y) = \frac{3 - x + y}{4 + x - 2y}$ (1,2)

b) Que valor debe tomar k, para que **f** sea continua en el punto(0,0)?. $f(x,y) = \begin{cases} x\operatorname{sen}xy & (x,y) \ne (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

6) Determine si $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + 2y & (x,y) \ne (0,1) \\ 0 & (x,y) = (0,1) \end{cases}$

a) Existe el límite para $(x,y) \to (0,1)$; b) Es continua es (0,1)

7) En los ejercicios siguientes describa el conjunto máximo S en el que sea correcto decir que f
es continua.

a) $f(x,y) = (x^3 + xy - 5) / (x^2 + y^2 + 1)$; b) $f(x,y) = (x^2 + 3xy + y^2) / (y - x^2)$
c) $f(x,y) = \sqrt{x-y+1}$

Problemas y Ejercicios de las sección 2.3
♦ 2.3 Derivadas Parciales

1) En los siguientes ejercicios aplique la definición de derivadas parciales. Implemente un
programa utilizando el software Mathematica que resuelva ejercicios de este tipo, compruebe
sus ejercicios una vez que haya hecho el desarrollo manual.

a) $f(x,y) = 3x^2y + 4xy^2$; b) $f(x,y) = x^2y - 3xy^2 + 2yz$
c) $f(x,y) = 6x + 3y - 7$; d) $f(x,y) = 3xy + 6x - y^2$
e) $f(x,y) = 4x^2 - 3x\,y$; f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

2) Encuentre la derivada parcial de primer orden de l as funciones dadas respecto a cada variable independiente.

a) $f(x,y) = (2x - 4)^4$; b) $f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) / (xy)$
c) $f(x,y) = e^x \cos y$; d) $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$
e) $f(x,y) = e^{-xy}$; f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
g) $f(x,y) = xe^y + y\,\mathrm{sen}\,x$; h) $f(x,y) = \sqrt{(x+y)/(x-y)}$
i) $f(x,y) = x\cos(x / y)$; j) $f(x,y) = x^2 - xy^2 + 4y^5$
k) $f(x,y) = (3x-y) / (x+2y)$; l) $f(x,y) = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$

3) En los siguientes ejercicios encuentre la derivada parcial de segundo orden. En las funciones de la **a** a la **d** verifique $z_{xy} = z_{yx}$ y en los ejercicios de la a la **j** verifique
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Elabore una función con el software Mathematica para verificar ejercicios modelo de las segundas derivadas parciales.

a) $f(x,y) = x^3 - 4xy + 3y^2$; b) $f(x,y) = x^2 e^{y^2}$
c) f9x,y) = ln(x+y) ; d) $f(x,y) = 5x^2 y^2 - 2xy^3$
e) $f(x,y) = 2x^2 y^3 - x^5y^{5}$; f) $f(x,y) = 3e^{2x} \cos y$
g) $f(x,y) = x\,y^4 - 2x^2y^3 + 4x^2 - 3y$; h) $f(x,y) = x^3 e^{-2y} + y^{-2} \cos x$
i) $f(x,y) = x^2 \cosh(z / y)$; j) $f(x,y) = e^{xy}$

4) La temperatura en cualquier punto (x,y) de una placa es T^0 y $T = 54 - \frac{2}{3}x^2 - 4y^2$. Si la

distancia se mide en pies, encontrar la rapidez de cambio de la temperatura con respecto a
la distancia recorrida a lo largo de la placa en las direcciones de los ejes x e y, en el punto
(3, 1).

5) Si V dólares es el valor presente de una anualidad ordinaria de pagos de $100 por
año durante t años a una tasa de interés de 100i por ciento por año, entonces

$$V=100\left(\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}\right)$$

a) Encontrar la razón de cambio instantánea de V por unidad de cambio en i. Si t permanece fijo en 8.
b) Usar el resultado de la parte (a) para encontrar el cambio aproximado del valor presente si la
tasa de interés cambia de 6% a 7% y el tiempo permanece a constante en 8 años.
c) Simule una función que de solución a este ejercicio, utilizando el software Mathematica.

6) El potencial eléctrico V en un punto (x,y,z) está dado por $V=\frac{100}{x^2+y^2+z^2}$, donde V se mide en volts y (x,y,z) en cms. Calcule la razón de cambio de V respecto a la distancia en el punto P(2,-1,1) en dirección de los ejes x, y, z.

Proyectos de la Segunda Unidad

Proyecto#3

Una lámina de metal plana está situada en un plano xy y la temperatura T(en ^oC) en el punto(x,y) es inversamente proporcional a la distancia del origen.

a) Describa las isotermas

Proyecto#4

La superficie de un lago se mide mediante una región D en el plano **xy** de manera que la profundidad en (x,y) esta dada por $f(x,y) = 300 - 2x^2 - 3y^2$, donde x , y *y* f(x,y) se miden en metros. Una joven está en el agua en el punto (4,9). Calcule la tasa o intensidad con la que cambia la profundidad bajo esa joven cuando nada en la dirección

a) Del Eje x
b) Del Eje y|

3

Tercera Unidad
Razón de Cambios

Contenido

♦ 3.1 Derivada direccional

Como en la derivada y el gradiente se hace uso de los vectores unitarios (i,j) consideramos necesario introducir algunos aspectos sobre vectores antes de entrar en detalles sobre los temas mencionados.

Algunos conceptos como el de la velocidad y la fuerza poseen tanto magnitud como dirección con frecuencia se representan por flechas o segmentos dirigidos, es decir segmentos en los que se señala un sentido y representan una dirección. A los segmentos dirigidos se les llama vectores.

Vectores unitarios (i y j)

Los vectores (i,j) tienen magnitud 1 ya que, $|i| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$ y $|j| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.

Definición:

i = <1,0> , j = <0,1>

Estos vectores pueden usarse como otra forma de denotar los vectores en V_2 (espacio vectorial de dimensión 2 o bidimensional), por eso tenemos el siguiente teorema.

Teorema A:

Si $\mathbf{U} = \langle u_1, u_2 \rangle$ es un vector en V_2 , entonces $\mathbf{U} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$.

La fórmula $\mathbf{U} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ del vector $\mathbf{U} = \langle u_1, u_2 \rangle$ tiene una interesante interpretación geométrica. En la figura 3.1a podemos observar los vectores de posición **i,j** y **U**. Como **i** y **j** tienen magnitud 1, entonces

$$| u_1 \mathbf{i} | = | u_1 | \, | \mathbf{i} | = | u_1 | \qquad \text{y} \qquad | u_2 \mathbf{j} | = | u_2 | \, | \mathbf{j} | = | u_2 |$$

$u_1\mathbf{i}$ puede representarse por un vector horizontal.
$u_2\mathbf{j}$ puede representarse por un vector vertical,
(ver estos vectores en la fig3.1b).

El vector de posición **U** es Considerado como la suma de estos vectores. Entonces
u_1 es conocida como componente horizontal del vector **U**.
u_2 es conocida como componente vertical del vector **U.**

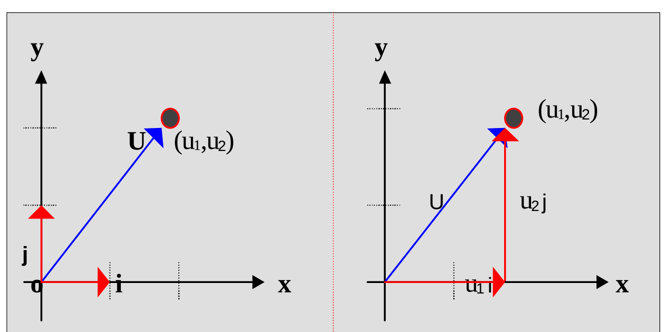


Fig3.1a Fig 3.1b

En algunas aplicaciones nos encontramos con casos donde no nos proporcionan el vector unitario U, sino que nos dan el vector direccional A, para resolver ejercicios modelos como estos es necesario primero encontrar el vector unitario U en base al vector direccional A aplicando el siguiente teorema de derivadas direccionales.

Teorema B:

Si U es un vector diferente de cero, entonces puede definirse un vector unitario U con la misma dirección que a por medio de $U = \frac{1}{|a|} a$.

Definición de módulo de un vector:

La magnitud U = |u| del vector U = < u_1,u_2 > está dada por $|U| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Tómese la magnitud como la longitud del vector.

Después de una breve introducción sobre vectores entraremos en detalles sobre la derivada direccional. Para ello generalizaremos la definición de una derivada parcial para obtener la razón de cambio de una función f respecto a la distancia en cualquier dirección arbitraria, siendo esto lo que trata de estudiar la derivada direccional. Sea f(x,y) una función de dos variables las derivadas parciales f_x de (x,y) y f_y de (x,y) miden la razón de cambio, en dirección paralela a los ejes x y y.

Sea **U = u₁i + u₂j** un vector unitario. Si **U** lo representamos como vector con un punto inicial **P(x,y)** ,ver figura 3.1.2, entonces el punto final tiene coordenadas **($x+u_1$, $y+u_2$)** esto es, por que para llegar al punto final se ha recorrido una distancia.

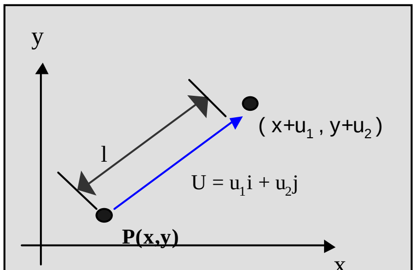


Fig 3.1.2

Ahora lo que interesa es definir la razón de cambio de f(x,y) respecto a la distancia en la dirección de U.

Sea **l** la recta que pasa por el punto P paralelo al vector **U** y sea **Q** un punto cualquiera en la recta **l,** ver figura 3.1.3. Entonces el vector $\vec{PQ}$ corresponde al múltiplo escalar **SU = (su_1)i + (su_2)j** para alguna distancia **S.** Por lo tanto las coordenadas de Q son **(x + su_1 ,y + su_2)** .Ya que **U** es un vector unitario $\left|\vec{PQ}\right| = |SU| = |S|\,|U| = |S|$

S es la distancia desde P medida a lo largo de l. Si **s > 0**, entonces **SU** tiene la misma dirección que **U**. Si **s < 0**. Entonces **SU** tienen dirección opuesta a **U**.

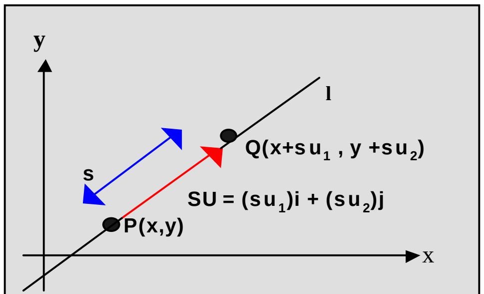


Fig 3.1.3

Si la posición de un punto cualquiera varia de P a Q , entonces el incremento Δw de W = f(x,y) es $\Delta w = f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)$.

La razón media de cambio de f(x,y) es $\dfrac{\Delta w}{s} = \dfrac{f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)}{s}$.

Para encontrar la razón de cambio instantánea de f(x,y) en P en la dirección determinada por U, se toma el límite de razón media de cambio $\dfrac{\Delta w}{s}$ cuando $s \to 0$. ***Esto nos lleva a la definición de derivada direccional.***

<u>**Definición:**</u>

Sea w = f(x,y) y sea $\mathbf{U = u_1 i + u_2 j}$ un vector unitario. **" La derivada direccional de f en P(x,y) en la dirección de U "** , se denota por $D_u f(x,y)$ y se define por :

$$D_u f(x,y) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)}{s}$$

Si **a** es cualquier vector con la misma dirección que U, se afirma que $D_u f(x,y)$ es la derivada direccional de f en la dirección de **a**.

Ejemplo#1

Dada f(x,y) = $2x^2 + 5y^2$ en la dirección del vector unitario $U = \cos\frac{\pi}{4} i + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} j$.

Solución

$$D_u f(x,y) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+su_1, y+su_2) - f(x,y)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+0.7071s, y+0.71071s) - (2x^2+5y^2)}{s}$$

$$D_u f(x,y) = \lim_{s\to 0} \frac{2(x+0.7071s)^2 + 5(y+0.7071s)^2 - \left(2x^2+5y^2\right)}{s}$$

$$D_u f(x,y) = \lim_{s\to 0} \frac{2\left(x^2+14142xs+0.4999s^2\right)+5\left(y^2+14142ys+0.4999s^2\right)-2x^2-5y^2}{s}$$

$$D_u f(x,y) = \lim_{s\to 0} \frac{2x^2+2.8284xs+0.9998s^2+5y^2+7.071sy+2.4995s^2-2x^2-5y^2}{s}$$

Eliminando términos semejantes nos queda

$D_u f(x,y) = \lim\limits_{s \to 0} \dfrac{2.8284xs + 7.071sy + 3.4993s^2}{s}$; dividiendo entre s obtenemos

$D_u f(x,y) = \lim\limits_{s \to 0} 2.8284x + 7.071y + 3.4993s$; aplicando límite $D_u f(x,y) = 2.8284x + 7.071y$.

El teoremac C y D nos permiten calcular la derivada direccional sin usar la definición.

Teorema C:

Si f es una función diferenciable de dos variables y $\mathbf{U = u_1 i + u_2 j}$ son vectores unitarios, entonces $D_u f(x,y) = f_x(x,y)u_1 + f_y(x,y)u_2$. Para funciones de tres variables es

$$D_u f(x,y,z) = f_x(x,y,z)u_1 + f_y(x,y,z)u_2 + f_z(x,y,z)u_3.$$

Teorema D:

Si f es una función diferenciable de (x y) y $\mathbf{u = \cos\theta i + sen\theta j}$ entonces $D_u f(x,y) = f_x(x,y)\cos\theta + f_y(x,y)sen\theta$. Es evidente que la derivada de f respecto a **U**

depende de la dirección del punto P

Ejemplo#2

1) Calcule la derivada direccional de f en el punto P en la dirección indicada.
   $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2$; P(3,-1), $U = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(i + j)$

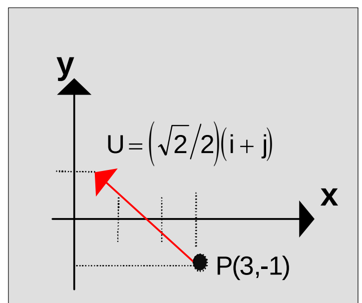


Fig 3.1.4

Solución

El vector $u = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(i + j)$ con punto inicial en P(3,-1), están representados en la figura 3.1.4.

Racionalizando el numerador del vector U obtenemos $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} * \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2^2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$f_x(x,y) = 2x - 5y$, $f_y(x,y) = 6y - 5x$

$$D_u f(x,y) = (2x - 5y)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} i\right) + (6y - 5x)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} j\right)$$

Introduciendo P en $D_u f(x,y)$

$$D_u f(x,y) = (2(3) - 5(-1))\left(\frac{1}{\sqrt{2}} i\right) + (6(-1) - 5(3))\left(\frac{1}{\sqrt{2}} j\right) = \frac{11}{\sqrt{2}} - \frac{21}{\sqrt{2}} = \frac{-10}{\sqrt{2}}.$$

Ejemplo#3

La temperatura en un punto P(x,y,z) de un objeto que está colocado en un sistema de coordenadas rectangulares está dada por $T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$. Calcúlese la derivada direccional de la temperatura en P(4,-2,1) en la dirección U = 2i + 6j + 3k.

Solución

$T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$, P (4,-2,1), U = (2i + 6j - 3k)

$\frac{\partial T}{\partial y} = -2y$ Evaluando $-2* -2 = 4$; $\frac{\partial T}{\partial z} = 32z$ Evaluando $32*1 = 32$

$D_u T(x,y) = 32(2)i + 4(6)j + 32(-3)k = 64i + 24j - 96k = -8$

Ejemplo#4

Encontrar la derivada direccional usando el teorema D para la siguiente función
$f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 4x$ siendo U el vector unitario en la dirección de $\frac{1}{6\pi}$.

Solución

$f_x = 6x + 4$, $f_y = -2y$
$D_u f(x,y) = f_x \cos\theta + f_y \operatorname{sen}\theta$
$D_u f(x,y) = (6x + 4) \cos(1 / 6\pi) + (-2y) \operatorname{sen}(1 / 6\pi)$
$D_u f(x,y) = (6x + 4) (0.8660) + (-2y) (1 /2)$
$D_u f(x,y) = 5.16x + 3.46 - (1 /2)y$

PROGRAMACIÓN

Este programa resuelve ejercicios sobre derivada direccional para funciones de dos y tres variables utilizando el teorema C.

```
DDir[Fn_,Pto_,VAU_,AU_,Cvu_,Vp_,Cvf_]:=Module[{Dx,Dy,Dz,P1,P2,P3,
        EDx,EDy,EDz,E1,E2,E3,Duf},
 Print[" "];
 Print["Salida del programa"];
 Print[" "];
 Print[StringForm["Función de entrada Fn=``",Fn]];
 Print[StringForm["Punto a evaluar P=``",Pto]];
 Print[StringForm["Vector**``",VAU]];
 Print[StringForm["Tipo de vector(A/U)=``",AU]];
 Print[" "];
  If[(Cvu==2&&Vp==2&&Cvf==2),
   If[AU==U,
     Print["Funciones de dos variables con vector U"];
     Dx=D[Fn,X];
     Dy=D[Fn,Y];
     Print[StringForm["Derivada en x Dx=``",Dx]];
     Print[StringForm["Derivada en y Dy=``",Dy]];
     Print["Evaluando en el punto P"];
     Print[" "];
     P1=Part[Pto[[1]]];
     P2=Part[Pto[[2]]];
     Print[StringForm["Punto P1=``",P1]];
     Print[StringForm["Punto P2=``",P2]];
     EDx=Dx/.{X->P1,Y->P2};
     EDy=Dy/.{X->P1,Y->P2};
     Print[StringForm["Ecuación en x evaluada EDx=``",EDx]];
     Print[StringForm["Ecuación en y evaluada EDy=``",EDy]];
```

```
    Duf=(EDx*(Part[VAU[[1]]]))+(EDy*(Part[VAU[[2]]]));
    Print[StringForm["Derivada direccional es Duf=``",Duf]];
  ];
  If[AU==A,
    Print["Funciones de dos variables con vector A"];
    Dx=D[Fn,X];
    Dy=D[Fn,Y];
    Print[StringForm["Derivada en x Dx=``",Dx]];
    Print[StringForm["Derivada en y Dy=``",Dy]];
    Print["Evaluando en el punto P"];
    Print[" "];
    P1=Part[Pto[[1]]];
    P2=Part[Pto[[2]]];
    Print[StringForm["Punto P1=``",P1]];
    Print[StringForm["Punto P2=``",P2]];
    EDx=Dx/.{X->P1,Y->P2};
    EDy=Dy/.{X->P1,Y->P2};
    Print[StringForm["Ecuación en x evaluada EDx=``",EDx]];
    Print[StringForm["Ecuación en y evaluada EDy=``",EDy]];
    E1=Part[VAU[[1]]];
    E2=Part[VAU[[2]]];
    M=Sqrt[(E1^2)+(E2^2)];
    U1=E1/M;
    U2=E2/M;
    U=U1+U2;
    Print[StringForm["El vector U =``",U]];
    Duf=(EDx*U1)+(EDy*U2);
    Print[StringForm["Derivada direccional es Duf=``",Duf]];
  ],
 If[(Cvu==3&&Vp==3&&Cvf==3),
  If[AU==U,
    Print["Función de tres variables con vector U"];
    Dx=D[Fn,X];
    Dy=D[Fn,Y];
    Dz=D[Fn,Z];
    Print[StringForm["Der en x Dx=``",Dx]];
    Print[StringForm["Der en y Dy=``",Dy]];
    Print[StringForm["Der en z Dz=``",Dz]];
    Print["Evaluando en el punto P"];
    Print[" "];
    P1=Part[Pto[[1]]];
    P2=Part[Pto[[2]]];
    P3=Part[Pto[[3]]];
    Print[StringForm["Punto P1=``",P1]];
    Print[StringForm["Punto P2=``",P2]];
    Print[StringForm["Punto P3=``",P3]];
    EDx=Dx/.{X->P1,Y->P2,Z->P3};
    EDy=Dy/.{X->P1,Y->P2,Z->P3};
    EDz=Dz/.{X->P1,Y->P2,Z->P3};
    Print[StringForm["Ecuación en x evaluada EDx=``",EDx]];
    Print[StringForm["Ecuación en y evaluada EDy=``",EDy]];
    Print[StringForm["Ecuación en z evaluada EDz=``",EDz]];
    Duf=(EDx*Part[VAU,1])+(EDy*Part[VAU,2])+(EDz*Part[VAU,3]);
    Print[StringForm["Derivada direccional es Duf=``",Duf]];
  ];
  If[AU==A,
```

```
      Print["Funciones de tres variables con vector A"];
      Dx=D[Fn,X];
      Dy=D[Fn,Y];
      Dz=D[Fn,Z];
      Print[StringForm["Derivada en x Dx=``",Dx]];
      Print[StringForm["Derivada en y Dy=``",Dy]];
      Print[StringForm["Derivada en z Dz=``",Dz]];
      Print["Evaluando en el punto P"];
      Print[" "];

      P1=Part[Pto[[1]]];
      P2=Part[Pto[[2]]];
      P3=Part[Pto[[3]]];
      Print[StringForm["Punto P1=``",P1]];
      Print[StringForm["Punto P2=``",P2]];
      Print[StringForm["Punto P3=``",P3]];
      EDx=Dx/.{X->P1,Y->P2,Z->P3};
      EDy=Dy/.{X->P1,Y->P2,Z->P3};
      EDz=Dz/.{X->P1,Y->P2,Z->P3};
      Print[StringForm["Ecuación en x evaluada EDx=``",EDx]];
      Print[StringForm["Ecuación en y evaluada EDy=``",EDy]];
      Print[StringForm["Ecuación en z evaluada EDz=``",EDz]];
      E1=Part[VAU[[1]]];
      E2=Part[VAU[[2]]];
      E3=Part[VAU[[3]]];
      M=Sqrt[(E1^2)+(E2^2)+(E3^2)];
      Print[StringForm["Valor del modulo del vector A=``",M]];
      U1=E1/M;
      U2=E2/M;
      U3=E3/M;
      U=U1+U2+U3;
      Print[StringForm["Elemento 1 U1 =``",U1]];
      Print[StringForm["Elemento 2 U2 =``",U2]];
      Print[StringForm["Elemento 3 U3 =``",U3]];
      Duf=(EDx*U1)+(EDy*U2)+(EDz*U3);
      Print[StringForm["Derivada dir es Duf=``",Duf]];
    ];
  ];
 ];]
DDir[4(X^2)-(Y^2)+16(Z^2),{4,-2,1},{2,6,-3},U,3,3,3]
```

Salida del programa

```
Función de entrada Fn=4 X^2  - Y^2  + 16 Z^2
Punto a evaluar P={4, -2, 1}
Vector**{2, 6, -3}

Tipo de vector(A/U)=U

Función de tres variables con vector U
Der en x Dx=8 X
Der en y Dy=-2 Y
Der en z Dz=32 Z

Evaluando en el punto P
Punto P1=4
```

Punto P2=-2
Punto P3=1

Ecuación en x evaluada EDx=32
Ecuación en y evaluada EDy=4
Ecuación en z evaluada EDz=32
Derivada direccional es Duf=-8

♦ 3.2 El gradiente

Introduciremos un nuevo vector llamado vector gradiente. Denotaremos el gradiente de f(x,y) en (x,y) como $\nabla f(x,y)$ o por grad f(x,y). El gradiente es una cantidad importante asociada con una función de dos variables.

El símbolo "∇" se llama "nabla" o "del"; la notación para el gradiente de f a menudo se lee "del f", "gradiente de f " o "grad f". Este símbolo es un operador diferencial vectorial definido por $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\,i + \frac{\partial}{\partial y}\,j$. Las propiedades son parecidas a las del operador $\frac{d}{dx}$.

Definición de gradiente:

Sea f una función de dos variables. "El gradiente de f(o de f(x,y))" es la función vectorial
dada por $\nabla f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j$

Relación de la derivada direccional con el gradiente

Para obtener la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario U, se toma el producto escalar del gradiente de f con U.

Derivada direccional en términos del gradiente:

Sea f una función que tiene primeras derivadas continuas en una vecindad P. Entonces **f** tiene derivada direccional en **P** en la dirección del vector unitario **U = u_1 i + u_2j**, y la y la derivada direccional es $D_u f(p) = \nabla f(p)\,.\,U$ o sea , $D_u f(x,y) = f_x(x,y)\,u_1 + f_y(x,y)\,u_2$.

Ejemplo#1

Si $f(x,y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$. Encontrar el gradiente de f en el punto (4,3) y la razón de cambio en la dirección $\frac{\pi}{4}$ en (4,3).

Nota

Para resolver ejercicios que solo nos dan el ángulo y no el vector entonces se forma el vector usando la fórmula de los Cosenos y Senos con el ángulo dado.

Solución a

f_x (x,y) = (1/ 8)x, f_y (x,y) = (2 / 9)y ; ∇f (4,3) = (1/ 8)(4)i + (2 / 9)(3)j = (1/2)i + (2/3)j

Solución b

$D_u f = f_x\cos\theta + f_y \operatorname{sen}\theta$, la razón de cambio de f(x,y) en la dirección ($\pi/4$) en (4,3) es $D_u f(4,3)$ donde **U** es el vector unitario $U = \frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j$.

Multiplicando $\nabla f(4,3)$ por U tenemos entonces $D_u f(4,3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} i + \frac{1}{\sqrt{2}} j\right) * \left(\frac{1}{2} i + \frac{2}{3} j\right)$

$\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}$ Racionalizando

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad ; \quad \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{6\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{24} = \frac{14\sqrt{2}}{24} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

Derivada direccional máxima de una función

En algunas aplicaciones que se nos presenta la situación de tener cualquier función dada f en un punto determinado, es común preguntar en que dirección cambia con mayor rapidez la función, es decir, en que dirección es mayor la derivada direccional.

Supóngase que f representa una función de dos y tres variables puesto que $D_u f(x,y) = \nabla f(x,y).U$ o $D_u f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z).U$. Expresan la derivada direccional como producto escalar de dos vectores a y b es el escalar **a . b = | a | | b | cos**$\boldsymbol{\theta}$**.**

Si θ : Es el ángulo que forman los vectores ∇f y U (ver figura 3.2.1), tal que $0 \le \theta \le \pi$ entonces. resulta que

$D_u f(x,y) = \nabla f(P) \bullet U$
$D_u f(x,y) = |\nabla f(P)|\,|U| \cos\theta$
$D_u f(x,y) = |\nabla f(P)| \cos\theta$ por que $|U| = 1$

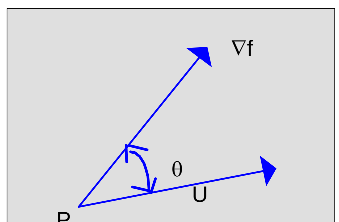


Fig 3.2.1

Dado que | u | = 1, entonces $D_u f(x,y)$ será un valor máximo cuando el coseno de θ es 1; para $\theta = 0$. Esto ocurre cuando U es el vector unitario $U = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$ que apunta en dirección del vector gradiente. En este caso $D_u f(P) = |\nabla f(P)|$ y de esta forma el valor de la derivada direccional es la longitud del vector gradiente (Esto es la máxima derivada direccional), de esta forma se ha demostrado el teorema A. Deducimos que el vector gradiente ∇f apunta en la dirección en donde la función f crece con mayor rapidez y su magnitud es la razón de crecimiento de f (respecto a la distancia), en esa dirección.

Teorema A - Significado del Vector Gradiente

El valor máximo de la derivada direccional es $D_u f(P)$ se obtiene cuando U es el vector unitario en dirección del vector gradiente $\nabla f(P)$; esto es cuando $U = \nabla f(P) / |\nabla f(P)|$. El valor de

Ejemplo#2

La temperatura en cualquier punto (x,y) de una placa rectangular situada en el plano x,y esta determinada por $t(x,y) = x^2 + y^2$.

a) Encontrar la rapidez de cambio de la temperatura en el punto (3 , 4) en la dirección que hace
un ángulo de $\pi/3$ radianes con la dirección positiva de las x.

b) Encontrar la dirección para la cual la rapidez de cambio de la temperatura en el punto (-3,1) es máxima.

Solución a

$D_u t(x,y) = x^2 + y^2$; $U = \cos\frac{1}{3}\pi i + \operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi j = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,j$

Derivadas

$t_x(x,y) = 2x$, $t_y(x,y) = 2y$, por lo tanto $\nabla t(x,y) = t_x(x,y)i + t_y(x,y)i = 2xi + 2yj$ entonces $D_u t(x,y) = \nabla t(x,y) .U$

$$D_u t(x,y) = (2xi + 2yj)\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\sqrt{3}j\right) = x + \sqrt{3}\,y \longrightarrow D_u t(3,4) = 3 + 4\sqrt{3} \cong 3 + 4(1732) = 9.93$$

La temperatura en (3,4) está aumentando a la rapidez de 9.93 unidades por unidad de cambio en la distancia medida en la dirección de u.

Solución b

$D_u t(-3,1)$ es un máximo cuando U está en la dirección de $\nabla t(-3,1)$. Ya que $\nabla t(-3,1) = -6i + 2j$, la medida en radianes del ángulo que da la dirección de

$\nabla t(-3,1)$ es θ, donde $\tan\theta = -\frac{1}{3}$. Así $\theta = \pi - \operatorname{Tan}^{-1}\frac{1}{3}$. La rapidez de cambio de la temperatura en el punto (-3,1) es máxima en la dirección que hace el ángulo $\theta = \pi - \tan^{-1}\frac{1}{3}$ radianes con el lado positivo de las x.

Por ejemplo sea P(x,y) punto fijo y considerar la derivada direccional $D_u f(x,y)$ cuando $\mathbf{U = < u_1, u_2 >}$ varía. Para un vector unitario dado, l a derivada direccional puede ser:

Positiva $\Rightarrow$ f(x,y) aumenta ; Negativa $\Rightarrow$ f(x,y) disminuye ó puede ser cero.

Ejemplo#3

a) Encuentre la derivada direccional máxima de $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ en P(1,1).

b) La dirección en que se presenta la derivada direccional.

Solución b

$f_x = 4x + 3y$; $f_y = 3x + 8y$; $\nabla f = f_x i + f_y j$; $\nabla f = (4x + 3y)i + (3x + 8y)j$

$\nabla f(P) = (4(1) + 3(1))i + (3(1) + 8(1))j$,

$\nabla f(P) = 7i + 11j$; dirección en la que se presenta la derivada direccional.

Solución a

Derivada direccional máxima de f en P

$$\left|\nabla f(P)\right| = \left|7i + 11j\right| = \sqrt{7^2 + 11^2} = \sqrt{49 + 121} = \sqrt{170}$$

$$U = \frac{\nabla f(P)}{\left|\nabla f(P)\right|} = \frac{7i + 11j}{\sqrt{170}}$$

Antes de ver un ejemplo un poco mas complejo haremos algunas aclaraciones importantes para una mejor comprensión del ejemplo.

En el caso de dos dimensiones, es útil imaginar la derivada direccional $D_u f(x,y)$ como la pendiente de una curva sobre la superficie z = f(x,y). Si **U = <a,b>** es un vector unitario (bidimensional), entonces el cociente

$$f\left(\frac{(x + at, y + bt) - f(x,y)}{t}\right) = \frac{\text{elevacion vertical}}{\text{recorrido horizontal}}$$

Es una razón promedio de cambio de la altura a lo largo de la curva z = f(x,y), mostrada en la figura 3.2.2. El límite de este cociente cuando t $\rightarrow$0 es (por definición) el valor de la derivada direccional $D_u f(x,y)$. Por lo tanto, $D_u f(x,y)$ es igual a la pendiente (razón de la elevación vertical a la carrera horizontal) de la tangente en (x,y,f(x,y)) a la curva indicada. Por lo tanto trate de imaginar que si z = f(x,y) es una colina, entonces $D_u f(x,y)$ es la razón a la que se asciende (por unidad de distancia horizontal) cuando se produce en la dirección (horizontal) de **U**. El ángulo al que se asciende cuando se camina es esta dirección es $\gamma = \arctan\left(D_u f(x,y)\right)$, que aparece en la sección transversal de la figura 3.2.3.

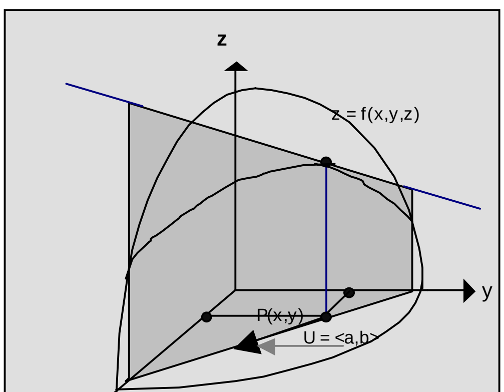


Fig 3.2.2

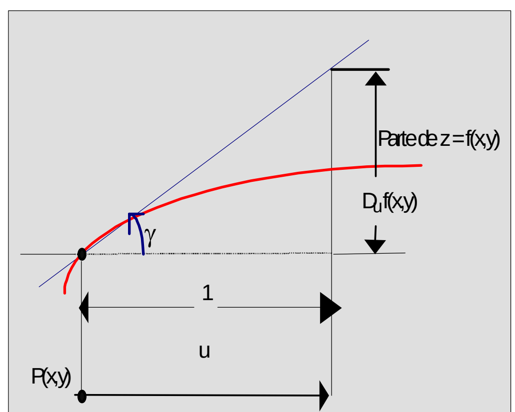


Fig 3.2.3

Ejemplo#4

Si una persona se encuentra en el punto (-100,-100,430) sobre una colina que tiene la forma de la gráfica f = 500 - (0.003)x^2 - (0.004)y^2.

a) Cual será la razón a la que avanza si se dirige hacia al noroeste ?.
b) A qué ángulo con respecto a la horizontal estará subiendo ?

Solución a

f_x = -(0.006)x, f_y = -(0.008)y ; ∇f = -(0.006)xi - (0.008)yj

El vector gradiente de f(x,y) en el punto P(-100,-100) al introducir los valores de x ,y es

$$\nabla f(P) = -(0.006)(-100)i - (0.008)(-100)j = 0.6i + 0.8j$$

Puesto que el " norte (Eje y) " significa la dirección de j y el " este (eje x) " la dirección de i, el vector unitario de dirección noroeste es, ver figura 3.2.4.

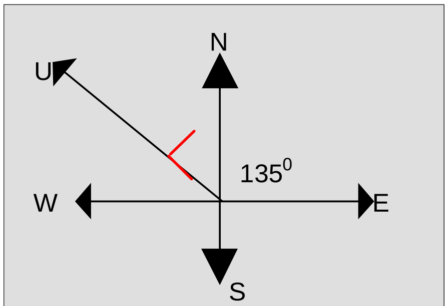


Fig 3.2.4

$$\theta = 90° + 45° = 135°$$

$U = i\cos 135^0 + j\,\mathrm{sen}135^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j$; Por lo tanto, la razón con la que asciende si se dirige hacia noroeste será $D_u f(P) = \nabla f(P).U = (0.6)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (0.8)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $D_u f(P) \approx 0.14$ pies verticales por cada pie horizontal.

Solución b

$\theta = \tan^{-1} D_u f(P) = \tan^{-1}(0.14) = 7.96^0 u \approx 8^0$; Usted estaría subiendo con un ángulo aproximado
de $\tan^{-1}(0.14)$ o sea 8^0 con respecto a la horizontal.

♦ 3.3 Curvas y superficies de nivel

Es otro método gráfico utilizado para representar geométricamente una función f de dos variables, es decir es otra forma de visualizar una función de dos variables. Estas curvas se caracterizan por que son puntos (x,y) sobre los cuales el valor de f(x,y) es constante.

Si una función de dos variables está dada por z = f(x,y), entonces las curvas definidas por f(x,y) = k, para una k apropiada, se denomina "Curvas de Nivel". La palabra "Nivel" surge de que podemos interpretar f(x,y) = k como la proyección sobre el plano **xy** de la curva de la intersección o traza, de z = f(x,y) y el plano z = k, horizontal o de nivel.

Definición de curvas de nivel:

Una curva de nivel es el lugar geométrico de todos los puntos (x,y) perteneciente a A que
originan valores iguales de la función f(x,y).

Al conjunto de curvas de nivel, que se obtiene al considerar diferentes valores de la constante k, se les llama mapa de contorno. Con estos mapas se facilita la representación de una curva de nivel. Geométricamente las curvas de nivel no son mas que secciones planas paralelas a los planos coordenados. Según la definición estas secciones serán paralelas al plano **xy**. Es importante observar que cuando un punto (x,y) se mueve sobre una curva de nivel, los valores f(x,y) de la función no cambian.

Ejemplo#1

Trazar las curvas de nivel de la siguiente función $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$.

Solución

Las curvas de nivel son las gráficas de las ecuaciones de la forma $f(x,y) = k$, es decir,
$9 - x^2 - y^2 = k$ o bien $x^2 - y^2 = 9 - k$ en el plano **xy.** Estas son circunferencias cuando $0 \leq k < 9$. Para valores de $k = 0, 2, 4, 6, 8$, se tienen las curvas de nivel de la figura 3.3.1.

El comando utilizando el software Mathematica para la curva de nivel es el siguiente

ContourPlot[9-X^2-Y^2,{X,-8,8},{Y,-8,8}]

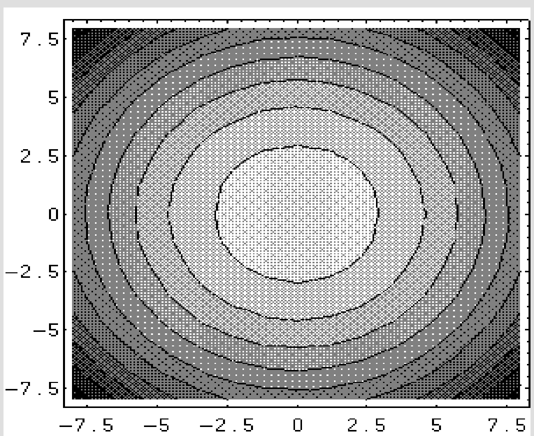


Fig.3.3.1

El concepto de curvas de nivel para funciones de dos variables se generaliza a superficie de nivel para funciones de tres variables.

Si f es una función de tres variables, entonces, por definición, las ***"superficies de nivel"*** son las gráficas de $f(x,y,z) = k$, para los diferentes valores de k.

Definición de superficie de nivel:

Una superficie de nivel es el lugar geométrico de todos los puntos (x,y,z) perteneciente a A que originan valores iguales de la función f(x,y,z).

Ejemplo#2

Represente las siguiente función mediante superficies de nivel, $f(x,y,z) = x + y + z$.

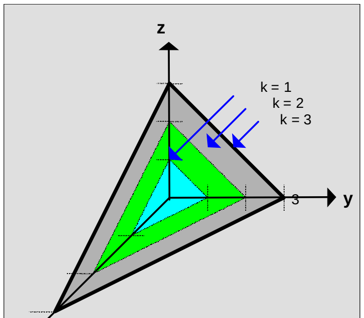


Fig 3.3.2

Solución

$x + y + z = k$, esta función representa la siguiente familia de planos.

Aplicaciones de las curvas de nivel

En la ciencia nos encontramos frecuentemente con las palabras isotérmica, equipotencial o isobárica. Estos términos son aplicados a rectas o curvas según las cuales la temperatura, el potencial o la presión barométrica es constante.

Las curvas de nivel se usan frecuentemente en la elaboración de mapas orográficos o planos de configuración (planos acotados).

- Mapas hidrográficos
  Usado para la configuración del fondo de un lago.
- Mapas Meteorológicos
  Usado para la configuración de la temperatura de un día (**I**sotermas).
- Mapas Meteorológicos
  También puede ser usado para la configuración de presión atmosférica(isóbaras).
- Mapas Topográficos
  Usado para la configuración de regiones que representan la superficie terrestre, curvas representan alturas sobre el nivel del mar.
- Mapas de Superficies equipotenciales
  Usado para la configuración de potencial eléctrico.

♦ 3.4 Regla de la cadena

La regla de la cadena para funciones compuestas de una variable es ya conocida, lo que interesa ahora es la generalización para funciones de varias variables.

Si una función $w = f(x,y)$, donde **x** y **y** son funciones de la misma variable t **x = g(t)** y **y = h(t)**. La función compuesta f(g(t), h h(t)) es entonces una función de variable simple t y el siguiente teorema expresa la derivada en términos de las derivadas parciales de f y las derivadas ordinarias de g y h.

Teorema A:

Supóngase que $w = f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas de primer orden y que $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones diferenciables. Entonces, w es una función diferenciable de **t** y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Este teorema puede extenderse a una función de tres variables $\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$, Primero escribimos w en función de t y calculando después la derivada ordinaria de una variable con respecto a t .

Ejemplo#1

Supóngase que $w = e^{xy}$, $x = t^2$, $y = t^3$, encontrar $\frac{dw}{dt}$.

Solución

$\frac{\partial w}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial w}{\partial y} = xe^{xy}$ y $\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 3t^2$; $\frac{dw}{dt} = \left(ye^{xy}\right)\left(2t\right) + \left(xe^{xy}\right)\left(3t^2\right)$;

aplicando el teorema A

$$\frac{dw}{dt} = \left(t^3 e^{t^2 t^3}\right)\left(2t\right) + \left(t^2 e^{t^2 t^3}\right)\left(3t^2\right) = \left(t^3 e^{t^5}\right)\left(2t\right) + \left(t^2 e^{t^5}\right)\left(3t^2\right)$$

$$\frac{dw}{dt} = 2t^4 e^{t^5} + 3t^4 e^{t^5} = e^{t^5} 5t^4.$$

Teorema B (Regla de la cadena general):

Sean $x = x(s,t)$ y $y = y(s,t)$ dos funciones que tienen primeras derivadas parciales en (s,t) y sea $f(x,y)$ diferenciables $(x(s,t), y(s,t))$. Entonces $w = f(x(s,t),y(s,t))$ tienen primeras derivadas parciales, dadas por : $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$; $\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$;

El teorema anterior puede generalizarse a funciones de tres variables.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}; \qquad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

El ***"Modelo molecular"*** de la figura 3.4.1 ilustra la ultima fórmula

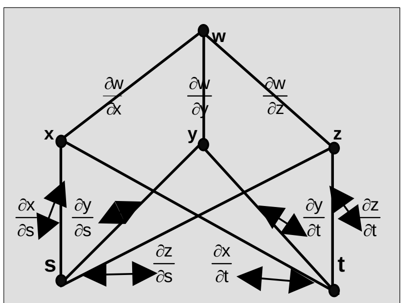


Fig 3.4.1

- *El átomo superior representa la variable independiente w.*
- *Los átomos de segundo nivel representan las variables intermedias x , y y z.*
- *Los últimos átomos representan las variables independientes s y t.*

Cada "enlace" del diagrama representa una derivada parcial que abarca las dos variables representadas por los átomos unidos mediante el enlace.

Ejemplo#2

Encuentre ∂**w/**∂**t** usando la Regla de la cadena, exprese su respuesta final en términos de t,
w = xy + yz + xz, x = t^2, y = 1- t^2, z = 1- t

Solución

Derivadas de x,y,z $\frac{\partial x}{\partial t} = 2t$; $\frac{\partial y}{\partial t} = -2t$; $\frac{\partial z}{\partial t} = -1$

Derivadas de w respecto a x,y,z $\frac{\partial w}{\partial x} = y + z$; $\frac{\partial w}{\partial y} = x + z$; $\frac{\partial w}{\partial z} = x + y$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (y+z)(2t) + (x+z)(-2t) + (x+y)(-1) = -1 + 2t - 4t^3$$

PROGRAMACIÓN

Programa para resolver ejercicios de la regla de la cadena para cualquier función ya sea de dos o tres variables en base a t o s.

```
RegCad[W_,St_]:=Module[{Dx,Dy,Dz,Wx,Wy,Fx,Fy,Fz,
                       Wz,PDwx,PDwy,PDwz,Derwt,Dwt,Ds,Dws},
Print[" "];
Print["Salida del programa"];
Print[" "];
Print[StringForm["Función de entrada W=``",W]];
Cecs=Input["Introduzca la cantidad de funciones"];
Print[StringForm["Cntidad de funciones Cecs=``",W]];
Print[" "];
 If[Cecs==3,
  Fx=Input["Introduzca la función en X"];
  Fy=Input["Introduzca la función en Y"];
  Fz=Input["Introduzca la función en Z"];
  If[St==T,
   Print["Funciones de tres variables x,y,z en t"];
   Print[StringForm["Función x=``",Fx]];
   Print[StringForm["Función y=``",Fy]];
   Print[StringForm["Función z=``",Fz]];
   Dx=D[Fx,T];
   Dy=D[Fy,T];
   Dz=D[Fz,T];
   Print["*******Derivadas respecto a t"];
   Print[StringForm["Derivada Dx=``",Dx]];
   Print[StringForm["Derivada Dy=``",Dy]];
   Print[StringForm["Derivada Dz=``",Dz]];
   Print["*******Derivadas de w respecto a x,y,z"];
   Wx=D[W,X];
   Wy=D[W,Y];
```

```
    Wz=D[W,Z];
    Print[StringForm["Derivada en x Wx=``",Wx]];
    Print[StringForm["Derivada en y Wy=``",Wy]];
    Print[StringForm["Derivada en z Wz=``",Wz]];
    Print["********************Productos"];
    PDwx=Expand[Dx*Wx];
    PDwy=Expand[Dy*Wy];
    PDwz=Expand[Dz*Wz];
    Print[StringForm["Prod Dx*Wx PDwx=``",PDwx]];
    Print[StringForm["Prod Dy*Wy PDwy=``",PDwy]];
    Print[StringForm["Prod Dz*Wz PDwz=``",PDwz]];
    Print["Introduciendo las funciones x,y,z"];
    Derwt=Simplify[PDwx+PDwy+PDwz];
    Dwt=Simplify[Derwt/.{X->Fx,Y->Fy,Z->Fz}];
    Print[StringForm["Derwt=``",Derwt]];
    Print[StringForm["Dwt=``",Dwt]];
  ];
  If[St==S,
    Print["Funciones de tres variables en S"];
    Print[StringForm["Función x=``",Fx]];
    Print[StringForm["Función y=``",Fy]];
    Print[StringForm["Función z=``",Fz]];
    Dx=D[Fx,S];
    Dy=D[Fy,S];
    Dz=D[Fz,S];
    Print["*******Derivadas respecto a S"];
    Print[StringForm["Derivada Dx=``",Dx]];
    Print[StringForm["Derivada Dy=``",Dy]];
    Print[StringForm["Derivada Dz=``",Dz]];
    Print["*******Derivadas de w respecto a x,y,x"];
    Wx=D[W,X];
    Wy=D[W,Y];
    Wz=D[W,Z];
    Print[StringForm["Derivada en x Wx=``",Wx]];
    Print[StringForm["Derivada en y Wy=``",Wy]];
    Print[StringForm["Derivada en z Wz=``",Wz]];
    Print["********************Productos"];
    PDwx=Expand[Dx*Wx];
    PDwy=Expand[Dy*Wy];
    PDwz=Expand[Dz*Wz];
    Print[StringForm["Prod Dx*Wx PDwx=``",PDwx]];
    Print[StringForm["Prod Dy*Wy PDwy=``",PDwy]];
    Print[StringForm["Prod Dz*Wz PDwz=``",PDwz]];
    Print["Introduciendo las funciones x,y,z"];
    Ds=Simplify[PDwx+PDwy+PDwz];
    Dws=Simplify[Ds/.{X->Fx,Y->Fy,Z->Fz}];
    Print[StringForm["Ds=``",Ds]];
    Print[StringForm["Dwt=``",Dws]];
  ],
 If[Cecs==2,
  Fx=Input["Introduzca la función en X"];
  Fy=Input["Introduzca la función en Y"];
  If[St==T,
    Print["Funciones de dos variables x,y en t"];
    Print[StringForm["Función x=``",Fx]];
    Print[StringForm["Función y=``",Fy]];
```

```
      Dx=D[Fx,T];
      Dy=D[Fy,T];
      Print["*******Derivadas respecto a t"];
      Print[StringForm["Derivada Dx=``",Dx]];
      Print[StringForm["Derivada Dy=``",Dy]];
      Print["*******Derivadas de w respecto a x,y"];
      Wx=D[W,X];
      Wy=D[W,Y];
      Print[StringForm["Derivada en x Wx=``",Wx]];
      Print[StringForm["Derivada en y Wy=``",Wy]];
      Print["********************Productos"];
      PDwx=Expand[Dx*Wx];
      PDwy=Expand[Dy*Wy];
      Print[StringForm["Prod Dx*Wx PDwx=``",PDwx]];
      Print[StringForm["Prod Dy*Wy PDwy=``",PDwy]];
      Print["Introduciendo las funciones x,y"];
      Derwt=Simplify[PDwx+PDwy];
      Dwt=Simplify[Derwt/.{X->Fx,Y->Fy}];
      Print[StringForm["Derwt=``",Derwt]];
      Print[StringForm["Dwt=``",Dwt]];
    ];
    If[St==S,
      Print["Funciones de dos  variables en S"];
      Print[StringForm["Función x=``",Fx]];
      Print[StringForm["Función y=``",Fy]];
      Dx=D[Fx,S];
      Dy=D[Fy,S];
      Print["*******Derivadas respecto a S"];
      Print[StringForm["Derivada Dx=``",Dx]];
      Print[StringForm["Derivada Dy=``",Dy]];
      Print["*******Derivadas de w respecto a x,y"];
      Wx=D[W,X];
      Wy=D[W,Y];
      Print[StringForm["Derivada en x Wx=``",Wx]];
      Print[StringForm["Derivada en y Wy=``",Wy]];
      Print["********************Productos"];
      PDwx=Expand[Dx*Wx];
      PDwy=Expand[Dy*Wy];
      Print[StringForm["Prod Dx*Wx PDwx=``",PDwx]];
      Print[StringForm["Prod Dy*Wy PDwy=``",PDwy]];
      Print["Introduciendo las funciones x,y"];
      Ds=Simplify[PDwx+PDwy];
      Dws=Simplify[Ds/.{X->Fx,Y->Fy}];
      Print[StringForm["Ds=``",Ds]];
      Print[StringForm["Dwt=``",Dws]];
   ];
  ];
 ];
]RegCad[(X*Y)+(Y*Z)+(X*Z),T]
```

Salida del programa

Función de entrada W=X Y + X Z + Y Z
Cantidad de funciones Cecs=X Y + X Z + Y Z

Funciones de tres variables x,y,z en t
Función x=T^2
Función y=1 - T^2
Función z=1 - T
*******Derivadas respecto a t
Derivada Dx=2 T
Derivada Dy=-2 T
Derivada Dz=-1
*******Derivadas de w respecto a x,y,z
Derivada en x Wx=Y + Z
Derivada en y Wy=X + Z
Derivada en z Wz=X + Y

********************Productos
Prod Dx*Wx PDwx=2 T Y + 2 T Z
Prod Dy*Wy PDwy=-2 T X - 2 T Z
Prod Dz*Wz PDwz=-X - Y
Introduciendo las funciones x,y,z
Derwt=-X - 2 T X - Y + 2 T Y
Dwt=-1 + 2 T - 4 T^ 3

♦ 3.5 Aproximaciones de Taylor de segundo grado

Los polinomios son las funciones mas fáciles de evaluar ya que solo implica tres funciones aritméticas suma ,resta y multiplicación. Razón por la cual se usan los polinomios como aproximaciones de otras funciones. Si un polinomio lineal da una cierta aproximación a f(x), se espera que un polinomio cuadrático(cuya gráfica es curva) tenga una mejor aproximación. Un ejemplo de aproximaciones son las diferenciales.

Factores que contribuyen a la importancia de los métodos de aproximaciones.

- E l hecho de que muchos conceptos matemáticos que se presentan en las aplicaciones no pueden ser calculadas mediante métodos exactos.
- El invento de las calculadoras y computadoras de gran velocidad que han hecho prácticos los métodos numéricos y han hecho mas fácil los cálculos en forma aproximada sin usar métodos exactos, aún cuando estos estén disponibles.

Supongamos que se considera una función donde el gradiente es el vector cero, ambas derivadas parciales son cero. Entonces el polinomio de Taylor de primer grado para cada función en ese punto es constante. El plano tangente es horizontal y posiblemente la función tiene un extremo local en ese punto. Ahora usemos el polinomio de Taylor de segundo grado para examinar la conducta de funciones cerca del punto.

Si nos acercáramos al gráfico de una función f(a) de una variable en un punto (a,f(a)) donde la función tiene una derivada, entonces el gráfico es semejante a una línea recta. Por cierto el gráfico se ve semejante al del Polinomio de Taylor de primer grado de la función en ***" a "***. Examinemos el diagrama de la figura 3.5.1. La ecuación de la tangente a la curva es **y = f(a) + f '(a)(x-a),** esto nos conduce a la aproximación lineal $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$.

El polinomio lineal $P_1(x) = f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$ se llama "Polinomio de Taylor de primer grado en a" para f(x). Es claro que $P_1(x)$ sea una buena aproximación de f(x) sólo cerca de x = a.

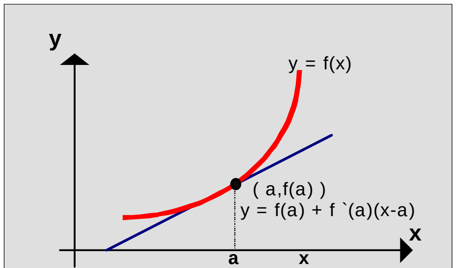


Fig 3.5.1

Polinomio de Taylor de segundo grado para funciones de una variable

Una observación significativa que se debe hacer con respecto al caso lineal es que f y su aproximación P_1 así como sus derivadas f' y P', concuerden para x = a. En la generalización del polinomio cuadrático P_2, impondremos tres condiciones,

$$f(a) = P_2(a)$$
$$f'(a) = P'_2(a)$$
$$f''(a) = P''_2(a)$$

El único polinomio cuadrático que satisface estas tres condiciones es

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2}$$

Polinomio de Taylor de orden n

En forma general un polinomio de Taylor de grado n se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n}$$

Ejemplo#1

Encuentre $P_2(x)$ en x = a, para f(x) = Tanx donde a = $\pi/4$.

Solución

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x; \quad f'(x) = \frac{\cos^2 x(0) - (1(-2\,\text{sen}\,x\cos x))}{(\cos^2 x)^2} = \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{\cos^4 x}$$

Cálculo del polinomio

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)f`(a)}{1!} + \frac{(x-a)^2 f``(a)}{2!}\,; \quad f(x) = \text{Tan}\frac{\pi}{4} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})}{\cos^2\frac{\pi}{4}} + 2\frac{\text{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{\cos^4\frac{\pi}{4}}(x-\frac{\pi}{4})^2$$

$$f(x) = 1 + 2\,(x-\frac{\pi}{4}) + 2\,(x-\frac{\pi}{4})^2$$

Ejemplo#2

Encuentre $P_2(x)$ en a =1 para f(x) = ln(x) y úselo para calcular el valor aproximado del ln(0.9) y ln(1.5).

Solución

$f'(x) = 1/x$ $f''(x) = -1/x^2$ por lo tanto

$f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$; En consecuencia $P_2(x) = 0 + 1(x-1) - (1/2)(x-1)^2$

Por lo tanto $\ln x \approx (x-1) - (1/2)(x-1)^2$

$\ln(0.9) \approx (0.9-1) - (1/2)(0.9-1)^2 = -0.1050$
$\ln(1.5) \approx (1.5-1) - (1/2)(1.5-1)^2 = 0.3750$

Como se dijo anteriormente, este polinomio produce mejores aproximaciones que el polinomio lineal ver figura 3.5.2.

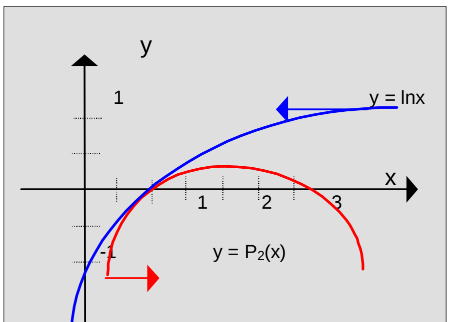


Fig 3.5.2

PROGRAMACIÓN

Polinomio de Taylor para funciones de una variable puede comprobar los ejercicios de este tipo en el programa.

```
PolTay[Polin_,OrP_,K_]:=Module[{F,Dx,Dxx,M,Den,Pd,Exp=1,J=2,B=Pi/4,
                              Px1,Rpol,Tmul},
        Print["  Salida del programa "];
        Print[" "];
        F=Polin/.X->A;
        Print[StringForm["F(x,y) =``",F]];
        Print[StringForm["Orden del polinomio: ``",OrP]];
        Print[StringForm["Valor del factorial ``",K]];
        Tmul=X-A;
        Den=Factorial[K]*(K+1);
        Print[" "];
        Print["***** Derivadas *****"];
        Dx=D[F,A];
        Print["Primera derivada"StringForm["X = ``",Dx]];
        Dxx=D[Dx,A];
        Print["Segunda derivada: "StringForm["XX = ``",Dxx]];
        If[OrP<=2 && OrP!=0,
         For[M=1,(M<=OrP && K<OrP),M=M+2,
          If[(M==OrP && K==0),
           Rpol=F+((Dx/Den)*(Tmul^Exp));
           Print["*** Evaluación del Polinomio ***"];
           Px1=Rpol/.A->B;
```

```
            Print["Sol.Pol"Px1],
            If[(J==OrP && K==1),
              Pd=(Dx/Exp)*(Tmul^Exp);
              Rpol=F+Pd+(Dxx/Den)*(Tmul^OrP);
              Print["*** Evaluación del Polinomio ***"];
              Px1=Rpol/.A->B;
              Print["Solucion del Polinomio"Px1];
            ];
          ];
        ],
      Print["Error al introducir el orden del polinomio"];
      ];
]PolTay[Tan[X],2,1]
(*PolTay[((X^3)-(2*(X^2))+(3*X)+5),2,1]*)
```

Salida del programa

F(x,y) =Tan[A]
Orden del polinomio: 2
Valor del factorial 1
******* Derivadas *******

Primera derivada X = Sec^2[A]
Segunda derivada: XX = 2 Sec^2[A] Tan[A]
***** Evaluación del Polinomio *****

Solución del Polinomio (1 + 2 (-Pi/4+ X) + 2 $(-Pi/4 + X)^2$)

Fórmula Taylor para funciones de dos variables

Supongamos que una función de dos variables z = f(x,y) es continua, lo mismo que todas sus derivadas parciales de orden hasta n+1 inclusive en cierta vecindad del punto M(a,b). Entonces f puede representarse como una suma de un polinomio de n-ésimo grado, desarrollado según las potencias de (x - a) y (y - b) y un resto. Lo que queremos es encontrar el polinomio de grado dos que mejor se aproxima a f(x).

Polinomio de Taylor de "Orden 1"

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Polinomio de Taylor de" Orden 2 "

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + R^2$$

Ejemplo#3

Desarrollar f(x,y) = x^2 y + 3y - 2 en potencias de (x = 1), (y = 2).

Solución

$f_x = 2xy$, $f_{xx} = 2y$, $f_y = x^2 + 3$, $f_{yy} = 0$, $f_{xy} = 2x$

Evaluando con los valores de x y y.

$f_x = 2xy = 2 * 1 * 2 = 4$, $f_{xx} = 2y = 2 * 2 = 4$
$f_y = x^2 + 3 = 1^2 + 3 = 4$, $f_{yy} = 0$
$f_{xy} = 2x = 2 * 1 = 2$

f(a,b) = (1 * 2) + (3*2) -2 = 6

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2 \right]$$

Sustituyendo valores $f(x,y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + \frac{1}{2}\left[4(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2) + 0(y-2)^2 \right]$

♦ 3.6 Plano tangente y aproximaciones

En esta sección lo que se trata de encontrar es la ecuación del plano tangente a la superficie z = f(x,y) que pasa por un punto especificado (x_0,y_0,z_0), ver figura 3.6.1. En la forma más general una superficie se determina mediante una ecuación de la forma F(x,y,z) = k. z = f(x,y,z) se puede escribir como F(x,y,z) = F(x,y) - z = 0. Considerar una curva sobre esta superficie que pasa por el punto (x_0,y_0,z_0). Si la curva es parametrizada por las funciones diferenciables x = x(t), y = y(t) y z = z(t), entonces, para todo t,

F(x(t),y(t),z(t)) = k.

Por la regla de la cadena

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0$$

Esto se puede expresar en términos del gradiente de F y de la derivada de la expresión del vector de la curva r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k como :

$$\nabla F.(dr/dt) = 0$$

dr/dt $\Rightarrow$ es tangente a la curva. Concluimos que el gradiente en (x_0,y_0,z_0) es perpendicular a la tangente en este punto. Este argumento tiene validez para curvas que pasan por el punto (x_0,y_0,z_0) y que pertenecen a la superficie F(x,y,z) = k, ver figura 3.6.2. Esto nos conduce a la siguiente definición.

Definición de plano tangente a la superficie

Sea F(x,y,z) = k una función que determina a una superficie y supóngase que **F** es Diferenciable en un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ de esta superficie con $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ diferente de 0. Entonces, el plano que pasa por P y es perpendicular a $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ se conoce como **“plano tangente”** a la superficie en P.

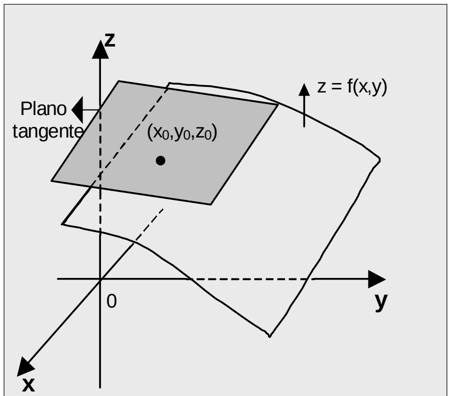


Fig.3.6.1

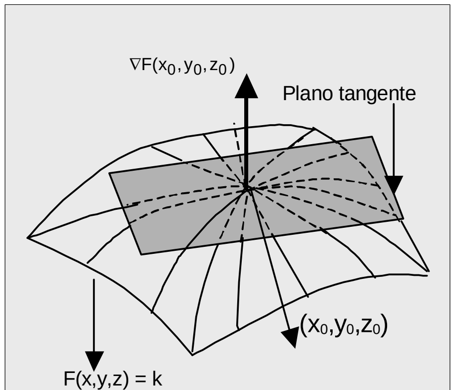


Fig.3.6.2

Teorema sobre planos tangentes

Para la superficie F(x,y,z) = k, la ecuación del plano tangente en (x_0,y_0,z_0), es $f_x(x_0,y_0,z_0)\,(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)\,(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)\,(z-z_0) = 0$.

En forma análoga para la superficie z = f(x,y), la ecuación del plano tangente en $(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ es $z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$.

Ejemplo#1

Encuentre la ecuación del plano tangente de $z = x^2 + y^2$ en el punto P(1,1,2), ver figura 3.6.3.

Solución

Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\nabla f(x,y) = 2xi + 2yj$ Evaluando en x e y ,$\nabla f(1,1) = 2i + 2j$
Por el teorema A la ecuación es : $z - 2 = 2(x-1) + 2(y-1)$ o $2x + 2y - z = 2$

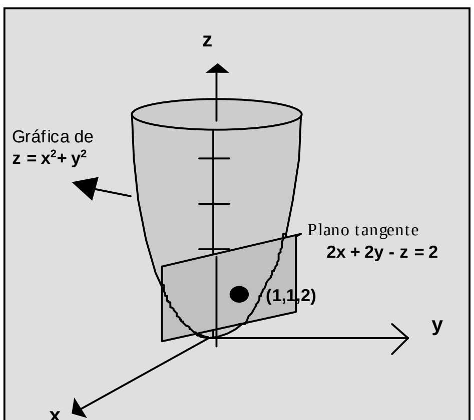


Fig 3.6.3

Ejemplo#2

Encuentre la ecuación del plano tangente de la siguiente función $4x^2 - y^2 + 3z^2 = 10$ en el punto P(2,-3,1).

Solución

$\nabla f(x,y,z) = 8xi - 2yj + 6zk$

Evaluando en (x ,y, z), $\nabla f(2,-3,1) = 16i + 6j + 6k$

Por el teorema A la ecuación es :$16(x-2)+6(y+3)+6(z-1)=0$

Diferenciales y aproximaciones

Las diferenciales desempeñan diversos papeles, pero su uso principal consiste en producir aproximaciones . La noción de diferencial de una función de cualquier número de variables independientes, depende del incremento de la variable dependiente.

Sea $z = f(x,y)$ y $P(x_0,y_0,z_0)$ un punto fijo sobre la superficie correspondiente. Introducir nuevos ejes coordenados (los ejes dx, dy, dz) paralelos a los antiguos; con P como origen, ver figura 3.6.4.

Fig 3.6.4

En el sistema antiguo el plano tangente a P tiene como ecuación

$$z - z_0 = f_x(x_0,y_0) \ (x-x_0 + f_y(x_0,y_0)\ (y-y_0)$$

Para el nuevo sistema toma la siguiente forma

$$dz = f_x(x_0,y_0)\ x + f_y(x_0,y_0)dy;$$

esto sugiere una definición.

Definición:

Sea $z = f(x,y)$, donde f es una función diferenciable y sean dx y dy las variables (llamadas diferenciales de x y y). La diferencial de la variable dependiente dz, llamada también **"diferencial total de f"** y se denota por df(x,y), se define como sigue

$$dz = df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy.$$

La importancia del dz surge del hecho que si $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$ representa pequeños cambios en x y y, entonces dz será una buena aproximación de Δz , el cambio correspondiente en z.

Ejemplo#1

Sea $z = f(x,y) = 2x^3 + xy - y^3$. Calcular Δz y dz cuando (x,y) cambian de (2,1) a (2.03,0.98).

Solución

$f_x = 6x^2 + y$, $f_y = x - 3y^2$, $\Delta x = 0.03$, $\Delta y = -0.02$
$\Delta z = f(2.03, 0.98) - f(2,1)$
$\Delta z = 2(2.03)^3 + (2.03)(0.98) - (0.98)^3 - [2(2)^3 + 2(1) - 1^3] = 0.779062$

$dz = f_x(x,y)\ \Delta x + f_y(x,y)\ \Delta y$

$dz = (6x^2 + y)\,\Delta x + (x - 3y^2)\,\Delta y$

Evaluando en (2,1) con $\Delta x = 0.03$, $\Delta y = -0.02$

$dz = (6(2)^2 + 1)0.03 + (2 - 3(1)^2(-0.02))$

$dz = (25)(0.03) + (-1)(-0.02) = 0.77$

Ejemplo#2

Use la diferencial total dz para aproximar el cambio en z cuando (x,y) se mueve de P a Q.
$z = 2x^2 y^3$ P(1,1) y Q(0.99, 1.02)

Solución

$f_x = 4xy^3$, $f_y = 6x^2y^2$, $\Delta x = -0.01$, $\Delta y = 0.02$

$\Delta z = f(0.99, 1.02) - f(1,1) = 2(0.99)^2 (1.02)^3 - [2 * 1^2 * 1^3]$
$\Delta z = 1.9602 * (1.061208) - 2 = 0.08017992$

$dz = f_x(x,y)\ \Delta x + f_y(x,y)\ \Delta y = 4xy^3(-0.01) + 6x^2y^2(.02)$

Evaluando en (1,1) con $\Delta x = -0.01$, $\Delta y = 0.02$
$dz = 4(1)(1)^3(-0.01) + 6(1)^2(1)^2(0.02) = 0.08$

Ejemplo#3

Un pote cilíndrico de material plástico de 3mm de espesor sin tapa, tiene en el interior 150mm de ancho y 200mm de alto. Determine el volumen aproximado del material.

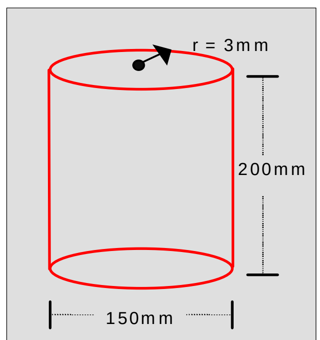


Fig 3.6.5

Solución

Δv = cantidad exacta de material ; dv = cantidad de aproximación del material

D = 150mm ; h = 200mm ; dD = 373mm ; dh = 3mm

$V = b \times h = \pi r^2 h = \pi \dfrac{D^2}{4} h$, $dv = \dfrac{\partial v}{\partial D} dD + \dfrac{\partial v}{\partial h} dh$

$\frac{dv}{dD} = \frac{\pi 2}{4}Dh = \frac{\pi}{2}Dh$, $\frac{dv}{dh} = \frac{\pi D^2}{4}$, $dv = \frac{\pi}{2}Dh\,dz + \frac{\pi}{4}D^2dh$

$$dv = \frac{\pi}{2}(150mm)(200mm)(6mm) + \frac{\pi}{2}(150)^2(3mm) = 336mm^3.$$

♦ 3.7 Máximos y mínimos

En algunas aplicaciones necesitamos con frecuencia encontrar el máximo o el mínimo que pueda alcanzar una función especifica. Las técnicas de máximo y mínimo de variables simples se generalizan de una manera natural para funciones de varias variables.

Para comprender mejor lo que son los máximos y mínimos de funciones de varias variables es necesario recordar algunos conceptos importantes.

- ***Región rectangular***
  Es una región formada por los puntos de un plano coordenado que se encuentran dentro de un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados.
- ***Región rectangular cerrada***
  Si se incluyen los puntos frontera.
- ***Región rectangular acotada***
  Si está contenida en alguna región rectangular cerrada.

Máximo local(o relativo)

Una función f de dos variables tiene un ***máximo local*** en (a,b), si existe una región rectangular **"R"** que contiene a (a,b) tal que **f(x,y) ≤ f (a,b)**

esta desigualdad se cumple para todo (x,y) que pertenezca a la vez al dominio de f y a algún intervalo abierto que contenga a (a,b).

Mínimo local (o relativo)

Una función f de dos variables tiene un ***mínimo local*** en (c,d) si hay una región rectangular ***"R"*** que contiene a (c,d) tal que **f(x,y)** ≥ **f(c,d)** para todo (x,y) en ***"R"***.

Interpretación geométrica de máximos y mínimos locales

Geométricamente, si una superficie ***"S"*** es la gráfica de f, entonces los máximos locales son los puntos más altos de la superficie ***"S"*** (ver ilustración en la figura 3.7.1 y los puntos más bajos de la superficie ***"S"*** son los mínimos locales, (ver ilustración en la figura 3.7.2.

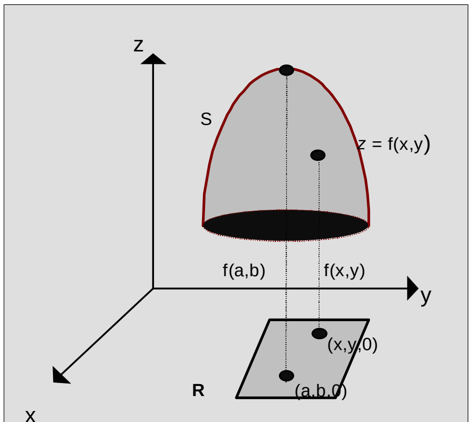


Fig 3.7.1

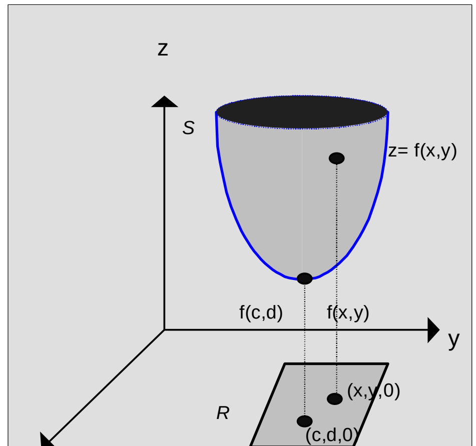


Fig 3.7.2

Teorema 1 (Condiciones necesarias para extremos locales):

Supóngase que f(x,y) alcanza un valor máximo local o un mínimo local en el punto (a,b) y que las derivadas parciales $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ existen. Entonces $f_x(a,b) = 0$; $f_y(a,b) = 0$

Teorema 2 (Existencia de valores extremos):

Si una función f de dos variables es continua en una región cerrada y acotada **"R"**, entonces f tiene ***máximo absoluto*** f(a,b) y un ***mínimo absoluto*** f(c,d) en los puntos (a,b) y (c,d) de **"R".** Esto significa que $\mathbf{f(c,d) \leq f(x,y) \leq f(a,b)}$ para (x,y) en ***"R"***.

Máximos y mínimos absolutos

Considérese primero una función de dos variables, en la cual nos interesan los valores extremos que f alcanza en una región plana ***"R"*** que consta de los puntos sobre y dentro de una curva simple cerrada C como en la figura 3.7.3. Las definiciones son las mismas que para máximos y mínimos locales con la diferencia que los máximos locales son los puntos interiores de la región ***"R".***

Los extremos absolutos de una función pueden producirse de dos formas

Primero algunos extremos relativos también son extremos absolutos
Segundo pueden existir extremos absolutos en un punto del borde de un dominio.

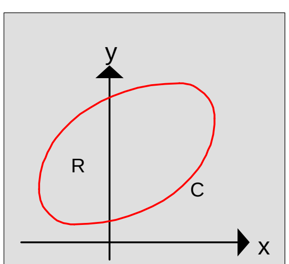


Fig 3.7.3

Los máximos y mínimos locales son los ***valores extremos locales de f***. Los valores extremos incluyen al máximo y mínimo absolutos (si es que existen). Si f tiene primeras derivadas parciales continuas, entonces los pares de números que dan lugar a valores extremos locales son soluciones de las ecuaciones siguientes

$$f_x(x,y) = 0 , \qquad f_y(x,y) = 0$$

Los máximos y mínimos locales se pueden alcanzar también en pares de números en los que f_x o f_y no existen. Estos pares de números son importantes para encontrar máximos y mínimos locales y se les da el nombre de puntos críticos los cuales definiremos a continuación.

Definición de punto crítico o puntos estacionarios):

Sea f una función de dos variables, un par (a,b) es un punto crítico de f si (i) $f_x(a,b) = 0$ y $f_y(a,b) = 0$; (ii) $f_x(a,b)$ o $f_y(a,b)$ no existen.

Como consecuencia de la definición de punto crítico, podemos encontrar los valores máximos y mínimos locales de una función buscando los puntos críticos y luego se prueba cada punto para ver si corresponde a un máximo o a un mínimo local de f. El máximo y mínimo de una función de dos variables se puede alcanzar en un punto en la frontera de su dominio ***"R"***.

Ejemplo#1

Dada la función f definida por $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$. Determinar si **f** tiene extremos relativos.

Solución

Ya que f y sus primeras derivadas parciales existen en toda (x,y) en R_2, diferenciando obtenemos

$f_x(x,y) = 2x - 1$, $f_y(x,y) = 8y + 2$

los puntos críticos son soluciones de sistemas de dos ecuaciones, haciendo cero las primeras derivadas parciales y resolviendo simultáneamente

$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$, es decir, de $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$; $8y + 2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$

El único punto que satisface ambas ecuaciones es $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Podemos concluir que f(x,y)>f(½ , ¼,) para $(x,y) \neq \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ por lo tanto $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}) = (\frac{1}{2})^2 + 4(-\frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{2}) + 2(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$ .Es un mínimo relativo (local) de la función.

Ejemplo#2

Encuentre el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$ suponiendo que el dominio es la región triangular R con vértices (1,2) , (1,-2) y (-1,-2), ver figura 3.7.4.

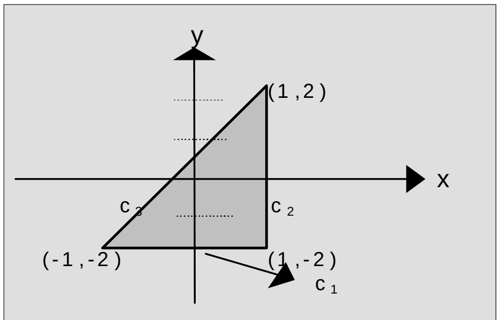


Fig.3.7.4

Solución

$f_x(x,y) = 3x^2 + 3y = 0$; $f_y(x,y) = 3x - 3y^2 = 0$

Resolviendo simultáneamente las derivadas obtuvimos los siguientes puntos críticos
{ (-1,-1), (1,-1), (-1,-1), (0,0) };

En c_1 (ver gráfica 3.7.4) tenemos y = -2 y entonces los valores de f serán $f(x,-2) = x^3 - 6x - 8$. Esto determina la función de una variable cuyo dominio es el intervalo (-1,1) , ver gráfica 3.7.4. $f_x(x,-2) = 3x^2 - 6 = 0$ donde $x = \sqrt{2}$ pero el valor no pertenece al intervalo. Entonces analizamos la frontera en f(-1,-2) = 13 siendo este un máximo.

En c_2 tenemos x = 1, entonces la función toma la forma $f(1,y) = 1 + 3y - y^3$ para $-2 \leq y \leq 2$. La primera derivada de esta función es $-3y^2 + 3$, por lo tanto hay un punto crítico si $-3y^2 = 3$, entonces $y = \sqrt{1} = 1$ vemos que f(1,-1) = -1, por lo tanto evaluando en la frontera obtenemos

f(1,-2) = 3, f(1,2) = -1.

Finalmente en c_3 se tiene $y = x$ y los valores de f están dados por $f(x,x) = x^3 + 3x^2 - x^3$ su primera derivada es $3x^2 + 6x - 3x^2$ la cual no tiene raíces, entonces los valores absolutos están en los puntos Máximo absoluto f(-1,-2) = 13, Mínimo absoluto f(1,-1) = f(1,2) = -1

<u>Problemas de aplicación de máximos y mínimos (optimización)</u>

Los pasos que se te presentan a continuación son para funciones de una variable a las cuales se les puede aplicar el método de máximos y mínimos cerrados, consideramos que es necesario recordar estos pasos para comprender los problemas de aplicación de máximos y mínimos de funciones de dos variables. Cuando nos enfrentamos con problemas de este tipo, existe un paso inicial importante: Se debe determinar la cantidad que se va a maximizar o minimizar, esta cantidad será la variable dependiente en nuestra solución. La variable dependiente debe ser expresada después como función de una variable independiente, la cual ***<u>"controlará"</u>*** los valores de la variable dependiente.

- **Paso 1 "Determinar la cantidad que se va a maximizar o minimizar"**
Esta cantidad, que deberá describir con una palabra o frase corta y marcarla con una letra, será la variable dependiente. Como es la variable dependiente depende de alguna cosa, llamada esta variable independiente.
- **Paso 2 "Expresar la variable dependiente como función de la variable independiente"**
Es necesario usar las condiciones del problema para escribir la variable dependiente en función de x. Dibuje una figura o diagrama y marque las variables; ya que con frecuencia este

es el mejor medio de encontrar las relaciones necesarias, si es necesario utilice variables auxiliares, pero no demasiadas, por que al final tendrá que eliminarlas. Debe expresar la variable dependiente en término de una sola variable independiente x y varias constantes, antes que pueda calcular la derivada. Encuentre el dominio de la función que sea relevante para establecer el problema, así como su fórmula. Obligue el dominio a ser un intervalo cerrado, si es posible; si es un intervalo abierto, acotado adjunte el intervalo.

- **Paso 3 "Aplicar el cálculo para encontrar los puntos críticos"**

Calcular la derivada $f'(x)$ de la función f(x) encontrada en el paso 2. Use la derivada para encontrar los puntos críticos donde $f'(x)=0$ y donde $f'(x)$ no exista.

- **Paso 4 "Identificar los extremos"**

Evaluar la función en cada punto crítico del intervalo cerrado y en los dos extremos. Los valores que obtenga le dirá cuál es el máximo absoluto y cuál es el mínimo, a veces uno o ambos se pueden presentar en más de un punto.

- **Paso 5 "Contestar la pregunta propuesta en el problema"**

Interpretar los resultados. La respuesta al problema establecido puede ser algo más que el valor máximo o mínimo posible de f; por lo tanto se debe dar una respuesta precisa para la pregunta específica que se formuló al inicio.

El análisis de los problemas de aplicación de máximos y mínimos de una función multivariable abarca los mismos pasos que para funciones de una variable. Sin embargo, aquí expresamos la variable dependiente (la cantidad a maximizar o minimizar) como una función f(x,y) de dos variables independientes. Una vez que hemos identificado la región R del plano **xy** como dominio de f, son aplicables los métodos de máximos y mínimos. A menudo se encuentra que se requiere un paso preliminar: Si el dominio significativo de definición de f es una región no acotada, entonces primero hay que restringir f aun plano limitado R en el que sepamos que se presenta el valor extremo deseado.

Ejemplo#3

Encuentre el costo mínimo de la caja rectangular con volumen de 48 pies^2. Esta caja tiene frente y fondo que cuesta \$1/pie^2, tapa y fondo que cuestan \$2/pie^2 y dos lados que cuestan \$3/pie^2.

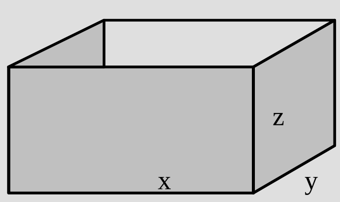


Fig 3.7.5

Solución

La figura 3.7.5 muestra una caja de longitud x, anchura y y altura z. Bajo las condiciones dadas, su costo global sería : C = 2xz + 4xy + 6yz (dólares) como x,y y z no son variables independientes, por que la caja tiene un volumen fijo V = xyz = 48, entonces buscamos z.

Despejando z de la segunda fórmula obtenemos $z = \frac{48}{xy}$ e introduciendo este valor en la primera fórmula, encontramos que el costo que queremos minimizar estará dada por

$C = 2x\left(\frac{48}{xy}\right) + 4xy + 6y\left(\frac{48}{xy}\right) = 4xy + \frac{288}{x} + \frac{96}{y}$ en términos de su longitud x su altura y.

Derivando $\frac{\partial C}{\partial x} = 4y - \frac{288}{x^2} = 0$, $\frac{\partial C}{\partial y} = 4x - \frac{96}{y^2} = 0$ Multiplicando ∂c/∂x por x y ∂c/∂y por y, esto da $\frac{288}{x} = 4xy = \frac{96}{y}$ así que $4xy - \frac{288}{x} = 0$, $4xy - \frac{96}{y} = 0$ Igualando las dos ecuaciones y despejando x nos queda $\frac{288}{x} = \frac{96}{y}$, $x = \frac{288}{\frac{96}{y}} = \frac{285}{1} * \frac{y}{96} = 3y$

Introduciendo este valor de x en ∂C/∂y obtenemos $\frac{\partial C}{\partial y} = 4(3y) - \frac{96}{y^2} = 0$; $12y - \frac{96}{y^2} = 0$ por lo que $12y^3 = 96$ entonces $y = \sqrt[3]{8} = 2$ así x = 3(2) = 6.

El costo mínimo de la caja es : $c(6,2) = 4(6)(2) + \frac{288}{6} + \frac{96}{2} = 48 + 48 + 48 = 144$ dólares, puesto que el volumen de la caja es V = xyz = 48, su altura es $z = \frac{48}{xy} = \frac{48}{6(2)} = 4$, cuando x = 6 y y = 2. Por lo tanto, la caja óptima es de 6pies*2pies*4pies.

3.8 Criterio de la segunda derivada

Como vimos en la sección de valores extremos que para que la función diferenciable f(x,y) tenga máximo o mínimo local en el punto P(a,b), es una condición necesaria que P sea un punto crítico de f; es decir ,que

$$f_x(a,b) = 0 \text{ y } f_y(a,b) = 0 .$$

Con el criterio de la segunda derivada lo que se persigue es dar condiciones suficientes para que f tenga un extremo local en un punto crítico. El criterio que a continuación se presenta involucra las derivadas parciales de segundo orden de f(a,b).

Abreviaturas que simplifican el enunciado del criterio

$A = f_{xx}(a,b)$; $B = f_{xy}(a,b)$; $C = f_{yy}(a,b)$

$\Delta = AC - B^2 = f_{xx}(a,b) * f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)^2]$

Teorema sobre condiciones suficientes para extremos locales:

Sea f una función de dos variables que tiene derivadas parciales continuas en una región rectangular Q.

(i) **Si Δ > 0 y A > 0, entonces f tiene un mínimo en (a,b)**

(ii) **Si Δ > 0 y A < 0, entonces f tiene un máximo en (a,b)**

(iii) **Si Δ < 0, entonces f no tiene ni máximo ni mínimo en (a,b) en vez de ello,**

Es fácil recordar la fórmula para $\Delta(x,y)$ la cual está dado por el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - \left(f_{xy}\right)^2$$

Por lo tanto, f tiene un mínimo local o máximo local en el punto crítico (a,b), siempre que el determinante : $\Delta = AC - B^2$ sea positivo. En este caso, $A = f_{xx}(a,b)$ desempeña el papel de la segunda derivada para funciones de una variable , h**ay un mínimo local en (a,b) si $\Delta>0$ y un máximo local si $\Delta<0$.** Si $\Delta<0$, entonces f no tendrá valores extremos locales en (a,b). En este caso se llama ***"Punto de silla"*** al punto (a,b).

Ejemplo#1

Determine las dimensiones relativas de una caja rectangular sin tapa y con un volumen específico, si se quiere la mínima cantidad de material en su manufactura.

Solución

Sean $x \Rightarrow$ EL # de unidades en la longitud de la base de la caja.
$y \Rightarrow$ EL # de unidades del ancho de la base de la caja.
$z \Rightarrow$ EL # de unidades de la profundidad de la caja.
$S \Rightarrow$ EL # de unidades cuadradas del área de la superficie de la caja.
$V \Rightarrow$ EL # de unidades cubicas del volumen de la caja (V es constante).

x,y,z están en el intervalo $(0, +\infty)$. Por lo tanto, el valor mínimo absoluto de S estará entre los mínimos relativos de S.

Tenemos las ecuaciones : $S = xy + 2xz + 2yz$ ***Ec₁*** y $V = xyz$ ***Ec₂***
Despejando z de la ecuación 2 obtenemos $z = V / xy$, Sustituyendo en la ec1 el valor de z

$$S = xy + 2x\left[\frac{v}{xy}\right] + 2y\left[\frac{v}{xy}\right] = xy + \frac{2v}{y} + \frac{2v}{x}$$

Primeras derivadas parciales obtenidas de la ecuación 1

$$S_x = y + \left[\frac{x(0) - 2V}{x^2}\right] = y - \frac{2V}{x^2} = x^2y - 2V \quad ; \quad S_y = x + \left[\frac{y(0) - 2V}{y^2}\right] = x - \frac{2V}{y^2} = xy^2 - 2V$$

Resolviendo simultáneamente y haciendo las primeras derivadas parciales igual a cero.

$x^2y - 2V = 0$ Ec_3 ; $xy^2 - 2V = 0$ Ec_4

Encontrando x, se despejó de la Ec_3 $x^2 = 2V / y$; $x = \left(\frac{2V}{y}\right)^{1/2}$

elevando x al cuadrado $x = 2V / y^2$ despejando x de la Ec_4 $\left(\left(\frac{2V}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2V}{y^2}\right)^2$

Igualando los valores de **x** y elevando al cuadrado $\frac{2V}{y} = \frac{4V^2}{y^4} = \frac{y^4 2V}{y} = 4V^2$;

$y^3 = \frac{4V^2}{2V} \Rightarrow y^3 = 2V$ entonces $y = \sqrt[3]{2V}$

Encontrando y, se despejó de la Ec_4 $y^2 = 2V / x$; $y = \left(\frac{2V}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$ elevando **y** al cuadrado

$y = 2V / x^2$ despejando y en la Ec_3 $\left(\left(\frac{2V}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2V}{x^2}\right)^2$

Igualando los valores de y y elevando al cuadrado $\frac{2V}{x} = \frac{4V^2}{x^4} = \frac{x^4 2V}{x} = 4V^2$;

$x^3 = \frac{4V^2}{2V} \Rightarrow x^3 = 2V$ entonces $x = \sqrt[3]{2V}$

Segundas derivadas parciales .

$S_{xx} = \left[\frac{2x(2V) - 0(x^2)}{x^4}\right] = \frac{4Vx}{x^4} = \frac{4V}{x^3}$; $S_{yy} = \left[\frac{2y(2V) - 0(y^2)}{y^4}\right] = \frac{4Vy}{y^4} = \frac{4V}{y^3}$

$A = S_{xx} = \frac{4V}{x^3}$, $C = S_{yy} = \frac{4V}{y^3}$, $B = S_{xy} = 1$

Introduciendo valores de x y de y en las segundas derivadas parciales

$S_{xx} = \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^3} = 2 > 0$, $S_{yy} = \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^3} = 2 > 0$

$\Delta = f_{xx}\, f_{yy} - f_{xy}^2 = \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^3} * \frac{4V}{\left(\sqrt[3]{2V}\right)^3} - 1 = 2 * 2 - 1 = 3 > 0$

Como $\Delta > 0$ y $A > 0$, concluimos que S tiene un valor mínimo relativo y un mínimo absoluto

cuando $x = \sqrt[3]{2V}$, $y = \sqrt[3]{2V}$

De estos valores de (x, y) obtenemos que $z = \frac{V}{xy} = \frac{V}{\sqrt[3]{2V}\ \sqrt[3]{2V}} = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}}$ Racionalizando Z

$$\frac{v}{\sqrt[3]{4v^2}} = \frac{v}{\sqrt[3]{4v^2}} * \frac{\sqrt[3]{2v}}{\sqrt[3]{2v}} = \frac{v\sqrt[3]{2v}}{\sqrt[3]{8v^3}} = \frac{v\sqrt[3]{2v}}{2v} = \frac{\sqrt[3]{2v}}{2}$$

Por lo tanto concluimos que la caja debe tener una base cuadrada y una profundidad que es un medio de la longitud de un lado de la base.

Ejemplo#2

Encuentre los valores extremos de la siguiente función $f = 2x^2 - 3y^2 + 2x - 3y + 7$.

Solución

$f_x = 4x + 2$, $f_y = -6y - 3$

Igualando a cero las primeras derivadas parciales tenemos

$4x + 2 = 0 \Rightarrow 4x = -2$ siendo $x = (-1/2)$
$-6y - 3 = 0 \Rightarrow -6y = 3$ siendo $y = (-1/2)$

Sustituyendo estos valores en la función dada

$f = 2(-1/2)^2 - 3(-1/2)^2 + 2(-1/2) - 3(-1/2) + 7.$
$f = (2(-1/4)) - (3(-1/4)) + 2(-1/2) - 3(-1/2) + 7.$

$f(-1/2,-1/2) = 29/4$

Cálculo de delta (Δ)

$A = f_{xx}(x,y) = 4$
$C = f_{yy}(x,y) = -6$
$B = f_{xy}(x,y) = 0$

$\Delta = f_{xx}(f_{yy}) - f_{xy} = 4(-6) - 0 = -24$
Concluimos que $\Delta < 0$, entonces f no tiene máximo ni mínimo en (a,b), en vez de ello es un punto de silla según la propiedad 3 del criterio de la segunda derivada.

PROGRAMACIÓN

Este programa determina los puntos críticos de cualquier función (si es que existen), utilizando el criterio de la segunda derivada.

```
PuntoCritico[Fn_]:=Module[{Fx,Fy,A,B,Cy,Pcrit,CantPc,Xc,Yc,M,Axx,Bxy,Cyy,Discrim},
  Print[" "];
  Print["Salida del programa"];
  Print["Función de entrada"StringForm["F(x,y)=``",Fn]];
  Print[" "];
  Fx=D[Fn,X];
  Fy=D[Fn,Y];
  A=D[Fx,X];
  B=D[Fn,X,Y];
  Cy=D[Fy,Y];
  Pcrit=Solve[{Fx==0,Fy==0},{X,Y}];
```

```
Print["Solución de las derivadas"];
Print[" "];
Print["Punto(s) crítico(s)Pc = ",Pcrit];
CantPc=Length[Pcrit];
Print["Cantidad de pts críticos Pcrit = ",CantPc];
If[CantPc==1,
        Print["*******************************"];
        Print["Derivadas con un punto crítico"];
        Print["*******************************"];
        Punto=First[Pcrit];
        Xc=First[First[Pcrit]];
        Yc=Last[Last[Pcrit]];
        Axx=A/.{Xc,Yc};
        Bxy=B/.{Xc,Yc};
        Cyy=Cy/.{Xc,Yc};
        Print["Evaluando Fxx "StringForm["Fxx = ``",Axx]];
        Print["Evaluando Fyy "StringForm["Fy = ``",Cyy]];
        Print["Evaluando Fxy"StringForm["F(xy) = ``",Bxy]];
        Discrim=N[Simplify[(Axx*Cyy)-Bxy^2]];
        If[Abs[Discrim]<0.001,
        Print["Valor indeterminado"];
    ];
        If[Discrim<0,
          Print[" "];
          F=Fn/.{Xc,Yc};
          Print["*****************************"];
          Print["F(x,y) no tiene máximo(s) ni mínimo(s)"];
          Print["Es un punto de Silla en el punto",Punto];
          Print[StringForm["Evaluación de F(x,y)= ``",F]];
        ];
    If[(Discrim>0&&Axx>0),
          F=Fn/.{Xc,Yc};
          Print["*****************************"];
          Print["Es un Mínimo en el punto ",Punto];
          Print[StringForm["Evaluación de F(x,y)= ``",F]];
        ];
        If[(Discrim>0&&Axx<0),
          F=Fn/.{Xc,Yc};
          Print["*****************************"];
          Print["Es un Máximo en el punto ",Punto];
          Print["Evaluación de F(x,y)= ``",F];
        ],
Print["*************************************"];
Print["Derivadas con más de un punto crítico"];
Print["*************************************"];
Axx=A/.Pcrit;
Bxy=B/.Pcrit;
Cyy=Cy/.Pcrit;
Discrim=(A*Cy)-B^2/.Pcrit;
Print["Evaluación Fxx en x"StringForm["A = ``",Axx]];
Print["Evaluación Fxy en xy"StringForm["B = ``",Bxy]];
Print["Evaluación Fyy en y"StringForm["C = ``",Cyy]];
Print["Discriminante"StringForm["=``",Discrim]];
L=Length[Discrim];
For[M=1,M<=L,M++,
   If[Abs[Discrim[[M]]]<0.001,
```

```
      Print["Valor indeterminado"];
    ];
    If[(Discrim[[M]]>0&&Axx[[M]]>0),
      F=Fn/.Pcrit[[M]];
      Print["**********************************"];
        Print["Es un Mínimo en el punto ",Pcrit[[M]]];
        Print[StringForm["Evaluación de F(x,y)= ``",F]];
    ];
    If[(Discrim[[M]]>0&&Axx[[M]]<0),
        F=Fn/.Pcrit[[M]];
        Print["**********************************"];
        Print["Es un Máximo en el punto ",Pcrit[[M]]];
        Print[StringForm["Evaluación de F(x,y)= ``",F]];
    ];
    If[Discrim[[M]]<0,
        F=Fn/.Pcrit[[M]];
        Print["**********************************"];
        Print["F(x,y) no tiene máximo(s) ni mínimo(s)"];
        Print["Es un punto de Silla en el punto ",Pcrit[[M]]];
        Print[StringForm["Evaluación de F(x,y)= ``",F]];
    ];
  ];
 ];
]PuntoCritico[(2*X^2)-(3Y^2)+(2*X)-(3*Y)+7]
```

Salida del programa

Función introducida F(x,y)=7 + 2 X + 2 X^2 - 3 Y^2 - 3 Y
Resolución simultánea de las ecuaciones Punto(s) Crítico(s)
Pc = {{X -> -(1/2), Y -> -(1/2)}}

Cantidad de puntos críticos Pcrit = 1
****
Evaluando Fxx   Fxx = 4
Evaluando Fyy   Fy = -6
Evaluando Fxy F(xy) = 0

****
La función no tiene máximo(s) ni mínimo(s)
Es un punto de Silla en el punto{X -> -1/2, Y -> -1/2)}
Evaluación de F(x,y)= 29/4.

♦ 3.9 Método de Lagrange

En muchos problemas prácticos se desea hallar el valor máximo o mínimo de una función. Por ejemplo : Un fabricante desea maximizar sus utilidades pero es probable que tenga restricciones por la cantidad de materia prima disponible y la cantidad de mano de obra, etc. Algunos problemas que existen en la vida real, sujetos a condiciones, especialmente en economía, es posible resolverlos a través del método de Lagrange***(máximos y mínimos condicionados)***.

Veamos un ejemplo para introducir el tema

Sea f(x,y) la temperatura en un punto P(x,y) de la lámina plana de metal de la figura. Y sea C una curva con ecuación rectangular g(x,y) = 0. Lo que interesa en encontrar los puntos de la curva donde la temperatura es máxima o mínima, siendo equivalente a encontrar los máximos y mínimos de f(x,y) con la restricción g(x,y) = 0 Ec1. El método para calcular esto consiste en aplicar el método de los múltiplos de Lagrange.

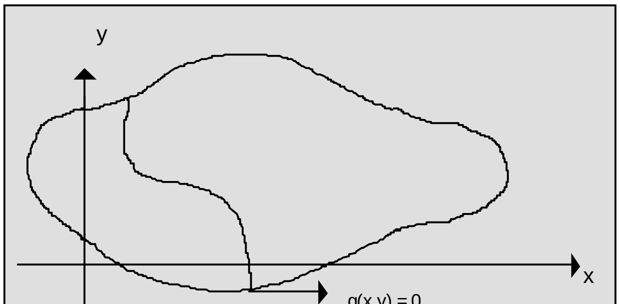


Fig 3.9.1

Teorema de Lagrange A (una restricción):

Sean f(x,y) y g(x,y) dos funciones con primeras derivadas parciales continuas tales que f tiene un máximo o un mínimo $f(x_0,y_0)$ cuando (x,y) está sujeto a la restricción g(x,y) = 0. Si $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$, entonces existe un número real λ **tal que** $\boldsymbol{\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)}$ Ec_1

El número λ que aparece en el teorema es al que se le llama multiplicador de Lagrange. La Ec_1 y sus componentes escalares producen las tres ecuaciones siguientes

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$ y $g(x,y) = 0$, o equivalentemente

$$f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \quad ; \quad f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \quad ; \quad g(x,y) = 0$$

Si f, esta sujeta a la restricción g(x,y) = 0, tiene un máximo y un mínimo en (x_0,y_0), entonces (x_0,y_0) debe ser solución de las tres ecuaciones anteriores. Por lo tanto para encontrar los máximos y los mínimos es necesario encontrar los puntos (a,b) que para algún valor adecuado λ satisfacen las tres ecuaciones anteriores. Si f tiene un máximo o un mínimo, este será el mayor o menor de los valores de la función en esos puntos.

Multiplicadores de Lagrange para funciones de tres variables

Supóngase ahora que f(x,y,z) y g(x,y,z) tiene derivadas parciales continuas de primer orden y que queremos encontrar los puntos de la superficie g(x,y,z) = 0 en donde la función f(x,y,z) alcanza sus valores máximos y mínimos.

Comencemos encontrando la solución del sistema de ecuaciones.

$$\nabla f(x,yz) = \lambda \nabla g(x,y,z) \quad \text{y} \quad g(x,y,z) = 0$$

o equivalentemente, del sistema $f_x = \lambda g_x$; $f_y = \lambda g_y$; $f_z = \lambda g_z$; $g = 0$

Ejemplo#1

Cual es el área máxima que puede tener un rectángulo si la longitud de su diagonal es 2.

Solución
Colocar el rectángulo en el primer cuadrante con dos de sus lados a lo largo de los ejes coordenados; entonces , el vértice opuesto al origen tendrá como coordenada (x,y), siendo positivas x y y . La longitud de su diagonal será $\sqrt{x^2+y^2}=2$ y su área xy.
Ahora podemos formular el problema como maximización de f(x,y) = xy sujeta a la restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

Derivando

$g_x = 2x$, $g_y = 2y$; $f_x = y$, $f_y = x$

Calculando el gradiente

$\nabla f(x,y) = f_x(x,y)i + f_y(x,y)j = yi + xj$
$\nabla g(x,y) = g_x(x,y)i + g_y(x,y)j = 2xi + 2yj$

$\nabla f(x,y) = \lambda\nabla g(x,y)$
$yi + xj = \lambda(2xi + 2yj)$

Formulando las ecuaciones de Lagrange y resolviendo simultáneamente

$$\left.\begin{array}{l} y=\lambda 2x \quad *y \text{ multiplicando la } Ec_1 \text{ por } y \\ x=\lambda 2y \quad *x \text{ multiplicando la } Ec_2 \text{ por } x \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right| Ec_1, Ec_2, Ec_3$$

$$y^2 = y\lambda(2x) \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2\lambda xy$$
$$x^2 = x\lambda(2y) \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2\lambda xy$$

En la Ec3 sustituye y^2 por x^2. Por lo tanto $x^2 = y^2$ Ec. 4.

$$x^2 + x^2 = 4 \quad ; \quad 2x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{2} = 2 \quad , \quad x = \sqrt{2} \quad \text{por lo tanto } y = \sqrt{2}$$

Sustituyendo los valores de x *y* y en las ecuaciones 1,2,3 obtenemos

$$y = 2\lambda x; \quad \sqrt{2} = \lambda 2\sqrt{2} \quad = \quad \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad , \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

La solución de la ecuación de 1a 2 es $x = y = \sqrt{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$

Concluimos que el rectángulo de máxima área con diagonal 2 es el cuadrado cuyos lados miden $\sqrt{2}$. Su área es 2. En la figura 3.9.2 se muestra una interpretación geométrica de este problema.

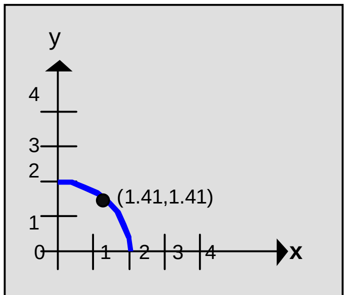


Fig 3.9.2

Multiplicadores de Lagrange caso de dos restricciones

En matemática cuando se va aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange nos encontramos con algunos problemas cuyo caso es aquel que tiene dos restricciones (o condiciones laterales) para ello se debe de aplicar el siguiente teorema.

Supóngase que se desean encontrar los valores máximos y mínimos de la función f(x,y,z) en los puntos de la curva de intersección de dos superficies g(x,y,z) = 0 y h(x,y,z) = 0. Como este problema es un caso de multiplicadores de Lagrange de dos restricciones esta situación se resuelve aplicando el siguiente teorema.

Teorema B Múltiplos de Lagrange (dos restricciones):

Sean f(x,y,z), g(x,y,z), h(x,y,z) funciones con primeras derivadas parciales continuas. Si el valor máximo (o mínimo) de f sujeto a las dos condiciones

$$g(x,y,z) = 0 \quad y \quad h(x,y,z) = 0 \qquad Ec_1$$

Se presenta en el punto P donde los vectores $\nabla g(P)$ y $\nabla h(P)$ son diferentes de cero y no paralelos, entonces $\nabla f(P) = \lambda_1 \nabla g(P) + \lambda_2 \nabla h(P)$ Ec_2 para algún par de constantes λ_1 y λ_2 .

Como $\nabla g(P)$ y $\nabla h(P)$ son diferentes de cero y no paralelos, por lo que $\nabla f(P)$ es la suma de sus proyecciones sobre $\nabla g(P)$ y $\nabla h(P)$. Podemos ver esto en al figura 3.9.3, esto implica la Ec_2 del teorema B.

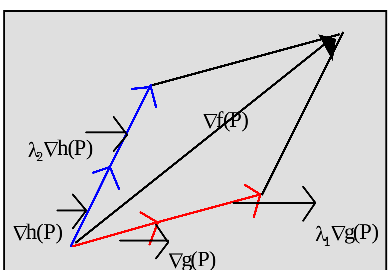


Fig 3.9.3

En síntesis la formulación de las ecuaciones es a como sigue

$f_x(x,y,z) = \lambda_1 g_x(x,y,z) + \lambda_2 h_x(x,y,z)$ Ec_2a

$f_y(x,y,z) = \lambda_1 g_y(x,y,z) + \lambda_2 h_y(x,y,z)$ Ec_2b

$f_z(x,y,z) = \lambda_1 g_z(x,y,z) + \lambda_2 h_z(x,y,z)$ Ec_2c

$g(x,y,z) = 0$

$h(x,y,z) = 0$

Ejemplo#2

El plano $x + y + z = 12$ corta al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse, como en la figura 3.9.4. Encuentre los puntos más alto y más bajo de esta elipse y determine en consecuencia sus semiejes.

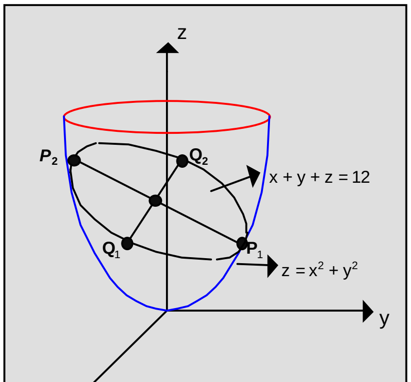


Fig 3.9.4

Solución

La altura de un punto (x,y,z) en z, por lo que se quiere encontrar los valores máximo y mínimo de f(x,y,z) = z. sujeta a las condiciones

$g(x,y,z) = x + y + z - 12 = 0$ y $h(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$

Formulación de las ecuaciones de Lagrange

$$f_x(x,y,z) = \lambda_1 g_x(x,y,z) + \lambda_2 h_x(x,y,z)$$
$$f_y(x,y,z) = \lambda_1 g_y(x,y,z) + \lambda_2 h_y(x,y,z)$$
$$f_z(x,y,z) = \lambda_1 g_z(x,y,z) + \lambda_2 h_z(x,y,z)$$

estas condiciones producen

$$0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 x$$
$$0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 y$$
$$1 = \lambda_1 - \lambda_2$$

Si λ_2 fuera cero, la ecuación $\lambda_1 + 2\lambda_2 x$ implicaría que $\lambda_1 = 0$ en contradicción con
$1 = \lambda_1 - \lambda_2$. Por lo tanto, $\lambda_2 \neq 0$ y entonces

$$2\lambda_2 x = -\lambda_1 = 2\lambda_2 y,$$

esto implica que x = y. Sustituyendo x = y en la ecuación $h(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ donde
$z = x^2 + y^2$ entonces $z = 2x^2$, por lo tanto $g(x,y,z) = x + y + z - 12 = 0$ produce
$x + x + 2x^2 - 12 = 0$
$2x^2 + 2x - 12 = 0$ Ec. cuadrática, dividiendo entre 2 nos queda
$x^2 + x - 6 = 0$ Factorizando obtenemos
$(x + 3)(x - 2) = 0$ por lo tanto las dos soluciones son **x = -3 , x = 2.** Ya que $y = x$ y $z = x^2$, los puntos correspondientes de la elipse son P_1 (2,2,8) y P_2 (-3,-3,18) ; es evidente que P_1 es el punto mas bajo y P_2 es el punto más alto.

El centro de la elipse es el punto medio $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 13)$.

Sustituyendo z = 13 en la ecuación g(x,y,z) y h(x,y,z) obtenemos las ecuaciones:

$x + y + 1 = 0,$ $x^2 + y^2 = 13$

La sustitución de $y = -1 - x$ en $x^2 + y^2 = 13$ da la misma ecuación cuadrática que cuando se sustituye y = x. Esto nos lleva a los puntos Q_1 (2,-3,13) y Q_2 (-3,2,13) y la altura
z = 13 de la elipse. En conclusión el eje mayor de la elipse es P_1P_2 y el menor Q_1Q_2 , siendo sus longitudes

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-2)^2 + (-3-2)^2 + (18-18)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{6}\,; \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{(2+3)^2 + (-3-2)^2 + (13-13)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

Aplicaciones a la economía de los multiplicadores de Lagrange

Este método es aplicable a problemas económicos en los que la producción total (utilidad) se va a maximizar, sujeta a las restricciones de los recursos fijos disponibles. Por ejemplo, sea P el número de unidades de cierto producto que se van a fabricar. Entonces, P puede ser dada en términos del número de **"x"** unidades de trabajo y **"y"** de capital utilizado. En particular si

$$P = f(x,y) = kx^{\alpha} y^{\beta} \ (\alpha + \beta = 1),$$

esta función es la que se conoce como (función de Cabb Douglas) la cual tiene la propiedad conveniente de que f(cx,cy) = cf(x,y). Por lo tanto si se duplica o triplica cada uno de los recursos utilizados entonces ocurre lo mismo con la producción. Si el costo de cada unidad de trabajo es A dólares , el del capital es B dólares y hay C dólares totales disponibles , entonces se quiere maximizar la producción f(x,y) sujeta a la restricción.

$$\underbrace{\mathbf{g(x,y)}}_{\textbf{Utilidad}} = \underbrace{\mathbf{Ax + Bx}}_{\textbf{Ingreso}} - \underbrace{\mathbf{C}}_{\textbf{Costo}} = \mathbf{0.}$$

Ejemplo#3

Supóngase que la producción de cierto artículo depende de dos compras. Los montos de estas están dados por 100x y 100y, cuyos precios por unidad son, \$4 y \$1. El monto de producción está dado por 100z, el precio por unidad de la producción es de \$9. Además, la función de la producción f tiene valores $z = 5 - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ (restricción).

a) Determine los valores extremos de la función dada, sujeta a la restricción dada.
b) Determinar la máxima utilidad.

Solución a

Deseamos maximizar la función P definida por :

$$P(x,y,z) = 9\left(100z\right) - 4\left(100x\right) - 100y = 900z - 400x - 100y$$

Sujeta a la restricción dada por la ecuación $g(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + z - 5 = 0$

Sea $f(x,y,z) = P(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

$$f(x,y,z,\lambda) = 900z - 400x - 100y + \lambda\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + z - 5\right)$$

Primeras derivadas parciales

$f_x(x,y,z,\lambda) = -400 - (\lambda/x^2) = 0$, $f_y(x,y,z,\lambda) = -100 - (\lambda/x^2) = 0$

$f_z(x,y,z,\lambda) = 900 + \lambda = 0$, $f_\lambda(x,y,z,\lambda) = (1/x) + (1/y) + z - 5 = 0$,

Resolviendo simultáneamente obtenemos

$\lambda = -900$; Despejando de f_z

$$-400x^2 = \lambda \Rightarrow -x^2 = \frac{\lambda}{400} = x^2 = \frac{900}{400} \Rightarrow x = \frac{3}{2};$$ Despejando de f_x

$-100\,y^2 = \lambda \Rightarrow -y^2 = \dfrac{\lambda}{100} = y^2 = \dfrac{900}{100} \Rightarrow y = 3$; Despejando de f_y tenemos : como z = g(x,y,z)

entonces z en $\left(\dfrac{3}{2},3\right)$ es $g(x,y,z) = 5 - \dfrac{1}{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{3} = 5 - \left(\dfrac{1}{1} * \dfrac{2}{3}\right) - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{1} - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{15-2-1}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$

La función tiene un valor máximo relativo en (3/2, 3) .

Solución b

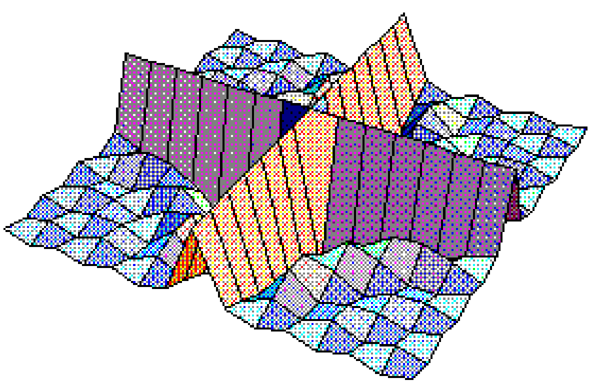
Sustituyendo los valores de x,y,z en la ecuación P

$P = (900 * 4) - \left(400 * \dfrac{3}{2}\right) - (100 * 3) = 3600 - 600 - 300$

$\mathbf{P(x,y,z) = \$2700}$ (máxima utilidad)

Tercera Unidad

Razón de Cambio



Problemas y Ejercicios

Problemas y Ejercicios de las sección 3.1

♦ 3.1 Derivada direccional

1) Calcule la derivada direccional de f en el punto P en la dirección indicada. Compruebe los resultados en el programa para verificar si son los requeridos.

a) $f(x,y) = x^3 - 3x^2y - y^3$, P(1,-2), $U = \frac{1}{2}\left(-i + \sqrt{3}j\right)$
b) $f(x,y) = \sqrt{9x^2 - 4y^2 - 1}$, P(3,-2), a = i + 5j
c) $f(x,y,z) = xy^3z^2$; P(2,-1,4), a = i + 2 j -3k
d) $f(x,y,z) = z^2e^{xy}$ P(-1,2,3), a = 3i + j - 5k
e) f(x,y,z) = (x + y) (y + z); P(5,7,1), a = -3i + 0 j + k
f) $(x,y) = x^2y$; P(1,2), a = 3i - 4 j
g) $(x,y,z) = x^3y - y^2z$; P(-2,1,3), a = i - 2 j + 2k

2) Calcule la derivada direccional de f en P en la dirección de P a Q. Encuentre un vector unitario en la dirección de máximo crecimiento de f en P y calcule la tasa de crecimiento de f en esa dirección. Encuentre un vector unitario en la dirección en que f disminuye más rápidamente en P y calcule la razón de cambio de f en esa dirección. Elabore una función utilizando el software Matemática que dé solución a este tipo de ejercicios.

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, P(-2,3,1), Q(0,-5,4) .
b) f(x,y,z) = (x/y) - (y/z); P(0,-1,2), Q(3,1,-4) .
c) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y - xy^2 + 1$; P(1,2), Q(4,6) .
d) $f(x,y) = x^2 e^{-2y}$; P(2,0), Q(-3,1)
e) $f(x,y,z) = x - 2y + z^2$; P(3,1,-2), Q(10,7,4)

3) Encontrar un vector que indique la dirección en la cual la función aumenta más rápidamente en el punto indicado. Halle la razón de cambio máxima?

a) $f(x,y) = e^{2x}\text{seny}$, P(0,$\pi$/4)
b) $f(x,y) = xye^{x - y}$, P(5,5)
c) $f(x,y,z) = x^2 + 4xz + 2yz^2$, P(1,2,-1)
d) $f(x,y,z) = xyz$, P(1,2-,1)
e) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2$, P(1,1)
f) $f(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + 4z^2$, P(1,5,-2)
g) $f(x,y,z) = (x\, y^2 z^3)^{(1/2)}$ (2,2,2)

4) Encontrar un vector que indique la dirección en la cual la función disminuye más rápidamente en el punto indicado. Halle la razón de cambio mínimo.

a) $f(x,y) = \tan\left(x^2 + y^2\right)$, $P\left(\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \frac{\pi}{4}\right)$
b) $f(x,y) = x^3 - y^3$, P(2,-2)
d) $f(x,y,z) = \ln\left(\frac{xy}{z}\right)$, P (1/2),(1/6),(1/3))

5) El potencial eléctrico V de un punto P(x,y,z) de un sistema de coordenadas rectangulares es $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Calcule la tasa de cambio en V en P(2,-1,3) en la dirección de P al origen. Encuentre la dirección que produce la máxima tasa de cambio de V en P. Cuál es la máxima tasa de cambio en P?
6) Hallar la derivada direccional de la función f, resolver el ejercicio por medio del teorema D.
Compruebe sus datos con los comandos indicados del software Mathematica

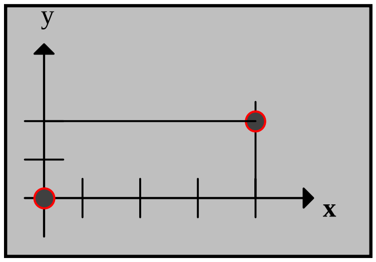
a) $z = 2x^2 - 3y^2$ en P(1,0) en la dirección $0x = 120^0$.
b) $z = x^2 - xy - 2y^2$ en P(1,2) en la dirección $0x = 60^0$.

7) Una ecuación de la superficie de una montaña es $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$ donde la distancia se mide en pies. El eje "x" apunta al este el eje "y" apunta al norte. Un montañista está en el punto correspondiente a (- 10,5,850).

a) Cuál es la dirección de la ladera más pronunciada ?
b) Si el montañista se mueve en la dirección del este. Está ascendiendo o descendiendo? Cuál es su rapidez?
c) Si el montañista se mueve en la dirección sureste. Está ascendiendo o descendiendo? Cuál es su rapidez?
f) En que dirección esta recorriendo una trayectoria nivel?
g) Desarrolle una función para resolver aplicaciones como esta.

Problemas y Ejercicios de las sección 3.2
♦ 3.2 El Gradiente

1) Considérese la placa rectangular de la figura mostrada, la temperatura en un punto (xy) de la placa esta dada por $t(x,y) = 5 + 2x^2 + y^2$. Determine el gradiente cuando un insecto parte de P(4,2).



2) Encuentre el gradiente de la función f en el punto indicado.

a) $f(x,y) = 3x - 7y$; P(17,39)
b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, P(-4,3)
c) $f(x,y) = 7y - 5x$; P(2,6)
d) $f(x,y,z) = yz^3 - 2x^2$; P(2,-3,1)
e) $f(x,y) = x^2 - 4y$; P(-2,2)
f) $f(x,y,z) = 2x^3 + xy^2 + xz^2$, P(1,1,1)
g) $f(x,y,z) = y^2 - z^2$; P(17,3,2)

Problemas y Ejercicios de las sección 3.3
♦ 3.3 Curvas y superficies de nivel

1) Represente mediante curvas de nivel las funciones dadas, haga las gráficas utilizando los comandos del software Mathematica.
a) $f(x,y) = x^2 - y$
b) $f(x,y) = y^2 - x^2$
c) $f(x,y) = x + 2y$
d) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$
e) $f(x,y) = 4xy$
f) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

g) El potencial eléctrico en un punto (x,y) es V voltios $V = \dfrac{4}{\sqrt{49 - x^2 - y^2}}$ dibujar las curvas equipotenciales para V= 16,12,8,4,1,(1/2) y (1/4) .

h) Para la producción de un cierto artículo si **“x”** es el número de máquinas usadas y **“y“** es el número de horas hombres, el número de unidades del artículo producido es f(x,y) y f(x,y) = 6xy. una función f tal se llama función de producción y las curvas de nivel de f se llaman curvas de producto constantes. Dibujar las curvas de producto constantes para esta función f en 30,24,18,12, 6 y 0.

2) Implemente un programa con el software Mathematica donde su salida sea la gráfica de una curva de nivel.

3) Describa las superficies de nivel de la siguientes funciones, utilice los comandos del software Mathematica para graficarlas

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
b) $f(x,y,z) = z + x^2 + 4y^2$
c) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$
d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$
a) $f(x,y,z) = 4x^2 - 9y^2$

Problemas y Ejercicios de las sección 3.4
♦ 3.4 La Regla de la Cadena

1) La parte de un árbol que por lo regular se corta en el aserradero es el tronco, un sólido cuya forma aproximada es la de un cilindro circular recto. Si el radio del tronco de cierto árbol crece 1/2 pulg. por año y a altura 8 pulg. por año. Con que rapidez crece el volumen cuando el radio es de 20 pulg. y la altura de 400?. Exprese su respuesta en Board-feet /año. Recuerda que: 1 Board-feet /año = 1pulg. * 12 pulg. * 12pulg.

2) En los problemas siguientes encuentre **"dw/dt"** por medio de la regla de la cadena. Exprese la respuesta en términos de t.

a) $w = x^2y - y^2x$,	$x = \cos t$,	$y = \operatorname{sen} t$	
b) $w = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x$,	$x = 3t$,	$y = 2t$	
c) $w = \operatorname{sen}(xyz^2)$,	$x = t^3$,	$y = t^2$,	
d) $w = x^3 - y^3$,	$x = 1/(t+1)$,	$y = t/(t+1)$	
e) $w = r^2 - s\tan v$,	$r = \operatorname{sen}^2 t$,	$s = \cos t$,	$z = 4t$
f) $w = \operatorname{sen} xy$,	$x = t$,	$y = t^2$,	$z = t^3$

3) Encuentre **"∂w/∂t"** mediante la regla de la cadena. Exprese la respuesta en términos de t.

a) $w = x^2y$,	$x = st$,	$y = s - t$	
b) $w = e^{x^2} + x^2$,	$x = s\operatorname{sen} t$,	$y = t \operatorname{sen} s$	
c) $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,	$x = \cos st$,	$y = \operatorname{sen} st$,	$z = s^2 t$

4) Encuentre **"∂w/∂s"** mediante la regla de la cadena. Exprese la respuesta en términos de t.

a) $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$,	$x = s - t$,	$y = s + t$,	$z = 2\sqrt{st}$
b) $w = yz + zx + xy$,	$x = s^2 - t^2$,	$y = s^2 + t^2$,	$z = s^2t^2$

Problemas y Ejercicios de las sección 3.5
♦ 3.5 Aproximaciones de Taylor de segundo grado

1) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 para x = a con las siguientes funciones. Compruebe sus resultados en el programa, además modifique el programa para que resuelva polinomios de dos variables.

a) $f(x) = e^x$;	$a = 2$
b) $f(x) = \tan^{-1}x$;	$a = 1$
c) $f(x) = \sqrt{x}$;	$a = 4$

d) $f(x) = 1/x$; $a = -2$
e) $f(x) = xe^x$; $a = -1$
f) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$; $a = 1$

2) Diseñe un programa para resolver ejercicios modelos como el del ejemplo 2 usando el software Matemática

Problemas y Ejercicios de las sección 3.6
♦ 3.6 Plano tangente y Aproximaciones

1) Obtenga una ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto indicado.

a) $z = 4x^2 + 9y^2$, P(-2,-1,25)
b) $z = x^2 + y^2 + z^2 = 16$, P(2,3, $\sqrt{3}$)
c) $z = x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$, P(1,3, $\sqrt{7}$)
d) $z = x^2 - y^2 - 3z^2 = 5$, P(6,2,3)
e) $z = x^4 + xy + y^2 = 19$, P(2,3)
f) $z = x^{(1/3)} + y^{(1/3)} + z^{(1/3)} = 1$, P(1,-1,1)
g) $z = xy + 2yz - xz^2 + 10 = 0$, P(-5,5,1)

Aproximaciones

1) La altura de un cono es de 30cm y el radio de su base es de r = 10cm. Cómo variará el volumen de dicho cono si aumenta h = 3mm y si r disminuye en 1mm.

2) Usar la diferencial total dz para encontrar aproximadamente el error máximo al calcular el área de un triángulo rectángulo a partir de las longitudes de los catetos que son 6 pulgs y 8 pulgs respectivamente, con un posible error de 0.1 pulgs para cada medición. También calcular el error porcentaje aproximado.

3) Un pintor cobra 12 centavos por pie ^{2} por pintar las cuatro paredes y el techo de un cuarto. Si las dimensiones del techo son 12 pie y 15 pie, la altura del cuarto es 10 pie, y estas medidas son correctas a 0.05 pie, encontrar aproximadamente, usando la diferencial total el máximo error al estimar el costo del trabajo a partir de estas medidas.

4) Use la diferencial total para aproximar el cambio en z cuando (x,y) se mueve de P a Q.
Implemente una función que resuelva ejercicios modelo de este tipo

a) $z = x^2 - 5xy + y$, P(2,3) Q(2.03,2.98)
b) $z = \ln(x^2 y)$, P(-2,4) Q(-1.98,3.96)
c) $z = \tan^{-1}(xy)$, P(-2,-0.5) Q(-2.03,-0.51)

Problemas y Ejercicios de las sección 3.7
♦ 3.7 Máximos y mínimos

1) Encuentre todos los extremos relativos de la función indicada, desarrolle una función para
resolver los ejercicio.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 5$
b) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 8x + 6y$
c) $f(x,y) = 5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + 40$
d) $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 10x - 2y + 2$
e) $f(x,y) = 4x^3 + y^3 - 12x - 3y$

2) Hallar los máximos y mínimos de f.

a) $f(x,y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y + 6x$
b) $f(x,y) = x^3 + 3xy - y^3$
c) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$
d) $f(x,y) = \dfrac{4y + x^2y^2 + 8x}{xy}$
a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - x + 2y$

3) Encuentre el máximo y el mínimo global de f en R e indique donde aparece.

a) $f(x,y) = 3x + 4y$, $R = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$
b) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$, $R = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\}$

4) Encuentre los máximos y los mínimos que alcanzan las funciones dadas f(x,y) en la región R que se indica.

a) $f(x,y) = x + 2y$; R es el cuadrado de vértices ($\pm$ 1), ($\pm$ 1).
b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$; R es la región triangular de vértices $\{(0,0),(2,0),(0,2)\}$.
c) $f(x,y) = 2xy$; R es el disco circular $x^2 + y^2 \le 1$

5) Un edificio con forma de una caja rectangular va a tener un volumen de 8000pie ^{3}. Los costos de calefacción y aire acondicionado ascienden a \$2 por pie^2 de tope , frente y fondo, y \$4 por cada pie ^{2} de las dos paredes, laterales. Cuales son las dimensiones del edificio que minimizan estos costos anuales ?

6) Una fabrica de tiene dos clasificaciones para sus trabajadores, A y B. Los trabajadores de la clase A ganan \$ 14.00 por turno, y los trabajadores de la clase B ganan \$ 13.00 por turno. Para un cierto turno de producción se a determinado que además de los salarios de los trabajadores, si se emplean " x " trabajadores de la clase A y "y" trabajadores de la clase B , el número de dólares del costo del turno es $y^3 + x^2 - 8xy + 600$. Cuántos trabajadores de cada clase deberán ser empleados de tal forma que el costo del turno sea un mínimo, si al menos se requieren 3 trabajadores de cada clase para un turno?

6) Implemente un programa para determinar los valores extremos de una función cualquiera en el programa se debe saber diferenciar los máximos y mínimos locales de los globales, sin usar el criterio de la segunda derivada. Compruebe la solución de los ejercicios.

Problemas y Ejercicios de las sección 3.8
♦ 3.8 Criterio de la Segunda derivada

1) Encuentre y clasifique los puntos críticos de las funciones dadas.

a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 5$

b) $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 2y + 1$
c) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy + 3$
d) $f(x,y) = 6x - x^3 - y^3$
e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$
f) $f(x,y) = 3x^2 + 6xy + 2y^3 + 12xy - 24y$

2) Encuentre los puntos críticos, indique si dichos puntos dan un máximo o un mínimo local o si es un punto de silla. Usando el criterio de la segunda derivada, compruebe los resultados en el programa del criterio de la segunda derivada.

a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 4x$
b) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y - 1$
c) $f(x,y) = 2x^4 - x^2 + 3y^2$
d) $f(x,y) = xy^2 - 6x^2 - 3y^2$
e) $f(x,y) = xy$
f) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$

Problemas y Ejercicios de las sección 3.9
♦ 3.8 Método de los Multiplicadores de Lagrange

1) Use el método de los múltiplos de Lagrange para calcular los máximos y mínimos de la función sujeta a las restricciones dadas.

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ restricción $g(x,y,z) = 3x + 2y + z = 6$
b) $f(x,y) = y^2 - 4xy + 4x^2$ restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$
c) $f(x,y,z) = x + y + z$ restricción $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 25$
d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ restricción $g(x,y) = xy - 3 = 0$
e) $f(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$
f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ restricción $g(x,y,z) = x + 3y - 2z = 12$
g) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $g(x,y) = x - y = 1$, $h(x,y) = y^2 - z^2 = 1$
h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $g(x,y) = x + y + z = 1$, $h(x,y) = x + 2y + 3z = 6$

2) Encontrar los extremos relativos de $f(x,y,z) = xyz$, sujeta a la restricción $x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 8$.

3) La función de producción f de cierto artículo tiene valores $f(x,y) = x + \frac{5}{2}y - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{9}{8}$. Los montos de las compras están dadas por 100x, 100y, cuyos precios unitarios son \$4 y \$8, y el monto de la producción esta dado por 100z, cuyo precio por unidad es \$16. Determinar la máxima utilidad, además programe una función con el software Mathematica que resuelva esta aplicación.

4) Desarrolle un programa que al introducir cualquier función ya sea con una o dos restricciones devuelva los resultados esperados, utilice multiplicadores de Lagrange.

Proyectos de la Tercera Unidad

Proyecto #5

3) Usted se encuentra en el punto (30,20,5) en una colina que tiene las forma de la superficie

$$z = 100^{\left[\frac{x^2+3y^2}{701}\right]}$$

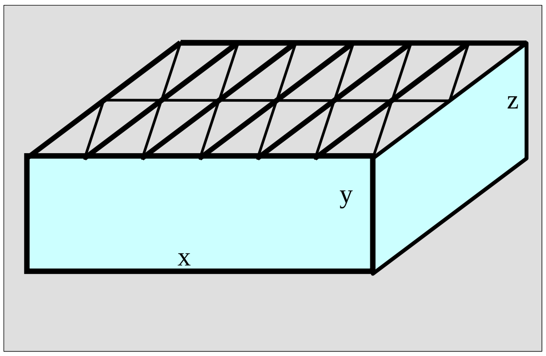
a) En que dirección (es decir, cual es rumbo del compás) debe caminar para subir por lo mas empinado ? A que ángulo con respecto a la horizontal empezará el ascenso.

b) Si en lugar de ascender como en la parte **a** usted se encamina directo hacia al Oeste (la dirección decreciente de x),a que ángulo avanzará en principio.

Desarrolle un programa resuelva el ejercicio.

Proyecto #6

Se va a construir la charola para hielo de la siguiente figura con materiales que cuestan 1c/in^2. Minimice la función costo $f(x,y,z) = xy + 3xz + 7yz$ sujeto a las restricciones de que cada casilla debe ser un recuadro y el volumen total (ignorando las particiones) debe ser de 12in^3. Elabore un programa que resuelva esta aplicación.



4

Cuarta Unidad
Integrales Múltiples

Contenido

♦ 4.1 Introducción

Las Integrales como parte de la Matemática son ampliamente utilizadas en Física, Química y otras ciencias, en las integrales es necesario tener una función y sus límites de integración.

A las integrales de dos y tres variables se les llama integrales múltiples, las cuales en sus aplicaciones incluyen cálculos de áreas, volúmenes, masas, superficies, centroides y momentos. La diferencia principal de las integrales múltiples de las sencillas es el dominio del integrando.

♦ 4.2 Integrales dobles

4.2.1 Integrales dobles sobre rectángulos

Para definir la integral doble de una función de dos y tres variables se hace de forma parecida a las integrales simples.

Interpretación geométrica de las integrales dobles

Sea ***"R"*** un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados; es decir, sea $R=\{(x,y): a \le x \le b, c \le y \le d\}$. Fórmese una partición P de ***"R"*** mediante rectas paralelas a los ejes x *y* y, como se muestra en la figura 4.2.1 .

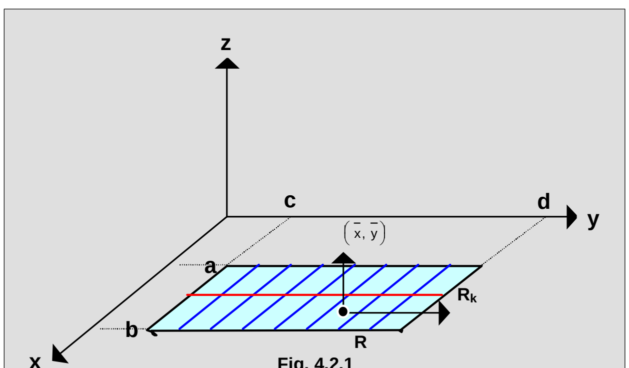


Fig. 4.2.1

Esto divide a ***"R"*** en n subrectángulos denotados como : R_k , k = 1,2,3,...,n. Sean $\mathbf{\Delta x_k}$ y $\mathbf{\Delta y_k}$ las longitudes de los lados de $\mathbf{R_k}$ y sea $\mathbf{\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k}$ el área. Sobre R_k , escoger un punto muestra $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ y forme la suma riemanniana : $\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k)\Delta A_k$, la cual corresponde a la suma de los volúmenes de **n** barras cuando f(x,y) ≥ 0, ver figura 4.2.2.

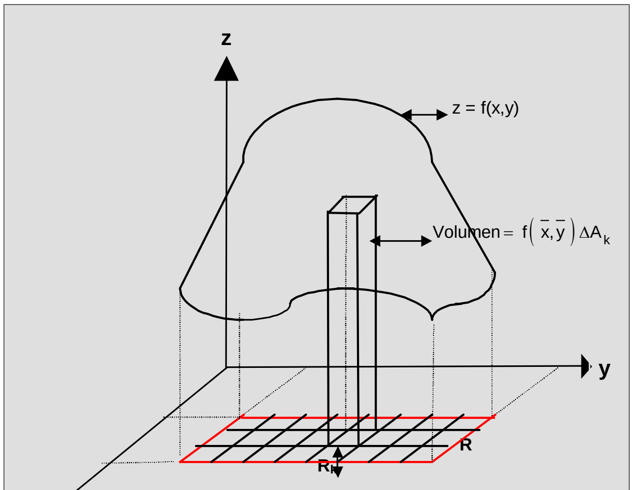


Fig. 4.2.2

Ahora veamos la definición formal donde, |P| será la máxima diagonal de cualquier subrectángulo de la partición.

Definición de integral doble:

Sea f una función de dos variables definida en un rectángulo cerrado ***"R".*** Para una región cerrada entendemos que incluye sus fronteras. Si existe $\lim\limits_{|P|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\bar{x}_k,\bar{y}_k\right)\Delta A_k$,

decimos que f es integrable en ***"R"***. Además $\iint_R f(x,y)\,dA$ es llamada la integral doble de f sobre ***" R "*** y está dada por $\iint_R f(x,y)\,dA = \lim\limits_{|P|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\bar{x}_k,\bar{y}_k\right)\Delta A_k$, esta integral da como resultado el volumen.

Nota que si $f(x)\geq 0$, es decir representa una función positiva, $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área de la región bajo la curva y = f(x) entre a y b. De forma similar, si $f(x,y)\geq 0$, representa el ***volumen*** del sólido bajo la superficie z = f(x,y) y arriba del rectángulo ***"R"***. De otro modo, no tiene una interpretación inmediata para este número.

No toda función de dos variables es integrable sobre un rectángulo ***"R"***. Como se sabe que una función que no este acotada en ***"R"*** no siempre será integrable.

Teorema A (integrabilidad):

Si f es acotada en el rectángulo ***"R"*** y es continua ahí, con excepción de un número finito de curvas suaves, entonces f es integrable en ***" R "***. En particular, si f es continua sobre todo ***"R"*** , entonces f es integrable en ese intervalo.

Propiedades de las integrales dobles

Estas propiedades en su mayoría son las mismas que las de las integrales simples, todas se cumplen en conjunto aun más generales que los rectángulos.

- **Linealidad**

a) $\iint_R kf(x,y)dA = K\iint_R f(x,y)dA$; para todo numero real K.

b) $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$

- **Aditividad**

La integral doble es aditiva sobre rectángulos que se sobrepongan sólo en un segmento de recta, ver figura 4.2.3.

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$$

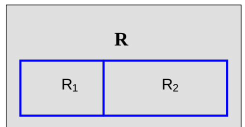


Fig.4.2.3

- **Comparación**

Si f(x,y) ≤ g(x,y) para todo (x,y) de “R”. Entonces $\iint_R f(x,y)dA \le \iint_R g(x,y)dA$

Ejemplo#1

Sea f(x,y) = 12 - x - y, R = {(x,y): 0 ≤ x ≤ 6, 0 ≤ y ≤ 4 } y P es la partición de “R“ en 6 cuadrados iguales mediante las rectas x = 2, x = 4 y = 2. Calcule el valor aproximado de $\iint_R f(x,y)dA$ calculando la suma riemanniana correspondiente $\sum_{k=1}^{6} f(\bar{x}_k,\bar{y}_k)\Delta A_k$, suponiendo que $(\bar{x}_k,\bar{y}_k)$ son los centros de los seis cuadrados.

Solución

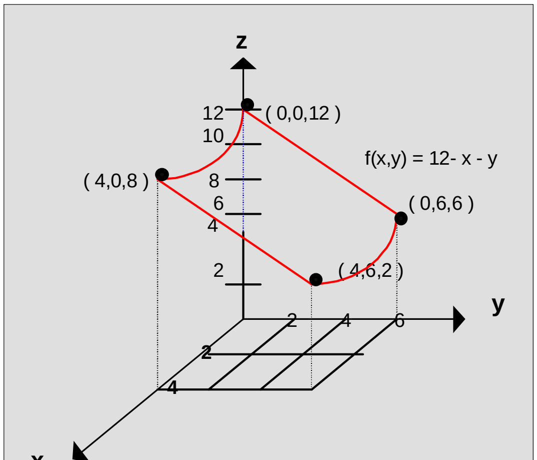


Fig 4.2.4

Tabla de valores (4.2.1)		
x	y	z
0	6	6
0	0	12
4	0	8
4	6	2

Los puntos muestras requeridos y los valores correspondientes de la función son los siguientes

$$\left(\bar{x}_1,\bar{y}_1\right)=(1,1),\quad f\left(\bar{x}_1,\bar{y}_1\right)=12-1-1=10$$

$$\left(\bar{x}_2,\bar{y}_2\right)=(1,3),\quad f\left(\bar{x}_2,\bar{y}_2\right)=12-1-3=8$$

$$\left(\bar{x}_3,\bar{y}_3\right)=(1,5),\quad f\left(\bar{x}_3,\bar{y}_3\right)=12-1-5=6$$

$$\left(\bar{x}_4,\bar{y}_4\right)=(3,1),\quad f\left(\bar{x}_4,\bar{y}_4\right)=12-3-1=8$$

$$\left(\bar{x}_5,\bar{y}_5\right)=(3,3),\quad f\left(\bar{x}_5,\bar{y}_5\right)=12-3-3=6$$

$$\left(\bar{x}_6,\bar{y}_6\right)=(3,5),\quad f\left(\bar{x}_6,\bar{y}_6\right)=12-3-5=4$$

por lo tanto ya que $\Delta Ak = \Delta x * \Delta y = 2 * 2 = 4$, entonces $\iint_R f(x,y)dA = \sum_{k=1}^{n} f\left(\bar{x}_k,\bar{y}_k\right)\Delta A_k$

$$\iint_R f(x,y)dA = 4\sum_{k=1}^{6} f\left(\bar{x}_k,\bar{y}_k\right) = \iint_R f(x,y)dA = 4(10+8+6+8+6+4) \Rightarrow 168u^3$$

PROGRAMACIÓN

Este programa resuelve el caso específico del ejemplo 1 los cuales se solucionan por medio de Sumas de Riemann, se piden como datos de entrada la función dada a evaluar, los valores de Δx y Δy.

```
SumaR[Fn_,Xm_,Ym_]:=Module[{Mx,My,I,J,L,DA,Pmx,Pmy,Fe,SRie=0,Vaprox},
        Print[" "];
        Print["   Salida del programa  "];
        Print[" "];
        Print[StringForm["*** Función de entrada  *** Fn = ``",Fn]];
        Print[" "];
        DA=Xm*Ym;
        Print["*** Listas de datos para los puntos muestras ***"];
        Print[" "];
```

```
          Mx={1,3};
          My={1,3,5};
          L=Length[Mx];
          K=Length[My];
          Print[StringForm[" Lista A = ``",Mx]];
          Print[StringForm[" Lista B = ``",My]];
          For[M=1,M<=L,M++,
                 For[J=1,J<=K,J++,
                    Pmx=Part[Mx,M];
                    Pmy=Part[My,J];
                    Fe=Fn/.{X->Pmx,Y->Pmy};
                    SRie=SRie+Fe;
                    Vaprox=SRie*DA;
                ];
          ];
          Print[" "];
          Print[StringForm["La suma de Riemann es: SRie = ``",SRie]];
          Print[" "];
          Print[StringForm["El valor aproximado de la integral es Vaprox = ``",Vaprox"u^3"]];
          Print[" "];
]
SumaR[12-X-Y,3,2,2]
```

Salida del programa

*** Función de entrada *** Fn = 12 - X - Y

*** Listas de datos para los puntos muestras ***

Lista A = {1, 3}
Lista B = {1, 3, 5}

La suma de Riemann es: SRie = 42
El valor aproximado de la integral es Vaprox = 168 u^3

4.2.2 Integrales dobles iteradas

Antes de entrar en detalles sobre integrales dobles iteradas recordemos algunos aspectos de gran importancia para una mejor comprensión de este tema, entre estos tenemos : Teorema fundamental del cálculo y el valor promedio de una función.

Teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo su importancia radica en el descubrimiento y aprovechamiento para el cálculo, de la relación inversa entre derivación e integración la cual fue descubierta por Newton y Leibniz.

Teorema de evaluación de integrales $\Rightarrow$	Para valorar $\int_a^b f(x)dx$, basta con encontrar una antiderivada de f en [a,b].
La otra parte del teorema nos explica que por lo regular esto es posible, al menos en teoría. $\Rightarrow$	Toda función continua tiene su antiderivada.

Teorema de evaluación de integrales :

Si G es una antiderivada de la función continua f en el intervalo [a ,b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

La diferencia G(b) - G(a) se abrevia $[G(x)]_a^b$ por lo que el teorema implica que $\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b$. Si G es cualquier antiderivada de la función continua f por lo tanto, si podemos encontrar la antiderivada de G, podemos evaluar la integral sin recurrir a los límites de la suma de Riemann.

Ejemplo#1

Si $f(x) = x^n$ con $n \neq -1$.

Solución

Una antiderivada de f es $G(x) = \frac{x^{n-1}}{n+1}$ esto produce

$$\int_a^b x^n dx = F(b) - F(a) = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

Definición de valor medio de una función:

Supóngase que la función f es integrable en [a,b]. Entonces, el valor promedio $\bar{y}$ de $y = f(x,y)$ en [a,b] es $\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow Ec_1$

Ejemplo#2

Calcular el valor medio de $f(x) = x^2$ sobre [0,2]

Solución

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 \quad \therefore \ \bar{y} = \frac{4}{3}$$

Teorema del valor promedio:

Si f es continua en [a,b], entonces $f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow Ec_2$ para algún punto $\bar{x}$ de [a,b].

Este teorema nos dice que toda función continua en un intervalo cerrado, alcanza su valor promedio en algún punto del intervalo esto se muestra en la figura 4.2.5.

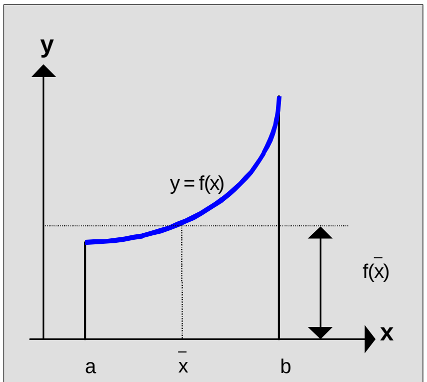


Fig. 4.2.5

El teorema fundamental

Postularemos el teorema fundamental del cálculo en dos partes : **La primera** es el hecho de que toda función f continua sobre un intervalo I tiene una antiderivada en I, entonces obtendremos una antiderivada de f para integrales de f de algún manera. En forma intuitiva, en el caso $f(x) \rangle 0$, F(x) designa el área bajo la gráfica de f de un punto fijo a de I hasta x, un punto de I con I > a. En la figura 4.2.6 se refleja geométricamente la función F(x).

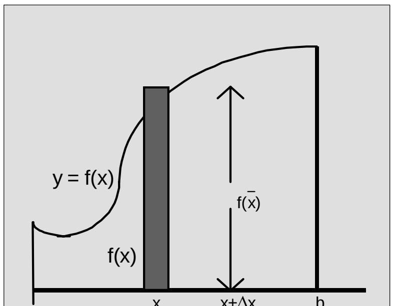


Fig.4.2.6

La función se define como $F(x) = \int_a^b f(t)\,d$ se usa la variable t en el integrando para evitar una confusión con el límite superior x.

Teorema fundamental del cálculo :

Sea f una función continua definida en [a,b].

Parte 1 : Si la función f esta definida en [a,b] para $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ Ec 3

entonces F es una antiderivada de f. Es decir $F'(x) = f(x)$ para x en (a,b)

Parte 2 : Si G es cualquier antiderivada de f en [a,b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \left[G(x)\right]_a^b = G(b) - G(a) \quad \text{Ec4}$$

En la práctica la integrales dobles iteradas son utilizadas para el cálculo de integrales dobles sobre rectángulos, ahora entremos en detalles sobre ellas.

Teorema de integral doble iterada:

Supóngase que f(x,y) es continua en el rectángulo R = [a,b] x [c,d]. Entonces

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \quad Ec5$$

Este teorema nos explica como calcular una integral doble por medio de dos integraciones de variables simples sucesivas(o iteradas), cada una puede ser resuelta mediante el teorema fundamental del cálculo .

Explicación sobre el significado del paréntesis de la integral iterada

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \quad Ec_6$$

Primero hay que conservar constante x y se integra con respecto a y, desde y = c hasta y = d. El resultado de la primera integración es la ***integral parcial de f con respecto a y***, denotada como :

$$\int_c^d f(x,y)dy,$$

y será una función solo de x. Por último hay que integrar esta última función con respecto a x, de x = a hasta x = b.

En forma similar, la integral iterada $\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy \quad Ec_7$

hay que hacer el cálculo integrando primero de **a** a **b** con respecto a x(y es constante) se integra después el resultado con respecto a y, de **c** a **d**.

Advertencia

El orden de integración(ya sea primero con respecto a x y después con respecto a y, o viceversa) depende del orden en que aparezcan las diferenciales dx, dy en las integrales iteradas (6), (7). Siempre se debe trabajar ***" de adentro hacia afuera ".***

El teorema de las integrales dobles iteradas garantiza que el valor obtenido es independiente del orden de integración siempre que f sea continua.

Un plan general de demostración del teorema de integral doble iterada muestra una relación entre integrales iteradas y el método de secciones transversales para el cálculo de volúmenes.

Primero, hay que subdividir [a,b] en n subintervalos iguales, con una longitud $\Delta x = \frac{a-b}{n}$ para cada uno y también se subdivide [c,d] en n subintervalos, cada uno de longitud $\Delta y = \frac{d-c}{n}$. Esto nos da n^2 subrectángulos, con área de $\Delta A = \Delta x \Delta y$ para cada uno. Se escoge un punto x^*_i en $[x_{i-1}, x_i]$ para todo i, $1 \le i \le n$. Entonces el teorema del valor medio para integrales simples da un punto y^*_{ij} en $\left[y_{j-1}, y_j\right]$ tal que $\int_{y_{j-1}}^{y_j} f\left(x^*_i, y\right)dy = f(x^*_i, y^*_{ij})\Delta y$, esto da nuestro punto seleccionado $\left(x^*_i, y^*_{ij}\right)$ del subrectángulo $\left[x_{i-1}, x_i\right] * \left[y_{j-1}, y_j\right]$.

Entonces

$$\iint_R f(x,y)dA \approx \sum_{i,j=1}^{n} f\left(x^*_i, y^*_{ij}\right)\Delta A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(x^*_i, y^*_{ij}\right)\Delta y\,\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f\left(x^*_i, y\right)dy\right)\Delta x = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_c^d f\left(x^*_i, y\right)dy\right)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} A\left(x^*_i\right)\Delta x$$

donde $A(x) = \int_c^d f(x,y)dy$. Esto último es una suma riemanniana para la integral $\int_a^b A(x)dx$ por

lo que el resultado del cálculo es que

$$\iint_R f(x,y)dA \approx \sum_{i=1}^{n} A\left(x^*_i\right)\Delta x = \int_a^b A(x)dx = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

Ejemplo#3

Evaluar $\int_0^2\int_1^3 \left(x^2y\right)dydx$

Solución

$$\int_0^2\int_1^3\left(x^2y\right)dy\,dx = \int_0^2\left[\int_1^3\left(x^2y\right)dy\right]dx$$

$$= \int_0^2\left[x^2\frac{y^2}{2}\right]_1^3 dx = \int_0^2 x^2\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)dx = \int_0^2 4x^2\,dx = 4\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = 4\left(\frac{8}{3}-\frac{0}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

Ejemplo#4

Calcular la integral doble de la función f(x,y) = 2x -y sobre la región que está limitada por la curva y = x y x = y^2.

Primero hay que dibujar siempre la región de integración ***"R"*** antes de intentar la evaluación de una integral doble.

Comandos del software Mathematica para dibujar la región

```
Needs["Graphics`FilledPlot`"];
FilledPlot[{X,Sqrt[X]},{X,0,1},
PlotStyle->{{Thickness[0.01],RGBColor[0.8,0.8,1]},
{Thickness[0.01],RGBColor[1,0.2,0.2]}},Curves->Front];
```

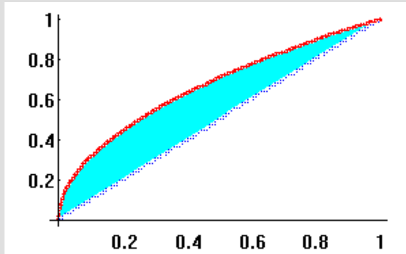


Fig. 4.2.7

Tabla de valores (4.2.2)	
x	y
0	1
1	1
2	2

Tabla de valores (4.2.3)	
x	y
0	1
1	1
4	2

Límites $0 \le x \le 1$ y $x^2 \le y \le x$ ***;*** ***Límites*** $0 \le y \le 1$ y $y \le x \le \sqrt{y}$

Solución

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (2x - y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[2xy - \frac{y^2}{2} \right]_x^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left[\left(2x^2 - \frac{x^2}{2} \right)\left(2x^{\frac{3}{2}} - \frac{x}{2} \right) \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3x^2}{2} - 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \left[3\frac{x^3}{2*3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{x^3}{2} - \frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{4} \text{ evaluando}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{4} = \frac{10 - 16 + 5}{20} = \frac{-1}{20} = 0 - \left(\frac{-1}{20} \right) = \frac{1}{20}$$

4.2.3 Integrales dobles sobre regiones no rectangulares

Considerar un conjunto acotado y cerrado ***"S"*** del plano. Encerrar a ***"S"*** sobre un rectángulo ***"R"*** de lados paralelos a los ejes coordenados como la figura 4.2.8.

Suponer que f(x,y) esta definida en ***"S"*** y suponer que f(x,y) = 0 en la parte ***"R"*** que sea exterior a ***"S"*** como la figura 4.2.9 .

Se dice que f es integrable en ***"S"*** si es integrable en ***"R"*** y escribimos lo siguiente :

$$\iint_S f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dA.$$

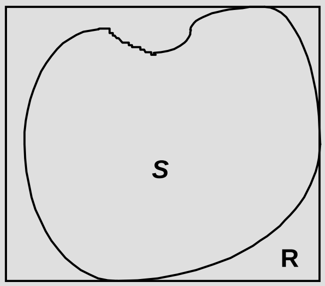


Fig. 4.2.8

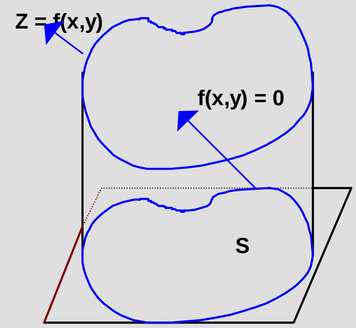


Fig. 4.2.9

Las propiedades de las integrales dobles sobre regiones generales son las mismas que las de las integrales dobles rectangulares.

Evaluación de integrales dobles sobre conjuntos generales

Los conjuntos con fronteras curvas pueden ser muy complicados. Pero el objetivo que perseguimos, bastará con considerar los conjuntos llamados ***x - simple*** **y** ***y - simple.***

Un conjunto ***"S"*** es ***y - simple*** si existen funciones continuas ϕ_1 y ϕ_2 en [a,b] tales que $S = \left\{ (x,y):\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\ ,\ a \le x \le b \right\}$, ver figura 4.2.10.

Un conjunto ***"S"*** es ***x - simple*** si existen funciones continuas ψ_1 y ψ_2 en [c,d] tales que, $S = \left\{ (x,y):\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\ ,\ c \le y \le d \right\}$,ver figura 4.2.11.

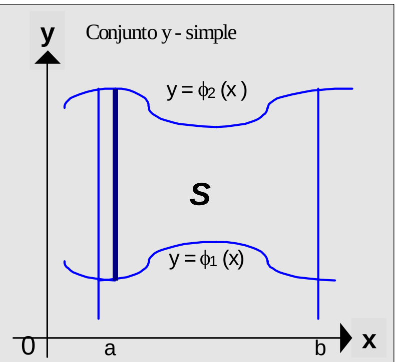


Fig.4.2.10

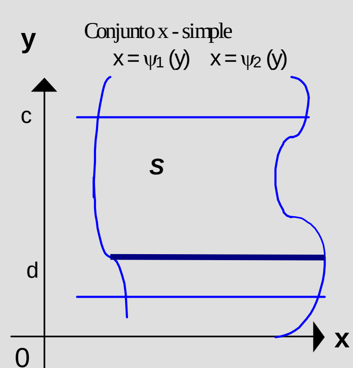


Fig 4.2.11

Suponga que deseamos evaluar la integral doble de una función f(x,y) sobre un conjunto ***"S"*** ***y - simple*** . Encerrar a ***"S"*** en un rectángulo ***"R"*** y hacer a f(x,y) = 0 en el exterior de ***"S"*** como se muestra en la figura 4.2.12.

$$\iint_S f(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

En síntesis

$$\boxed{\iint_S f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx}$$

Si el conjunto ***"S"*** es ***x - simple*** (ver figura 4.2.11) un razonamiento similar nos conduce a la siguiente fórmula.

$$\boxed{\iint_S f(x,y)dA = \int_c^d \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dxdy}$$

Cuando el conjunto ***"S"*** no es ***"ni x-simple ni y-simple"***, ver figura 4.2.13, se puede considerar como la unión de piezas que tienen una o ambas de estas propiedades. Podemos calcular la integral de estas piezas y sumarlas para obtener la integral sobre ***"S".***

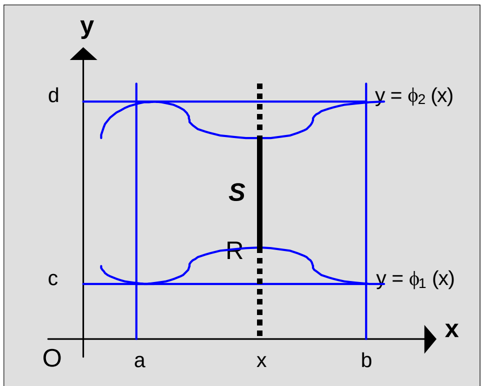


Fig. 4.2.12

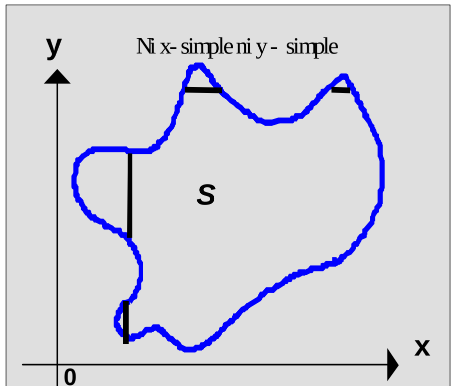


Fig. 4.2.13

Ejemplo#1

Use la integral doble para encontrar el volumen del tetraedro acotado por los planos coordenados y el plano 3x + 6y + 4z - 12 = 0, ver figura 4.2.14

Solución

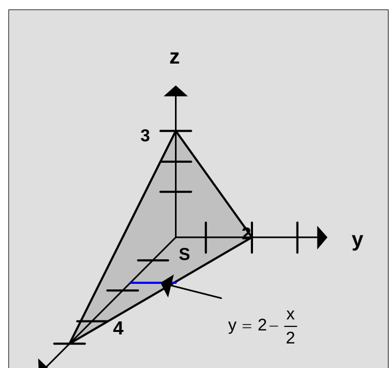


Fig.4.2.14

$$\text{Interceptos}\begin{cases}\text{Si } x \text{ y } y=0 \rightarrow z=3\\ \text{Si } y \text{ y } z=0 \rightarrow x=4\\ \text{Si } x \text{ y } z=0 \rightarrow y=2\end{cases}$$

3x + 6y + 4z - 12 = 0
3x + 6y - 12 = - 4z
3 (x + 2y - 4) = - 4z $\rightarrow$ Sacando factor común

$\frac{3}{4}(4-x-2y)=z$ $\rightarrow$ Multiplicandopor−(1/ 4)

Si z = 0 de la ecuación original obtenemos
3x + 6y + 4z –12 = 0 multiplicando por(1/3)

$$x+2y-4=0 \rightarrow x=4-2y \quad ; \quad y=\frac{4-x}{2} \rightarrow y=2-\frac{x}{2}$$

S : Es la región triangular del plano xy que forma la base del tetraedro.

Buscar el volumen del sólido bajo la superficie $z = \frac{3}{4}(4 - x - 2y)$ y sobre la región S.

El plano 3x + 6y + 4z - 12 = 0 interseca al plano xy en la recta x + 2 y - 4 = 0, como

$y = 2 - \frac{x}{2}$, $x = 4 - 2y$ S entonces puede ser el conjunto

$$y\text{–simple}: S = \left\{ (x, y) : 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 2 - \frac{x}{2} \right\}$$

$$x\text{–simple}: S = \left\{ (x, y) : 0 \le x \le 4 - 2y\ ,\ 0 \le y \le 2 \right\}$$

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Tomemos a x como fija e integrar a lo largo de la recta desde y = 0 a y = 2-(x/2) y x = 0 a x = 4.

$$V = \int_0^4 \int_0^{2-(x/2)} \left[\frac{3}{4}(4 - x - 2y) \right] dA = \int_0^4 \left[\frac{3}{4} \int_0^{2-\frac{x}{2}} (4 - x - 2y)\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^4 \frac{3}{4} \left[4y - xy - y^2 \right]_0^{2-(x/2)} dx = \frac{3}{4} \int_0^4 \left[4\left(2 - \frac{x}{2}\right) - x\left(2 - \frac{x}{2}\right) - \left(2 - \frac{x}{2}\right)^2 \right] - \left[4(0) - x(0) - (0^2) \right]$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^4 \left(8 - 2x - 2x + \frac{x^2}{2} - 4 + 2x - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

$$= \frac{3}{4} \int_0^4 \left(4 - 2x + \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{3}{4} \int_0^4 \left(\frac{16 - 8x + x^2}{4} \right) dx$$

$$= \frac{3}{16} \int_0^4 \left(16 - 8x + x^2 \right) dx = \frac{3}{16} \left(16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3} \right)_0^4 = 4$$

4.2.4 Sistema de coordenadas polares

Es otro de los sistemas de coordenadas importantes que se utilizan en la solución de algunos tipos de problemas y aplicaciones.

Recordemos que en el sistema de coordenadas cartesianas, las coordenadas son números llamados abscisa a (x) y ordenada a (y), estos números son distancias dirigidas desde dos rectas fijas (eje x y eje y).

En el sistema de coordenadas polares, las coordenadas son distancias y la medida de un ángulo respecto a un punto fijo y a un rayo fijo(semirecta). El punto fijo es llamado el polo (U origen), y se le designa por la letra "O", el rayo fijo es llamado el eje polar(o recta polar), el cual designamos por OA. EL rayo OA generalmente se dibuja horizontalmente y se extiende hacia la derecha indefinidamente.

Sea P cualquier punto en el plano distinto de O. Sea θ la medida en radianes del ángulo dirigido AOP, positiva cuando se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj y negativa cuando se mide en dirección de las manecillas del reloj, teniendo como lado inicial el rayo OA y como lado terminal el rayo OP. Entonces si r es la distancia no dirigida desde O a P un conjunto de coordenadas polares de P está dado por r y θ, y escribimos estas coordenadas como (r,θ), ver figura 4.2.15.

Veamos un ejemplo.

El punto **P(4,(5/6)π)** se determina dibujando primero el ángulo cuya medida en radianes es (5/6)π, que tiene su vértice en el polo y su lado inicial a lo largo del eje polar, luego el punto en el lado terminal, el cual se encuentra a 4 unidades del polo es el punto P, ver figura 4.2.16.

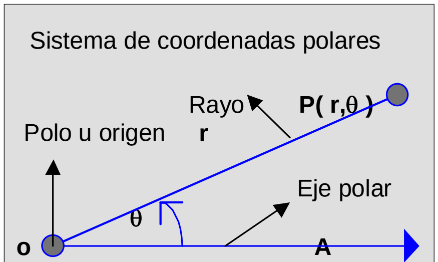


Fig 4.2.15

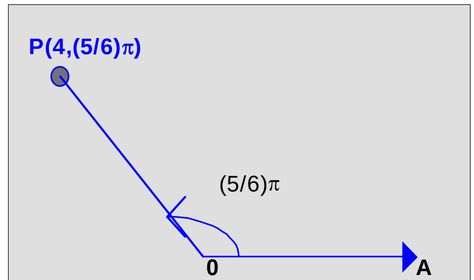


Fig 4.2.16

En el sistema de coordenadas polares no existe correspondencia entre la coordenadas y la posición de los puntos en el plano. Esto no ocurre en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares debido a que existe una correspondencia uno a uno entre las coordenadas cartesianas rectangulares y la posición de los puntos en el plano.

Un conjunto de coordenadas polares de un punto es una pareja ordenada de números reales. Sin embargo, hemos visto que a un punto particular le pueden ser asignados un número ilimitado de parejas ordenadas de números reales. Si el punto P no es el polo, y r y θ están restringidas de tal forma que $r > 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, luego hay un único conjunto de coordenadas polares para P.

Observa un aspecto importante para una mejor comprensión de dichas coordenadas, el cual no se presenta en las coordenadas cartesianas.

Cada punto tiene muchos conjuntos de coordenadas polares, debido a que los ángulos $0 + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, tienen los mismos lados terminales. Para el ejemplificar esto tenemos el punto de coordenadas polares (4,(π/2)) también tiene como coordenadas (4,(5π/2)),(4,9π/2),(4,3π/2, ver figura 4.2.17.

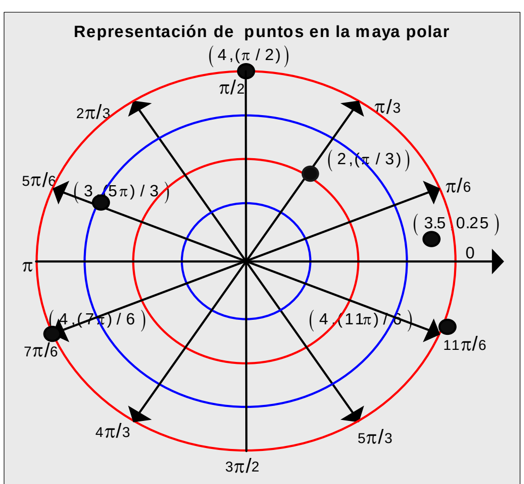


Fig.4.2.17

Frecuentemente deseamos referirnos tanto a coordenadas polares como a las cartesianas de un punto. Para hacerlo, tomamos el origen del sistema de coordenadas cartesianas de tal manera que coincida con el polo del sistema de coordenadas polares, el eje polar como el lado positivo del eje x, el rayo para el cual $\theta = \pi/2$ como el lado positivo del eje y.

Supongamos que P es un punto cuya representación en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares es (x,y) y (r,θ) es una representación en el sistema de coordenadas polares de P. Para el cual se distinguen dos casos, el primero es cuando r > 0, y el segundo cuando r < 0.

➢ Representación de un punto en coordenadas polares y cartesianas

Caso#1 cuando r > 0

El punto P esta en el lado terminal del ángulo de θ radianes y $r = \left|\overline{OP}\right|$,ver figura 4.2.18. Luego

$\cos\theta = \dfrac{x}{\left|\overline{OP}\right|} = \dfrac{x}{r}$, $\quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\left|\overline{OP}\right|} = \dfrac{y}{r}$, $\quad \boxed{\textbf{así } x = r\cos\theta \textbf{ y } y = r\operatorname{sen}\theta. \quad Ec_1}$

Caso#2 cuando r < 0

El punto P está en la extensión del lado terminal y $r = -\left|\overline{OP}\right|$. Luego si Q es el punto (-x,-y) tenemos :

$\cos\theta = \dfrac{-x}{\left|\overline{OQ}\right|} = \dfrac{-x}{\left|\overline{OP}\right|} = \dfrac{-x}{-r} = \dfrac{x}{r}$, $\quad \boxed{\textbf{así } x = r\cos\theta \quad Ec_2}$

También $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{-y}{\left|\overline{OQ}\right|} = \dfrac{-y}{\left|\overline{OP}\right|} = \dfrac{-y}{-r} = \dfrac{y}{r}$ de aquí que $\boxed{y = r\operatorname{sen}\theta \quad Ec_3}$ ver figura 4.2.19.

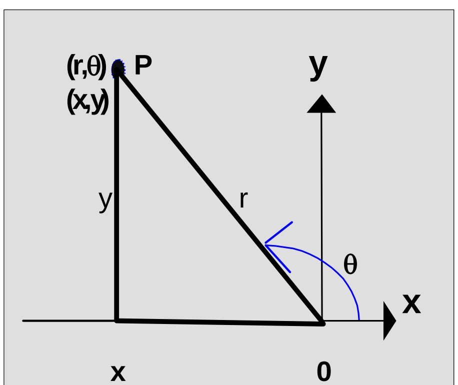


Fig 4.2.18

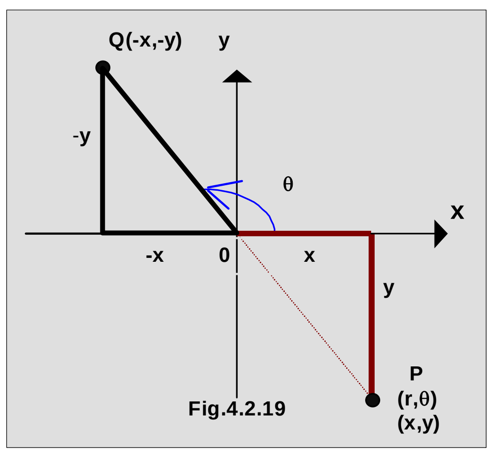


Fig.4.2.19

Las ecuaciones de x y de y son $\boxed{x = r\cos\theta \qquad \textbf{y} \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.}$

De éstas fórmulas podemos obtener las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto cuando sus coordenadas polares son conocidas. También de las fórmulas podemos obtener una ecuación polar de una curva si se conoce una ecuación cartesiana rectangular.

Relación con las coordenadas cartesianas

Para obtener fórmulas que nos den un conjunto de coordenadas polares de un punto cuando sus coordenadas cartesianas rectangulares son conocidas, elevemos al cuadrado ambos lados de la Ec_1.

$X^2 = r^2\cos^2\theta$ y $y^2 = r^2\text{sen}^2\theta$ Igualando y sumando ambos miembros

$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta$ $x^2 + y^2 = r^2(\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$ de esto obtenemos

$x^2 + y^2 = r^2$ donde $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$

de la Ec_1 dividiendo tenemos : $\dfrac{r\text{sen}\theta}{r\cos\theta} = \dfrac{y}{x}$ esto equivale a la $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ Ec_4

Las cuatro ecuaciones se utilizan en la solución de ejercicios

➢ Ecuaciones en coordenadas polares

Una ecuación polar es una ecuación en r y θ , una solución de una ecuación polar es un par ordenado (a,b) que lleva a una igualdad si se sustituye en la ecuación **r** por **a** y **θ** por **b.**

Ejemplos de ecuaciones en coordenadas polares: $r = 8\text{sen}\theta$ y $r = \dfrac{1}{1-\cos\theta}$

La gráfica de una ecuación polar es el conjunto de puntos , donde cada uno de los cuales tiene al menos un par de coordenadas polares, que satisfacen la ecuación .

Pasos para construir una gráfica

- Construir una tabla de valores
- Graficar los puntos correspondientes
- Unir los puntos mediante curvas suaves

Ejemplo #1

Dibujar la gráfica de la ecuación polar $r = 8\text{sen}\theta$.

Solución

Tabla de valores 4.2.4												
θ	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6
r	0	4	6.93	8	6.93	4	0	-4	-6.93	-8	-6.93	-4

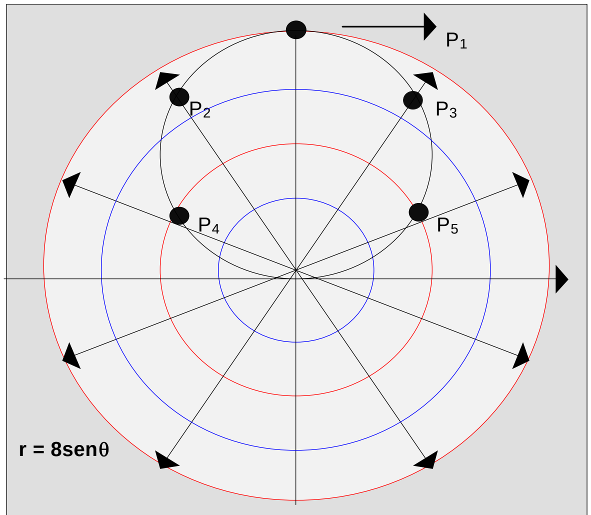


Fig 4.2.20

Puntos de la gráfica

$P_1 = (8,\pi/2)$,$(-8,3\pi/2)$
$P_2 = (6.93,2\pi/3)$,$(-6.93,5\pi/3)$
$P_3 = (6.93,\pi/3)$,$(-6.93,4\pi/3)$
$P_4 = (4,5\pi/6)$,$(-4,11\pi/6)$
$P_5 = (4,\pi/6)$,$(-4,7\pi/6)$

La verificación de la gráfica r = 8senθ, es la intersección indicada, ilustra el procedimiento general para la transformación entre los sistemas de coordenadas polares y rectangulares.

Ejemplo#2

Encuentre las coordenadas cartesianas correspondientes a ((4,π/6) y las coordenadas polares correspondientes $\left(-3,\sqrt{3}\right)$, ver figura 4.2.21.

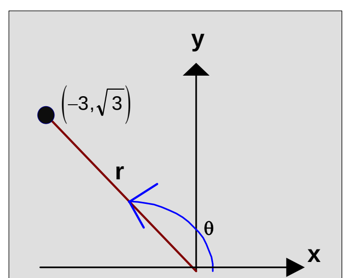


Fig 4.2.21

Solución

$$\text{Si}\,(r,\theta)=\overset{r\ ,\ \theta}{\left(4,\frac{\pi}{6}\right)} \qquad ;\ x=4\cos\frac{\pi}{6}=4*\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

$$y=4\text{sen}\frac{\pi}{6}=4*\frac{1}{2}=2\ ; \qquad \text{Si}\,(x,y)=\left(-3,\sqrt{3}\right)\ \text{entonces}$$

$$r^2=(-3)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2\ =\ 9+3=12$$

$$\text{Tan}\theta=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad ;\ \text{Un valor de } (r,\theta)\text{es}\left(2\sqrt{3},5\,\frac{\pi}{6}\right), \qquad \text{Otro valor es : }\left(-2\sqrt{3},-\frac{\pi}{6}\right)$$

Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares

Las propiedades de simetría nos ayudan a dibujar una gráfica.

Reglas de simetría

- **Regla 1**

La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto al eje de las x(eje polar). La ecuación no se altera al sustituir **θ** por **- θ,** ver figura 4.2.22a .

- **Regla 2**

La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto al eje de las y(recta $\theta = \pi/2$). La ecuación no se altera cuando se sustituye **θ** por **(π - θ),** ver figura 4.2.22b.

∗ **Regla 3**

La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto al origen (polo). La ecuación no se altera si se sustituye **(r)** por **(-r)** o **θ** por **(π+θ)** se obtiene una ecuación equivalente, ver figura 4.2.22c.

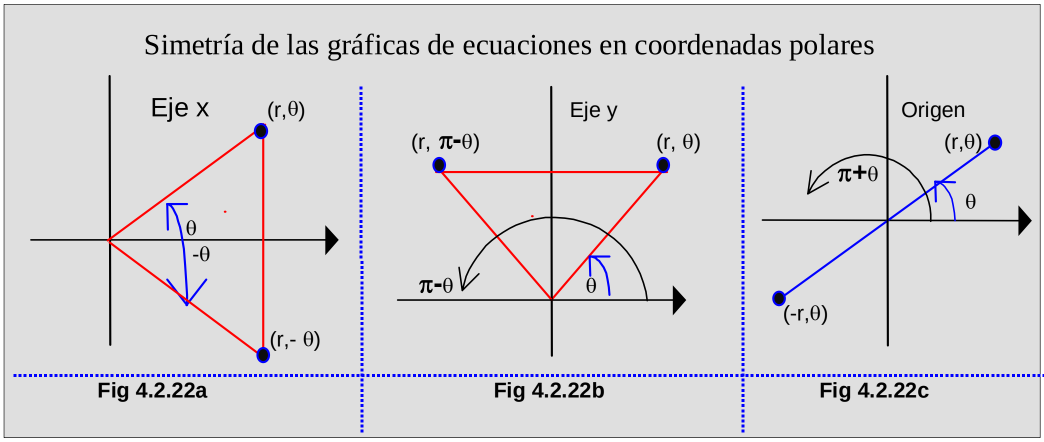


Fig 4.2.22a **Fig 4.2.22b** **Fig 4.2.22c**

Cardioides y caracoles

Hay que considerar las ecuaciones de la forma **r = a± bcosθ , r = a± bsenθ** con a y b positivas a estas se les llama caracoles. Los casos especiales en los que a = b, las cuales se denominan cardioides.

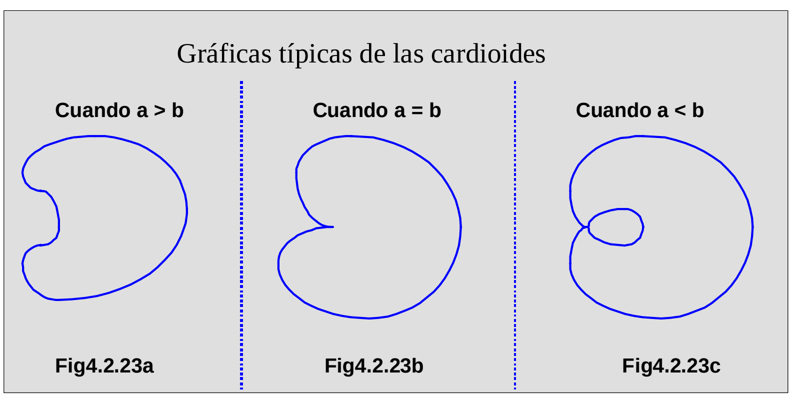


Fig4.2.23a **Fig4.2.23b** **Fig4.2.23c**

Espirales

La gráfica $r = a\theta$ se llama espiral de Arquímedes y la gráfica $r = a e^{b\theta}$ se llama espiral logarítmica.

Ejemplo#3

Analice la ecuación $r = 8\cos 2\theta$ respecto a la simetría y dibuje su gráfica.

Solución

Puesto que $\cos(-2\theta) = \cos 2\theta$ y $\cos(2(\pi-\theta)) = \cos(2\pi-2\theta) = \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$
la gráfica es simétrica con respecto a los dos ejes y al origen, ver figura 4.2.24.

Tabla de valores (4.2.5)	
θ	r
0	±2.8
$\pi/2$	±2.6
$\pi/6$	±2
$\pi/4$	0

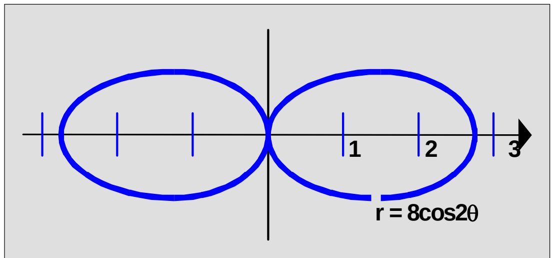


Fig 4.2.24

Rosas

Las ecuaciones polares de la forma **r = acosnθ** **y** **r = asennθ** representan curvas en forma de flores las cuales son llamadas **rosas.**

Las rosas tiene n pétalos(rizos) si n es impar y n ≥ 3.
Las rosas tiene 2n pétalos si n es par y n ≥ 2.

Ejemplo#4

Dibuje la gráfica de $r = \theta$ para $\theta \geq 0$.

Solución

$r = a\theta$, para ello es necesario hacer una tabla.

Tabla de valores(4.2.6)	
θ	r
0	0
$\pi/2$	$\pi/2$
π	π
$3\pi/2$	$3\pi/2$
2π	2π
$5\pi/2$	$5\pi/2$

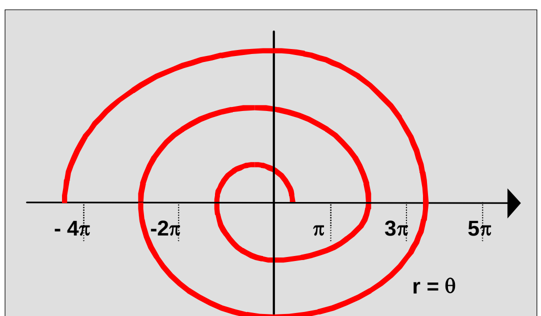


Fig 4.2.25

Intersección de curvas en coordenadas polares

Una consecuencia de la multiplicidad de coordenadas polares es que la solución simultánea de dos ecuaciones polares no siempre da todos los puntos de intersección. La única manera de tener la certeza de encontrar todos los puntos de intersección de dos curvas en coordenadas polares consiste en dibujar sus gráficas. Para mayor aclaración, cuando se van a encontrar las intersecciones de dos curvas y nos dan sus ecuaciones polares hay que resolver las ecuaciones simultáneamente; luego hacer la gráfica de las dos ecuaciones con cuidado y después descubrir otros puntos de intersección posibles.

Ejemplo#5

Encuentre los puntos de intersección de las dos cardioides r = 1 + cosθ y r = 1 - senθ.

Solución

Eliminando r en las 2 ecuaciones nos queda 1 + cosθ = 1 - senθ $\therefore$ cosθ = senθ, o sea tanθ = -1.

$\theta = \frac{3}{4}\pi$ y $\theta = \frac{7}{4}\pi$, estos son puntos de intersección $\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi\right)$, $\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi\right)$ y un tercer punto es el polo.

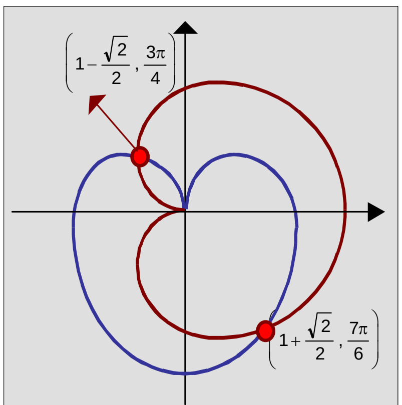


Fig 4.2.26

4.2.5 Integrales dobles en coordenadas polares

Una integral doble puede ser mas fácil de integrar después de que ha sido ***"transformada"*** de coordenadas xy (cartesianas) a coordenadas polares rθ. Es probable que tal caso sea cuando la región ***"R"*** de integración es un ***rectángulo polar*** **.**

Rectángulo polar

Es una región descrita por las desigualdades $a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$ (1), el rectángulo polar lo podemos observar en la figura 4.2.29.

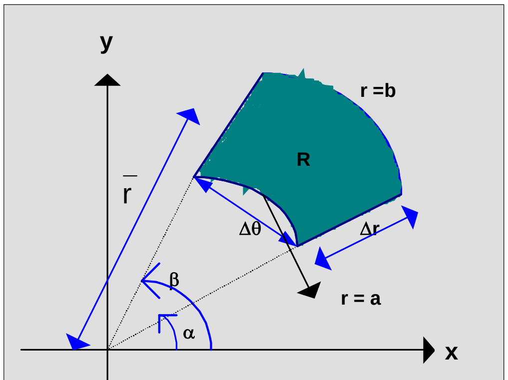


Fig 4.2.29

Si a = 0, es un sector circular de disco de radio b. Si $0 \le a \le b$, $\alpha = 0$ y $\beta = 2\pi$, es un anillo circular de radio interior a y radio exterior b. Debido a que el área de un sector circular de radio r y ángulo central θ es $(1/2)r^2\theta$, el área del rectángulo polar (1) es

$$A=\frac{1}{2}b^2(\beta-\alpha)-\frac{1}{2}a^2(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}(a+b)(b-a)(\beta-\alpha)=\bar{r}\Delta r\Delta\theta, \quad Ec_2$$

donde $\Delta r = b - a$, $\Delta\theta = \beta - \alpha$ y $\bar{r} = (1/2)(a+b)$ radio promedio del rectángulo polar.

Supóngase que queremos calcular la integral doble $\iint_R f(x,y)dA$ donde ***"R"*** es un rectángulo polar (1). Definiremos la integral doble como límite de las sumas de Riemann en términos de particiones polares, que consisten en rectángulos polares. Iniciemos con lo que es una partición.

Partición

$a = r_0 < r_1 < r_2 < ... < r_m = b$ de [a,b] en m subintervalos iguales de longitud $\Delta r=(b-a)/m$ y una partición $\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_n = \beta$ de $[\alpha,\beta]$ en n subintervalos iguales de longitud $\Delta\theta = (\beta-\alpha)/n$. Esto da la partición polar P de ***"R"*** en los K = mn rectángulos polares $R_1, R_2, R_3, ..., R_n$,ver figura 4.2.30.

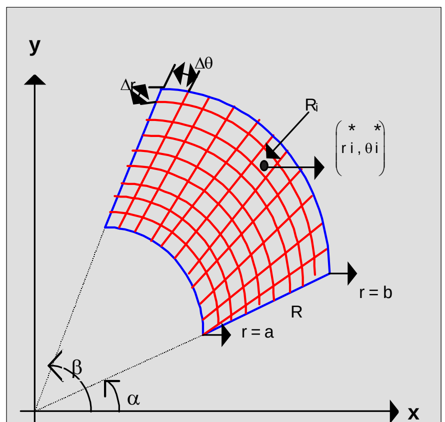


Fig 4.2.30

La norma | P | de esta partición polar es la máxima de las longitudes de las diagonales de sus rectángulos polares.

Si el punto central de R_i, tiene como coordenadas polares $\left(r_i^*, \theta_i^*\right)$ donde r_i^* es llamado radio promedio de R_i , siendo las coordenadas rectangulares de este punto $x_i^* = r_i^* \cos\theta_i^*$,

$\overset{*}{y_i} = \overset{*}{r_i}\,\mathrm{sen}\,\overset{*}{\theta_i}$ .La suma de Riemann de la función f(x,y) asociada a la partición polar P sería $\sum_{i=1}^{k} f\left(\overset{*}{x_i},\overset{*}{y_i}\right)\Delta A$,donde $\Delta A_i = \overset{*}{r_i}\,\Delta r\Delta\theta$, es el área del rectángulo polar R_i.

Expresión de la suma riemanniana en coordenadas polares

$$\sum_{i=1}^{k} f\left(\overset{*}{x_i},\overset{*}{y_i}\right)\Delta A_i = \sum_{i=1}^{K} f\left(\overset{*}{r_i}\cos\overset{*}{\theta_i},\overset{*}{r_i}\,\mathrm{sen}\overset{*}{\theta_i}\right)\overset{*}{r_i}\Delta r\Delta\theta$$
$$= \sum_{i=1}^{K} g\left(\overset{*}{r_i},\overset{*}{\theta_i}\right)\Delta r\Delta\theta$$

siendo $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\theta)r$, Esta es una suma riemanniana de la integral doble

$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} g(r,\theta) \quad = drd\theta \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta) \quad rdrd\theta$ de esto se deduce

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{k} f\left(\overset{*}{x_i},\overset{*}{y_j}\right)\Delta A_i \quad = \lim_{\Delta r,\Delta\theta\to 0}\sum_{i=1}^{k} g\left(\overset{*}{r_i},\overset{*}{\theta_i}\right)\Delta rA\theta = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} g(r,\theta)drd\theta\,.$$

Es decir $\iint_R f(x,y)dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} f(r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta)rdrd\theta \quad (3)$

Con esta se obtiene una transformación formal de una integral doble sobre rectángulo polar (1) en coordenadas polares sustituyendo x por $r\cos\theta$ y y por $r\mathrm{sen}\theta$, $dA = dxdy$ por $rdrd\theta$ e introduciendo los límites adecuados para r y θ. La **r** que aparece en el segundo miembro en la fórmula (3), se visualiza en el rectángulo polar de la figura 4.2.31, siendo el área $dA = rdrd\theta$. Las dimensiones del rectángulo polar sugieren que $dA = rdrd\theta$.

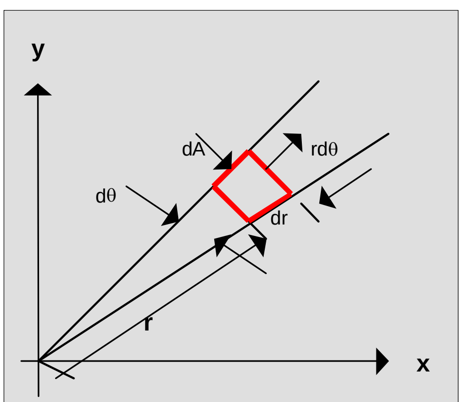


Fig.4.2.31

Ejemplo#1

Encuentre el volumen del sólido de la figura 4.2.32. Esta es la figura limitada abajo por el plano **xy** y arriba por el paraboloide $z = 25 - x^2 - y^2$.

Solución

El paraboloide interseca el plano xy en el círculo $x^2 + y^2 = 25$, podemos calcular el volumen del sólido integrando sobre el cuarto de círculo del primer cuadrante (ver figura 42.33) y al final se multiplica el resultado por 4, entonces

$$V = 4\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \left(25 - x^2 - y^2\right) dydx$$

Sería muy tedioso integrar con respecto a y , lo que se recomienda es transformar la integral en coordenadas polares y es a como sigue $25 - x^2 - y^2 = 25 - r^2$, como el primer cuadrante del disco circular se describe como $0 \le r \le 5$, $0 \le \theta \le \pi/2$, entonces por medio de la fórmula 3 obtenemos

$$V = 4\int_0^{\pi/2} \int_0^5 \left(25 - r^2\right) rdrd\theta = 4\int_0^{\pi/2} \left[\frac{25}{2} r^2 - \frac{1}{4} r^4\right]_0^5 d\theta = 4\left(\frac{625}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{625\pi}{2}.$$

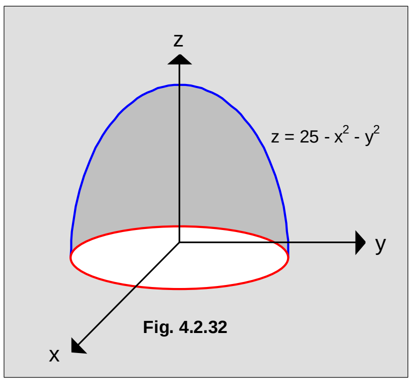


Fig. 4.2.32

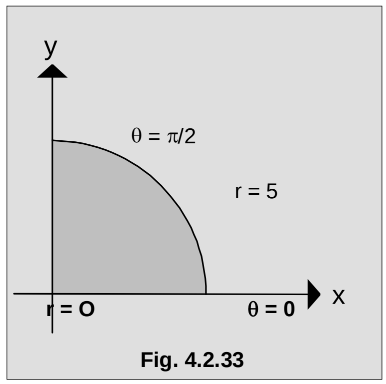


Fig. 4.2.33

Ejemplo#2

Encuentre el área indicada mediante integración doble en coordenadas polares. El área limitada por el círculo r = 1

Solución

$r = 1$, $x + y = 1$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$

$$A = \iint_R rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}[\theta]_0^{2\pi} = \pi u^2$$

Ejemplo#3

Encuentre el área indicada mediante integración doble en coordenadas polares. El área limitada por el círculo r = 3senθ.

solución

$$A = \iint_R rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{3\operatorname{sen}\theta} rdrd\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{3\operatorname{sen}\theta} d\theta \quad = \quad \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}9\operatorname{sen}^2\theta d\theta$$

$$=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2\theta d\theta \quad = \quad \left[-\frac{9}{2}\cos\theta+2\cos^2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{9}{2}\cos 2\pi+2\cos^2 2\pi=-\frac{9}{2}+2=\frac{-9+4}{2}=-\frac{5}{2}u^2$$

Integrales dobles en coordenadas polares sobre regiones más generales

Si **“*R*“** es una región mas general, entonces $\iint_R f(x,y)dA$ puede transformarse en coordenadas polares expresándola como un límite de sumas riemanniana asociadas *“particiones polares interiores“* como las de la figura 4.2.33.

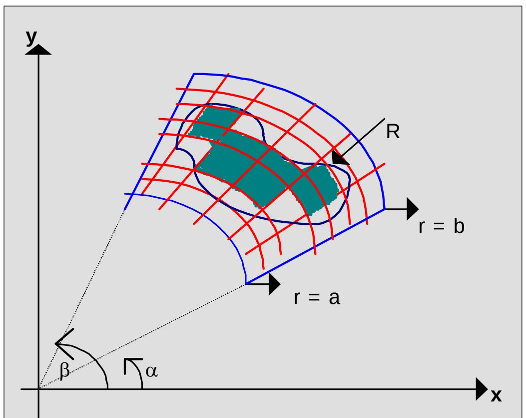


Fig.4.2.34

En esta sección se abordará los dos casos especiales de importancia práctica, correspondiente a los dos tipos de regiones planas (***x-simple y y-simple***) las cuales desempeñan el mismo papel en coordenadas polares. Estos dos casos de regiones planas tienen un interés especial para la integración polar; a estas se les llama *r-simple y θ -simple* . Decimos que “***R***“ es un conjunto ***“r-simple“*** si tiene la forma de la figura 4.2.35 y la siguiente fórmula.

$$R = \{(r,\theta): \phi_1(\theta) \le r \le \phi_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}.$$

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_\alpha^\beta\int_{\phi_1}^{\phi_2} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)r\,dr\,d\theta \qquad \text{fórmula 4}$$

En este caso la fórmula 4 da la evaluación en coordenadas polares de una integral doble sobre “***R***“ (si la integral existe). Nota que primero se integra con respecto a r, con límites $\phi_1(\theta)$ y $\phi_2(\theta)$ como coordenadas r de los puntos extremos de un segmento radial representativo de ”***R***“, ver figura 4.2.35.

Decimos que “***R***“ es un conjunto “***θ-simple***“ si tiene la forma de la figura 4.2.36 y la siguiente fórmula.

$$R=\{(r,\theta): a\le r\le b, \psi_1(r)\le\theta\le\psi_2(r)\} \text{ en este caso}$$

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\psi_1}^{\psi_2} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\,r\,d\theta\,dr \qquad \text{fórmula 5}$$

Aquí se integra primero con respecto a θ, siendo los límites $\psi_1(r)$ y $\psi_2(r)$, como se indica en la figura 4.2.36 .

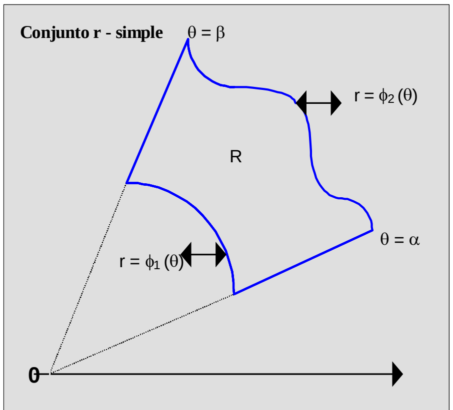


Fig 4.2.35

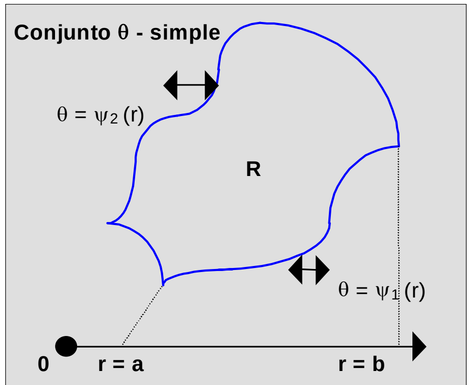


Fig 4.2.36

En la figura 4.2.37 se puede ver la forma de como se puede establecer de manera formal la integral iterada del segundo miembro de la fórmula 4 . Un elemento representativo del área, $dA = rdrd\theta$ es barrido primero en forma radial desde $r = \phi_1(\theta)$ hasta $r = \phi_2(\theta)$. Después se barre el resultado desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$ para barrer la región "***R***".

La figura 4.2.38 muestra como puede establecerse la integral iterada fórmula 5 de manera formal.

Podemos observar que las fórmulas 3,4,5 para la evaluación de una integral doble en coordenadas polares toma la siguiente forma :

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_S f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta \quad \text{fórmula 6}$$

La literal s del segundo miembro corresponde a la elección de los límites apropiados de **r** y **θ** (una vez que se ha determinado el orden de integración) para que la región "***R***" sea barrida a la manera de las figuras 4.2.37 y 4.2.38. Con f(x,y) = 1 , la fórmula 6 se reduce a $A = a(R) = \iint_S r\,dr\,d\theta$ fórmula 7 para el cálculo de área de "**R**" para integrales dobles en coordenadas polares.

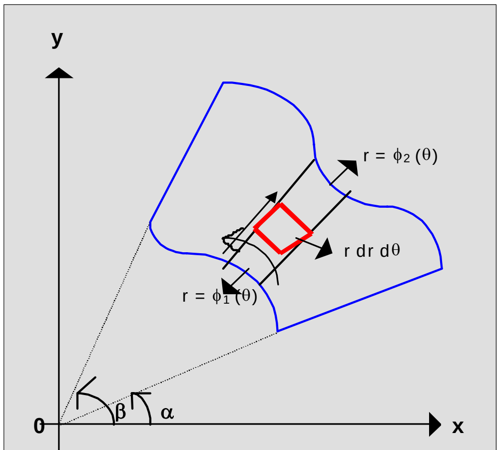


Fig.4.2.37

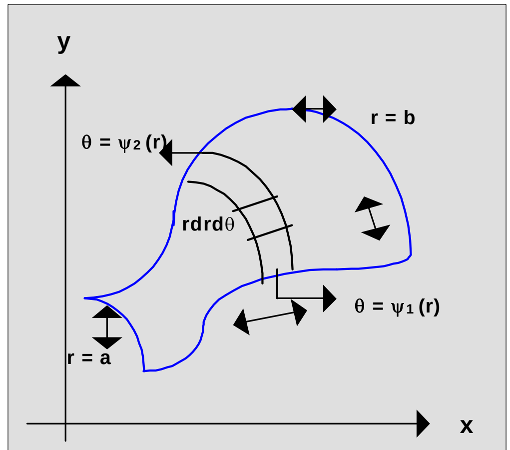


Fig 4.2.38

Ejemplo#1

La región “***R***“ limitada por el círculo $(x - a)^2 + y^2 = a^2$ de la figura 4.2.39.

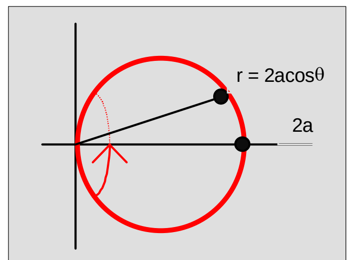


Fig.4.2.39

Solución

La forma de escribir la ecuación de su frontera en coordenadas polares es $(x^2 - 2ax + a^2) + y^2 = a^2$;

$$x^2 + y^2 = 2ax;$$
$$r^2 = 2ar\cos\theta;$$
$$r = 2a\cos\theta.$$

Por lo tanto, la región “***R***“ se describe en coordenadas polares mediante las desigualdades

$0 \le r \le= 2a\cos\theta$, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. En consecuencia

$A = a(R) = \iint_S r\,dr\,d\theta$ produce

$$A=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta} r dr d\theta \quad = \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{2a\cos\theta} d\theta$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2a^2\cos^2\theta d\theta \quad = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2(1+\cos 2\theta) \quad d\theta \quad = a^2\left[\theta+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi a^2$$

Ejemplo#2

Encuentre el volumen del sólido limitado arriba por el paraboloide $z = 8 - r^2$ y abajo por el paraboloide $z = r^2$, ver figura 4.2.40.

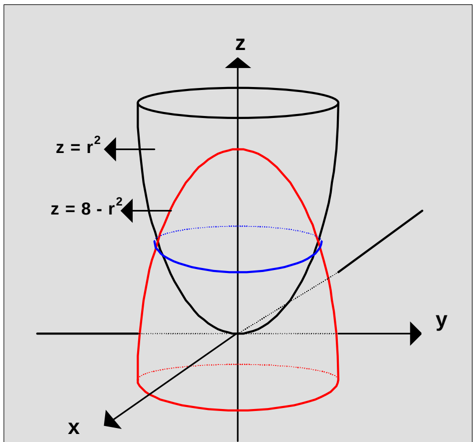


Fig.4.2.40

Solución

La curva de intersección de los dos paraboloides se encuentra con la solución simultánea de las dos ecuaciones de las dos superficies. Se elige z para obtener $r^2 = 8 - r^2$; esto es $r^2 = 2$. Por lo tanto, el sólido se encuentra arriba del disco circular $r \leq 4$ y su volumen es

$$V = \int_0 \int_{r\leq 2} \left(z_{top} - z_{bot}\right) dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left[\left(8 - r^2\right) - r^2\right] r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(8r - 2r^3\right) r\,dr\,d\theta = 2\pi\left[4r^2 - (1/2)r^4\right]_0^2 = 16\pi$$

<u>4.2.6 Area de superficies en integrales dobles</u>

Las integrales dobles pueden ser utilizadas para determinar el área de una porción de la superficie $z = f(x,y)$ que se localiza sobre una región cerrada R en el plano xy.

Considerar un rectángulo "***T***", cuya proyección sobre el plano **xy** es otro rectángulo "***R***", ver figura 4.2.41. Sus áreas A(T) y A(R) se relacionan por:

$$A(T) = A(R)\sec\gamma,$$

donde γ : es el ángulo agudo que forma los dos rectángulos (T y R).

Ahora considérese un plano cualquiera no vertical que forme un ángulo agudo γ con el plano **xy; d**onde γ es el ángulo formado por los vectores normales unitarios correspondientes **n** y **k**. Sea T un paralelogramo de este plano que se proyecta como un rectángulo R del plano **xy, ver figura 4.2.42.** Si se divide R a través de rectas paralelas y perpendiculares a nxk en rectángulos pequeños R_k , las figuras correspondientes sobre T serán rectángulos T_K para las cuales se cumple que

$A(T) = A(R) \sec \gamma$. Esta fórmula también se cumple para R y T.

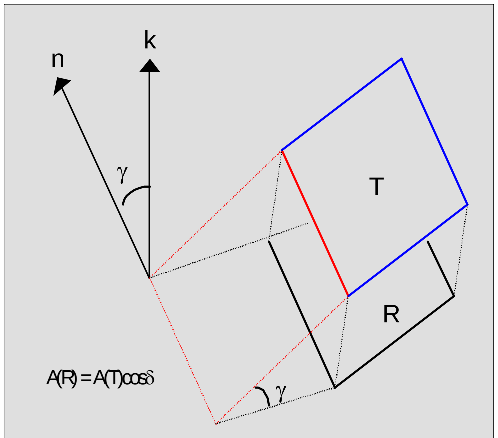


Fig.4.2.41

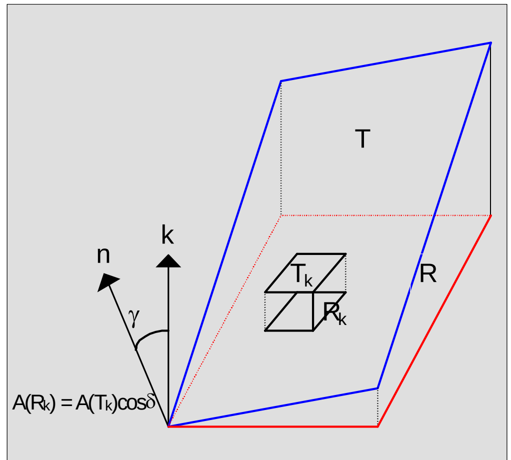


Fig 4.2.42

Area en superficies generales

Sea F una función de tres variables que tiene primeras derivadas parciales continuas F_X, F_Y, F_Z, con $F(x,y) = F_Z \neq 0$. Considerar la superficie $F(x,y.z) = K$ y sea G la parte de esta superficie que se proyecta sobre una región cerrada y acotada "***S***" del plano xy ,ver figura 4.2.43. Queremos definir el concepto de *Area de G* y encontrar una fórmula para calcularla.

Forme una partición P *de* **"S"** por medio de rectas paralelas a los ejes de las *x* y de las *y* en n rectángulos R_k. donde **k = 1,2,...,n** los rectángulos restantes están contenidos en S. Sea G_k la parte de la superficie G que se proyecta en R_k, indíquese por $P_k(x_k,y_k,z_k)$, y sea P_k el punto de G_k que está directamente arriba del vértice $(x_k,y_k,0)$ de R_k, ver figura 4.2.44. La superficie tiene un plano tangente en P_K. Por último, sea T_k el paralelogramo del plano tangente en P_k que se proyecta en R_k , ver figura 4.2.45 y el área de T_k como $A(T_k)$.

Si la norma $|P|$ de la partición de S es pequeña, el conjunto de paralelogramo tangente T_k conformará la superficie aproximada de G y cuanto más pequeña se tome $|P|$, mejor será la conformación. Esto sugiere la definición del área de G.

Definición Area de la superficie G

$$A(G) = \lim_{|P|\to 0}\sum_{k=1}^{n} A(T_k) \qquad (2)$$

Para convertir la fórmula 2 en una fórmula que pueda ser utilizada, observa primero que el vector gradiente $\nabla F(P_k)$ es normal a la superficie G en P_k aunque podría apuntar en sentido opuesto del mostrado en la figura 4.2.45.

Si γ_k es el ángulo que forman $\nabla F(P_k)$ y el vector vertical **k**, entonces $|\cos\gamma_k| = \dfrac{|\nabla F(P_k)\bullet k|}{|\nabla F(P_k)||k|}$

$|\nabla F||k| = 1$ Ahora, bien $\nabla F(P_k) = F_x(P_k)i + F_y(P_k)j + F_z(P_k)k$ entonces

$$|\sec\gamma_k| = \frac{\sqrt{[F_x(P_k)]^2 + [F_y(P_k)]^2 + [F_z(P_k)]^2}}{|F_z(P_k)|}$$

Concluimos, apoyándonos en la fórmula 1 y 2, que

$$A(G) = \lim_{|P|\to 0}\sum_{k=1}^{n} A(T_k) = \lim_{|P|\to 0}\sum_{k=1}^{n} |\sec\gamma_k| A(R_k) = \lim_{|P|\to 0}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{F^2x + F^2y + F^2z}}{|Fz|} A(R_k)$$

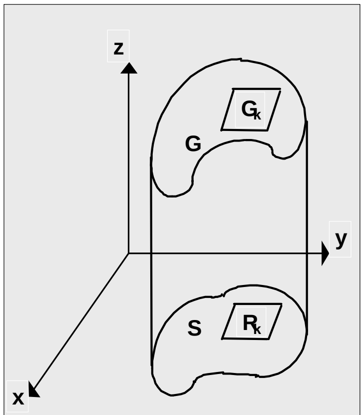


Fig 4.2.43

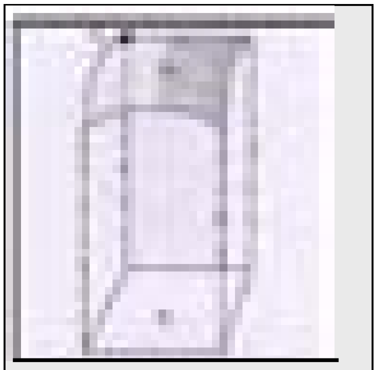


Fig 4.2.44

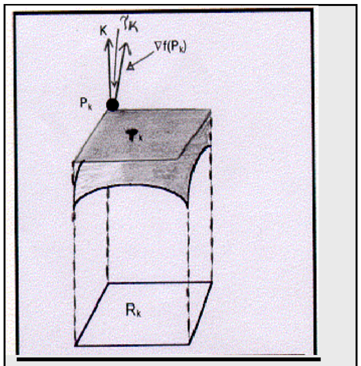


Fig 4.2.45

En caso de que la superficie este dada por $z = f(x,y)$ o por su equivalente $F(x,y,z) = f(x,yz) - z$.

Entonces $F_x = f_x$, $F_y = f_y$, $F_z = -1$, La fórmula 3 se transformaría en

$$A(G) = \iint_S \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dA$$

Ejemplo#1

Encontrar el área de la superficie que se forma cuando los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, cortan al plano $2x + y + z = 4$.

Solución

La región R es el rectángulo en el primer cuadrante del plano xy acotado por las rectas $x = 1$, $y = 1$, ver figura 4.2.46.

La superficie tiene la ecuación $2x + y + z = 4$.

Resolviendo para z, obtenemos $z = 4 - 2x - y$
por tanto $f(x,y) = 4 - 2x - y$

$f_x = -2$, $(f_x)^2 = 4$, $f_y = -1$, $(f_y)^2 = 1$

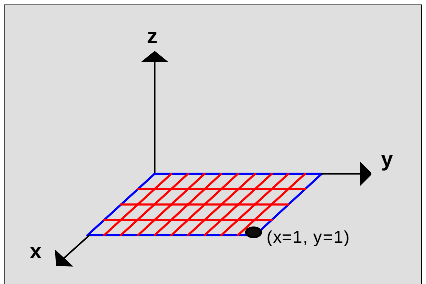


Fig 4.2.46

$$A = \iint_S \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dxdy$$

$$A = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{4+1+1}\, dxdy = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{6}\, dxdy = \int_0^1 \left[\sqrt{6}\, x\right]_0^1 dy$$

$$= \int_0^1 \sqrt{6}dy = \left[\sqrt{6}y \right]_0^1 = \sqrt{6}\,u^2$$

Ejemplo#2

Si S es la región rectangular del plano xy que está acotada por las rectas x = 0, x =1, y = 0, y = 2, encuentre el área de la parte de la superficie semicilíndrica $z = \sqrt{4-x^2}$ que se proyecta sobre S, ver figura 4.2.47.

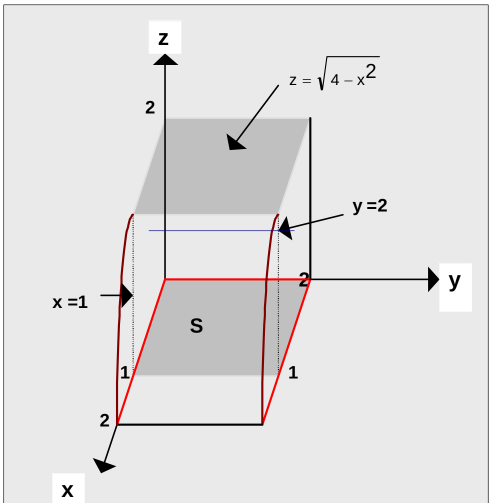


Fig 4.2.47

Solución

$F(x,y) = \sqrt{4-x^2}$. Entonces $F_x = -x/\sqrt{4-x^2}$, $f_y = 0$ y $A(G) = \iint_S \sqrt{f_x^{\,2} + f_y^{\,2} + 1}\,dA$

$$= \iint_S \sqrt{\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2 + 1}\,dA = \iint_S \sqrt{\frac{x^2}{4-x^2}}\,dA = \iint_S \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dA$$

$$= 2\int_0^1\int_0^2 \left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dydx = 2\int_0^1 \left[\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} y\right]_0^2 dx = 4\int_0^1 \left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= 4\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4^2-x^2}}dx = 4\left[\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$$

PROGRAMACIÓN

Programa para ejercicios de área de superficies, para ello se piden como datos de entrada la función, los límites en x y en y y la cantidad de límites.

```
Asuper[Fn_,l1_,l2_,l3_,l4_,Clim_]:=Module[{Dx,Dy,Fx,Fy,Integ,Area},
Print[" "];
Print[" Salida del programa "];
Print[" "];
Print[StringForm[" Función de entrada  ** Fn = ``",Fn]];
```

```
Print[" "];
Print[StringForm[" Lim. inf.integral.1 I1=``",I1]];
Print[" "];
Print[StringForm[" Lim. sup. integral.1 I2=``",I2]];
Print[" "];
Print[StringForm[" Lim. inf. integral.2 I3=``",I3]];
Print[" "];
Print[StringForm[" Lim. sup. integral.2. I4=``",I4]];
Print[" "];
Print[StringForm[" Límites a evaluar Clim=``",Clim]];
Print[" "];
If[Clim==4,
  Fx=D[Fn,X];
  Dx=Fx^2;
  Print[StringForm[" Derivada al cuadrado en x Fx=``",Dx]];
  Fy=D[Fn,Y];
  Dy=Fy^2;
  Print[" "];
  Print[StringForm[" Derivada al cuadrado en y Fy=``",Dy]];
  Print[" "];
  Integ=Dx+Dy+1;
  Area=N[Integrate[Sqrt[Integ],{X,I1,I2},{Y,I3,I4}],5];
  Print[StringForm[" El area es Area=``",Area]],
Print["Los limites no son para integrales dobles "];];
]
Asuper[4-2X-Y,0,1,0,1,4]
```

Salida del programa

```
Función de entrada ** Fn = 4 - 2 X - Y

Lim. inf.integral.1 I1=0
Lim. sup. integral.1 I2=1
Lim. inf. integral.2 I3=0
Lim. sup. integral.2. I4=1
Límites a evaluar Clim=4

Derivada al cuadrado en x Fx=4
Derivada al cuadrado en y Fy=1
El area es Area=2.4495
```

4.2.7 Aplicaciones de las integrales dobles

Las integrales dobles se pueden usar para el cálculo de la masa m ,momentos de inercia, radios de giro y centroide $(\bar{x},\bar{y})$ de una placa delgada o de una lámina plana que ocupa una región limitada ***"R"*** del plano **xy**. Imagínese que la densidad de la lámina (en unidades de masa por unidad de área) en el punto (x,y) esta dada por la función continua $\rho(x,y)$, ρ símbolo de la densidad, ver figura 4.2.48(láminas de material no homogéneo).

Sea $P=\{R_1,R_2,R_3,...,R_n\}$ una partición interior de R y escójase un punto $(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$ de cada subrectángulo R_i, ver figura 4.2.49.

La masa del pedazo de la lámina que ocupa R_i tendrá el valor aproximado $\rho\left(\bar{x}_i, \bar{y}_i\right)\Delta A_i$, donde ΔA_i designa el área A (R_i) de R_i. Por lo tanto la masa aproximada de la lámina completa estará dada por

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\bar{x}_i, \bar{y}_i\right)\Delta A_i$$

La verdadera masa **m** se obtiene tomando el límite de m, cuando la norma | P| de la partición interior P tiende a cero, esta suma riemanniana se aproxima a las integrales dobles sobre **"R"** correspondientes, por lo que definiremos la masa m.

$$m \approx \iint_R \rho(x, y)\, dA, \quad \text{Ec1}$$

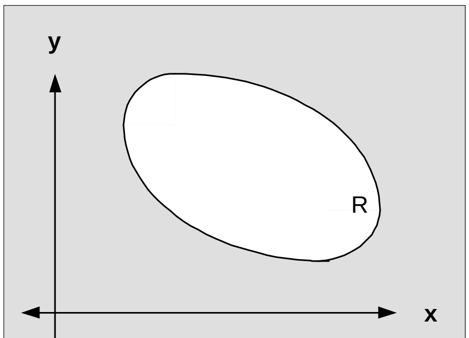


Fig 4.2.48

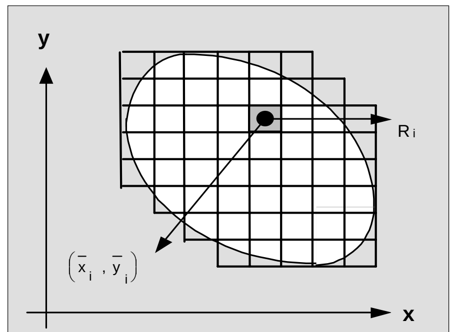


Fig.4.2.49

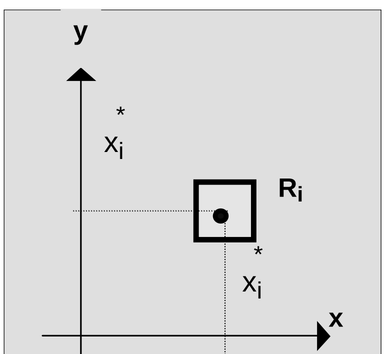


Fig 4.2.50

Centro de masa

Recuérdese que el momento de una partícula con respecto al eje de las x es el producto de su masa por su distancia orientada al eje de las x; su momento con respecto al eje de las y es el producto de su masa por su distancia orientada al eje de las y.

Los momentos M_x y M_y de la lámina con respecto a los ejes de las x y de las y tiene valores aproximados de $M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i\, \rho\left(\bar{x}_i, \bar{y}_i\right)\Delta A_i$;

$$M_y \approx \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\, \rho\left(\bar{x}_i, \bar{y}_i\right)\Delta A_i$$

como integral doble sería $M_x \approx \iint_R y\rho(x,y)dA$; $M_y \approx \iint_R x\rho(x,y)dA$

Abreviación de las fórmulas de la masa y momentos

En términos del elemento de masa **dM = ρdA.**

$$m \approx \iint_R dM; \qquad M_x = \iint_R ydM; \qquad M_y = \iint_R xdM$$

Las coordenadas $(\bar{x},\bar{y})$ del centro de masa (centroide o punto de equilibrio) de la lámina estará dada por $\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\frac{1}{m}\iint_R x\rho(x,y)dA$; $\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\frac{1}{m}\iint_R y\rho(x,y)dA$

En el caso de densidad variable ρ(x,y) tenemos las fórmulas

$$\bar{x}=\frac{M_y \iint_R x\rho(x,y)dA}{m\iint_R \rho(x,y)dA} \qquad \bar{y}=\frac{M_x \iint_R y\rho(x,y)dA}{m\iint_R \rho(x,y)dA}$$

En consecuencia $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son los valores promedio de x y y con respecto a la masa de la región **"R"** . El centroide $(\bar{x},\bar{y})$ es el punto de equilibrio de la lámina.

Ejemplo#1

Una lámina ocupa una región limitada por las rectas y = x + 2 y la parábola $y = x^2$, ver figura 4.2.50. La densidad de la lámina en el punto P(x,y) es proporcional al cuadrado de la distancia de **"P"** al eje de las y; esto es ρ(x,y) = kx^2 , siendo k una constante positiva. Encuentre la masa y el centroide de esta lámina.

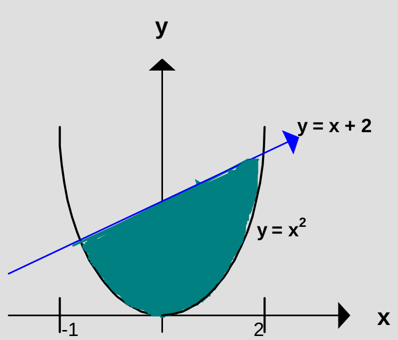


Fig.4.2.50

Solución

La recta y la parábola se cortan en los puntos (-1, 2) (2 , 4) entonces

Cálculo de la masa

$$m=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} kx^2 dydx = k\int_{-1}^{2}\left[x^2 y\right]_{x^2}^{x+2} dx$$
$$=k\int_{-1}^{2}\left(x^3+2x^2-x^4\right)dx = \frac{63k}{20}$$

Calculando el centroide

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{1}{m}\iint_R x\rho(x,y)dA$$

$$\bar{x}=\frac{20}{63k}\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} kx^3 dydx = \frac{20}{63}\int_{-1}^{2}\left[x^3 y\right]_{x^2}^{x+2} dx = \frac{20}{63}\int_{-1}^{2}\left(x^4+2x^3-x^5\right)dx = \frac{20}{63}*\frac{18}{5}=\frac{8}{7}$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{1}{m}\iint_R y\rho(x,y)dA$$
$$\bar{y}=\frac{20}{63k}\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} kx^2 ydydx = \frac{20}{63}\int_{-1}^{2}\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{x^2}^{x+2} dx = \frac{10}{63}\int_{-1}^{2}\left(x^4+4x^3+4x^2-x^6\right)dx$$
$$=\frac{20}{63}*\frac{531}{35}=\frac{118}{49}$$

Por lo tanto la lámina del ejemplo tiene una masa de $63k/20$ y su centroide es localizado en el punto (8/7, 118/49).

Momento de inercia

Los momentos de inercia son útiles en problemas en los que un objeto gira alrededor de un eje fijo, como lo hace una rueda o un disco alrededor de su eje. Un concepto de física muy importante aplicado en Matemática es el momento de inercia, podemos definirlo de la siguiente forma.

Considerar un sistema finito de partículas en un plano de masas m_1 , m_2, m_3, ...,m_n, girando estas masas en movimiento circular uniforme a la rapidez angular ω(radianes por unidad de tiempo) alrededor de un eje fijo dado. Sea **r** el radio de su trayectoria circular . Entonces, su velocidad lineal será $v = r\omega$ consecuentemente, la energía cinética total de este sistema de partículas será :

$KE=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2 \rightarrow$ Ec1, sustituyendo v en esta ecuación. A sí que $KE=\frac{1}{2}\left(mr^2\right)\omega^2$

La expresión, r^2m se llama momento de inercia de la partícula alrededor del eje dado, se designa por la letra I . Por lo tanto para una partícula en rotación, se define como :

$$KE=\frac{1}{2}Iw^2 \rightarrow \text{Ec2}$$

Debido a que la energía cinética lineal tiene como fórmula $\mathbf{KE} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} m v^{\mathbf{2}}$, entonces la fórmula 2 sugiere que el momento de inercia es la analogía rotacional de la masa.

En conclusión las ecuaciones 1 y 2 nos ayudan a comprender que el momento de inercia de una partícula en movimiento circular juega un papel similar al de la masa de un cuerpo en movimiento rectilíneo.

Consideremos ahora una lámina de densidad $\rho(x,y)$ que cubre una región R del plano xy, ver figura 4.2.46. Si se divide a R como en la figura 4.2.47, se aproximan los momentos de inercia de cada pieza R_i, se suma y se toma el límite, llegamos a las siguientes fórmulas. A los momentos de inercia (también se les llama segundo momentos) de la lámina con respecto a los ejes x,y y z y están dados por:

$$I_x = \iint_R y^2 dM = \iint_R y^2 \rho dA \; ; \quad I_y = \iint_R x^2 dM = \iint_R x^2 \rho dA \; ; \quad I_z = \iint_R \left(x^2 + y^2\right) r dA$$

I_x : Es el momento de inercia de la lámina respecto al eje de las x.
I_y : Es el momento de inercia de la lámina respecto al eje de las y.
$I_z = I_0$: Es llamada, momento de inercia polar respecto al origen.

Considere el caso de reemplazar un sistema general de masas de masa total m mediante un solo punto de masa m con el mismo momento de inercia I con respecto a la recta L , ver Figura 4.2.51. Qué tan lejos de L estará este punto?. La respuesta es $\bar{r}$, donde $m\bar{r}^2 = I$.

El número **r** es llamado ***Radio de Giro*** del sistema y se define como $\bar{r} = \sqrt{\frac{I}{m}}$

Los radios de giro con respecto a los ejes de las x y las y son: $\bar{x} = \sqrt{\frac{Ix}{m}}$; $\bar{y} = \sqrt{\frac{Iy}{m}}$.

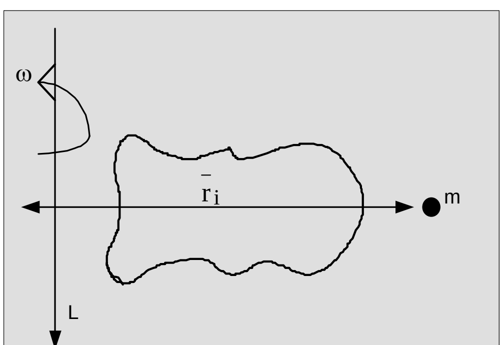


Fig. 4.2.51

Ejemplo#2

Calcule I_x para una lámina de densidad constante

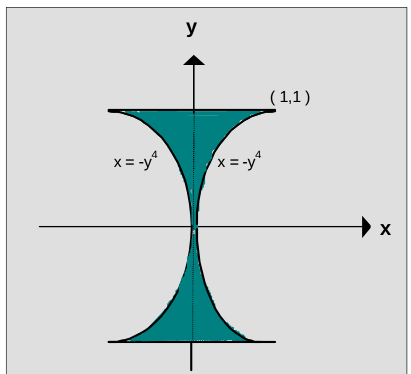


Fig 4.2.52

$\rho = 1$ que ocupa la región limitada por las curvas
$x = \pm y^4$, $-1 \le y \le 1$, ver figura 4.2.52.

Solución

$$I_x = \iint_R y^2 dM = \iint_R y^2 \rho dA = \int_{-1}^{1}\int_{-y^4}^{y^4} y^2 dxdy = \int_{-1}^{1}\Big[xy^2 \Big]_{-y^4}^{y^4} dy = \int_{-1}^{1} 2y^6 dy = \frac{4}{7}$$

Ejemplo#3

Encuentre el momento de inercia polar de una lámina circular de radio a y densidad constante ρ con centro en el origen.

Solución

$$I_0 = \iint_{x^2+y^2\le a^2} r^2 \rho A = \int_0^{2\pi}\int_0^a \rho r^3 drd\theta = \frac{\rho\pi a^4}{2} = \frac{1}{2} ma^2,$$ donde la masa de la lámina circular (disco) es $\mathbf{m = \rho\pi a^2}$.

♦ 4.3Integrales Triples

4.3.1 - Integrales triples en coordenadas cartesianas

Los pasos que conducen a la definición de la integral definida tridimensional o integral triple $\iiint_D F(x,y,z)dV$ son totalmente semejantes a los de la integral doble.

Considérese una función f de tres variables definida en una región B en forma de caja con caras paralelas a los planos coordenados. Hágase una partición de P en B pasando por ella planos paralelos a los ejes coordenados y cortándola después en pequeñas subcajas B_1 ,B_2 ,...B_n ; una B_k representativa se muestra en la figura 4.3.1.

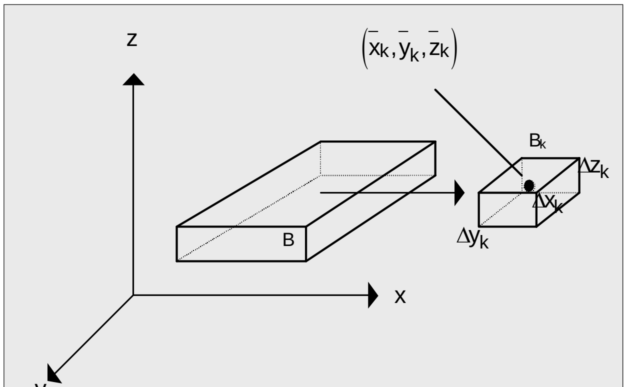


Fig.4.3.1

Escógase en B_k un punto muestra $(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)$ y considérese la suma riemanniana donde $\Delta V_k = \Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k$ es el volumen de B_k. La norma |p| de la partición será la longitud de la máxima diagonal en todas las subcajas.

Definición Integrales Triples:

$$\iiint_B F(x,y,z)dv = \lim_{|p|->0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k, \bar{y}_k, \bar{z}_k)\Delta V_k$$

Ejemplo#1

Evalúe $\iiint_B x^2yz\ dV$, donde B es la caja B={(x,y,z): $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 2$}

Solución

$$\iiint_B x^2yz\,dV = \int_0^2\int_0^1\int_1^2 x^2yz\,dxdydz = \int_0^2\int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}yz\right]_1^2 dydz$$

$$= \int_0^2\int_0^1 \left[\frac{1}{3}2^3yz - \frac{1}{3}1^3yz\right] = \int_0^2\int_0^1 \left[\frac{8}{3}yz - \frac{1}{3}yz\right]dydz = \int_0^2\int_0^1 \frac{7}{3}yz\,dydz$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{7}{3}\frac{y^2}{2}\right]_0^1 zdz = \int_0^2 \frac{7}{3}\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)zdz = \int_0^2 \frac{7}{6}zdz = \left[\frac{7}{6}\frac{z^2}{2}\right]_0^2 = \frac{7}{12}\left[2^2 - 0^2\right] = \frac{7}{3}$$

Regiones Generales

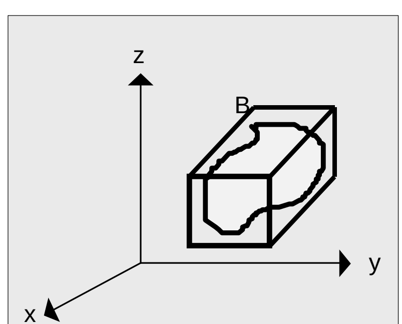


Fig 4.3.2

Considérese un conjunto S cerrado y acotado en el espacio de tres dimensiones y enciérrese en una caja B, como se muestra en la figura 4.3.2:

Sea f(x,y,z) una función definida en S y darle a f el valor cero en el exterior de S.

Entonces $\boxed{\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \iiint_B f(x,y,z)\,dV}$

Ejemplo#2

Evaluar la integral iterada $\int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x}\int_{y}^{x+2} 4dzdydx$

Solución

$$\int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x} 4z\Big|_{y}^{x+2} dydx = \int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x} 4\left[(x+2) - y\right]dydx = \int_{-2}^{5}\int_{0}^{3x}(4x+8-4y)dydx$$

$$= \int_{-2}^{5}(4xy)(3x) + 8(3x) - 2(3x)^{2} = \int_{-2}^{5} 12x^{2} + 24x - 18x^{2} = \int_{-2}^{5} -6x^{2} + 24xdx$$

$$= \int_{-2}^{5}\frac{-6x^{3}}{3} + \frac{24x^{2}}{2} = \left[-2x^{3} + 12x^{2}\right]_{-2}^{5}$$

$$= \left[-2(5)^{3} + 12(5)^{2}\right] - \left[(-2)(-2)^{3} + 12(-2)^{2}\right] = \left[(-2)(125) + (12)(25)\right] - \left[(-2)(-8) + (12)(4)\right]$$

= [-250 + 300] - [16 + 48] = 50 – 64 = -14

Sea S un conjunto simple de z (las rectas verticales interceptan a S en segmentos de rectas simples) y sea S_{xy} su proyección sobre el plano xy como se muestra en la figura 4.3.3.

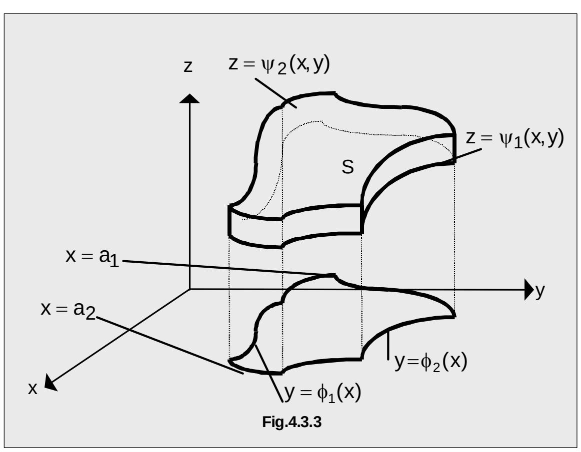


Fig.4.3.3

Teorema de Evaluación:

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \iint_{S_{xy}} \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

si además, S_{xy} es un conjunto simple de y podemos reescribir la integral triple exterior como una integral iterada

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \int_{a_1}^{a_2} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

pueden ser posibles otros ordenamientos de integraciones según sea la forma de S. Pero en cada caso debemos esperar que los límites de la integración interior de dos variables y que los de la integral exterior son constantes.

Ejemplo#3

Evalúe la integral triple f(x,y,z) = 2xyz sobre la región sólida S limitada por el cilindro parabólico $z = 2 - \frac{1}{2}x^2$ y los planos z = 0, y = x, y = 0.

Solución

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} \int_0^x 2xyzdz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} \left(\frac{2}{2}xy^2 z\right)\Big|_0^x dxdz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2z}} x^3 zdxdz = \int_0^2 \left[\frac{x^4 z}{4}\right]_0^{\sqrt{4-2z}} dz$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 (4-2z)^2 zdz = \frac{1}{4}\int_0^2 (16 - 16z + 4z^2)zdz = \frac{1}{4}\int_0^2 (16z - 16z^2 + 4z^3)dz$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{16}{2}z^2 - \frac{16}{3}z^3 + \frac{4}{4}z^4\right]_0^2 = \frac{1}{4}\left(32 - \frac{16}{3} * 8 + 16\right)$$

$$\frac{1}{4}(32 - \frac{128}{3} + 16) = \frac{1}{4}(48 - \frac{128}{3}) = (\frac{1}{4})(\frac{16}{3}) = \frac{4}{3}$$

4.3.2 Coordenadas Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas son generalizaciones de las coordenadas polares en el espacio tridimensional. Dependiendo de la geometría de una región en el espacio tridimensional, la evaluación de una integral triple en esa región puede ser más fácil utilizando un nuevo sistema de coordenadas.

El sistema de coordenadas cilíndricas combina la descripción rectangular de la componente z de un punto en el espacio. Como se ve en la figura 4.3.4, las coordenadas cilíndricas de un punto P se denotan por la tríada ordenada (r, θ ,z) donde r y θ son las coordenadas polares de la proyección de P en un plano polar yz es la distancia dirigida desde este plano polar a P . El nombre Coordenadas “ Cilíndricas” proviene del hecho de que un punto P en el espacio es determinado por la intersección de los planos z = constante, θ = constante, r = constante, ver figura 4.3.5.

Las fórmulas del siguiente teorema dan la relación entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas cilíndricas de P, ver figura 4.3.4

Relación entre las coordenadas rectangulares y coordenadas cilíndricas

Teorema:

Las coordenadas rectangulares(x,y,z) y las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de un punto P Están relacionadas a como sigue

$$\mathbf{x = r\cos\theta} \quad ; \quad \mathbf{y = r\,sen\theta} \quad ; \quad \mathbf{z = z} \qquad \mathbf{(1)}$$

$$\mathbf{\tan\theta = y / x \;\; si\; x \neq 0} \quad ; \quad \mathbf{r^2 = x^2 + y^2} \quad ; \quad \mathbf{z = z} \qquad \mathbf{(2)}$$

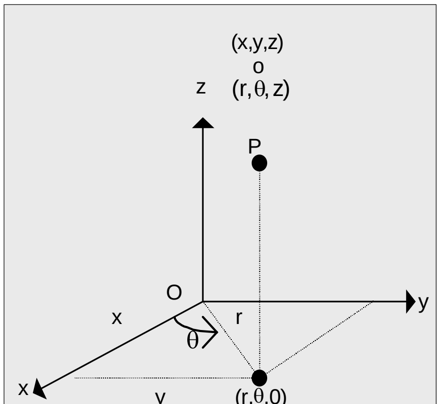


Fig.4.3.4

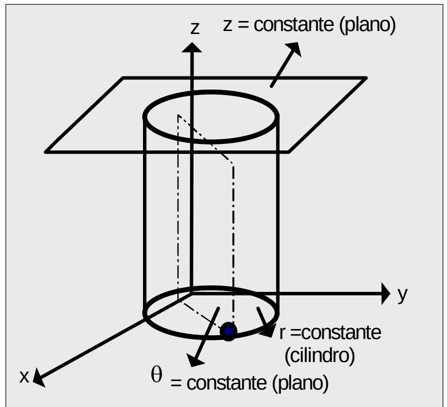


Fig.4.3.5

Ejemplo#1

Convierta (8, $\pi/3$,7) de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulare,.

Solución

Utilizando las fórmulas de relación entre coordenadas tenemos x = 8 Cos $\pi/3$ = $(8)(\frac{1}{2}) = 4$

y = 8 Sen $\pi/3$ = $8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\sqrt{3}$; z = 7 ; (8, $\pi/3$,7) equivale a (4,4$\sqrt{3}$,7) en rectangulares.

4.3.3 Coordenadas esféricas

En un sistema de coordenadas esféricas hay un plano polar con el origen del eje z en el polo del plano polar. Las coordenadas esféricas de un punto P distintas del origen se definen mediante la tríada ordenada (ρ, ϕ, θ), en donde ρ es la distancia del origen a P, ϕ es el ángulo polar del eje z positivo y el vector $\overrightarrow{OP}$ sobre el plano xy, ver figura 4.3.6, y θ es el ángulo polar medido del eje x positivo al vector proyección $\overrightarrow{OQ}$ de $\overrightarrow{OP}$. La figura 4.3.7 muestra que un punto P en el espacio se determina por la intersección de un cono ϕ = constante, un plano θ = constante, y una esfera ρ = constante; de la cual se origina el nombre **"coordenadas *esféricas*".**

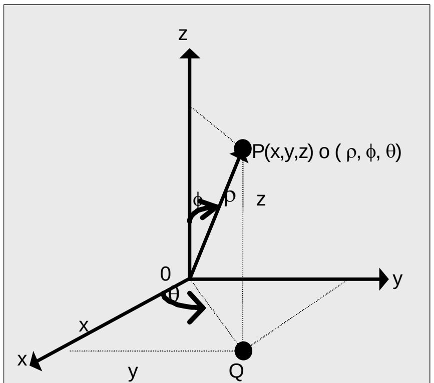


Fig.4.3.6

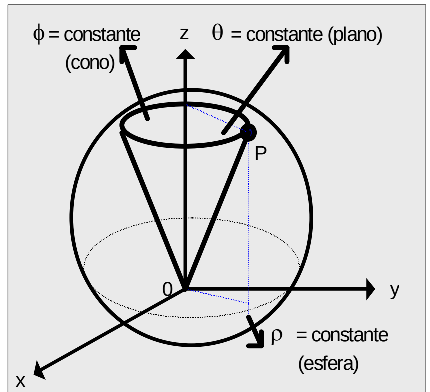


Fig.4.3.7

Relación entre coordenadas rectangulares y coordenadas esféricas

La relación entre coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) y las coordenadas rectangulares (x,y,z) de un punto P se pueden encontrar de la siguiente manera, ver figura 4.3.6.

$x = |\overrightarrow{OQ}| \operatorname{Cos}\theta$, $y = |\overrightarrow{OQ}| \operatorname{Sen}\theta$, $z = |\overrightarrow{OP}| \operatorname{Cos}\phi$

Puesto que $|\overrightarrow{OQ}| = \rho \operatorname{Sen}\phi$ y $|\overrightarrow{OP}| = \rho$. Las ecuaciones precedentes se convierten en :

Teorema:

Las coordenadas rectangulares (x,y,z) y las coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, θ) de un punto P están relacionadas a como sigue

$$\mathbf{x = \rho Sen\phi Cos\theta \quad , \quad y = \rho Sen\phi Cos\theta \quad , \quad z = \rho Cos\phi \quad , \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2} \quad .\mathbf{(1)}$$

Se acostumbra tomar $= \rho \geq 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad ; \quad \cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Ejemplo#1

Convierta $(6, \pi/4, \pi/3)$ de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares y cilíndricas.

Solución

Identificando , $\rho = 6$; $\phi = \pi/4$ y $\theta = \pi/3$

$x = 6 \operatorname{Sen}\pi/4 \operatorname{Cos}\pi/3 = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $y = 6 \operatorname{Sen}\pi/4 \operatorname{Sen}\pi/3 = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{6}}{2}$

$z = 6 \operatorname{Cos}\pi/4 = 6\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$; $r^2 = \left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 18$ y entonces $r = 3\sqrt{2}$.

De esta manera, las coordenadas cilíndricas del punto son (r, θ ,z), o sea ($3\sqrt{2}$, $\pi/3$, $3\sqrt{2}$).

4.3.4 Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se pueden usar para evaluar integrales triples. Supóngase que f(x,y,z) es una función continua definida sobre una región simple T, que debido a que es z-simple, se puede escribir como $g_1(x,y) \le z \le g_2(x,y)$ para (x,y) de R.

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iint_R \left(\int_{g1(x,y)}^{g2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dA \quad (1)$$

Si la región R se describe en coordenadas polares en una función más natural que en coordenadas rectangulares, es probable que la integración sobre dicha región plana sea más simple si se desarrolla en coordenadas polares.

Se expresa primero la integral parcial interior (1) en términos de r y θ , escribiendo

$$\int_{g_1(x,y)}^{g2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int_{G_1(r,\theta)}^{G_2(r,\theta)} F(r,\theta,z)dz \quad (2) \quad \text{donde} \begin{cases} F(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z) \\ G_i(r,\theta) = g_i(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) \end{cases} \text{para } i = 1,2.$$

La sustitución de (2) en (1) con dA = rdr $d\theta$ da $\iiint_T f(x,y,z)dV = \iint_S \left(\int_{G_1(r,\theta)}^{G_2(r,\theta)} F(r,\theta,z)dz \right) rdrd\theta$ (3)

donde F, G_1 y G_2 son las funciones dadas en la expresión (3) y S representa los límites apropiados de r y θ necesarios para describir la región plana R en coordenadas polares.

Los límites z no son más que las coordenadas de z (en términos de r y θ) de un segmento representativo que una las superficies frontera superior e inferior de T, como lo indica la figura 4.3.8.

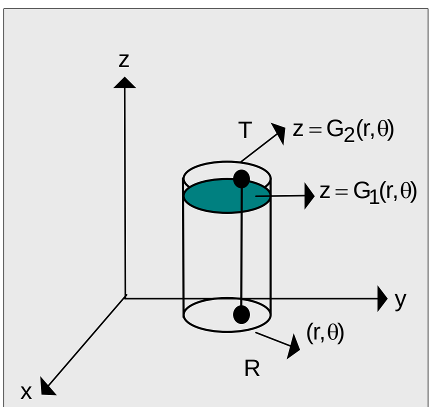


Fig.4.3.8

Los límites sobre z de una integral triple en coordenadas cilíndricas se determinan por medio de las superficies inferior y superior. Por tanto la fórmula general para la integración triple en coordenadas cilíndricas es

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \iiint_R f(r\cos\theta . r sen\theta, z) r dz dr d\theta \quad (4)$$

çon límites para **z, r y θ** adecuados para describir la región en el espacio T en coordenadas cilíndricas. Antes de la integración, se sustituyen las variables x e y por **rcosθ** y **rsenθ,** respectivamente, mientras que **z** queda sin cambio **dV = r dz dr dθ** puede ser formalmente considerado como un producto de **dz** por el elemento del área en coordenadas polares **dA = rdrdθ.** Es consecuencia de la fórmula $\Delta V = \bar{r}\Delta z\, \Delta r\, \Delta\theta$ para el volumen del bloque cilíndrico que se muestra en la figura 4.3.9.

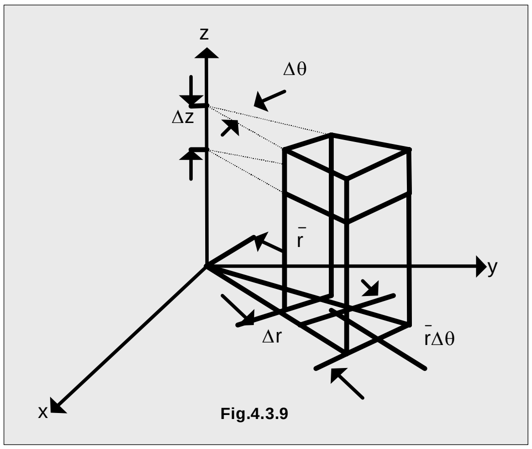


Fig.4.3.9

La integración en coordenadas cilíndricas es útil en particular para cálculos relacionados con los sólidos de revolución .El sólido debe ser calculado cuando su eje de revolución es el eje de las z.

Ejemplo#1

Encuentre el centroide de la parte del primer cuadrante de la pelota sólida limitada por la esfera $r^2 + z^2 = a^2$.

Solución

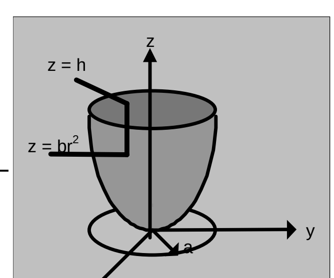
El volumen del primer octante de la pelota sólida es $v = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3 = \frac{\pi a^3}{6}$ Dado que $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ por simetría, calculamos sólo $\bar{z} = \frac{1}{v}\iiint z dV$

$$\frac{6}{\pi a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} zrdzdrd\theta = \frac{6}{\pi a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\frac{r}{2}\left(a^2 - r^2\right)drd\theta = \frac{3}{\pi a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{2}a^2r^2 \ \frac{1}{4}r^4\right]_0^a d\theta$$

$$= \left(\frac{3}{\pi a^3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{a^4}{4}\right) = \frac{3}{8}a$$; El centroide se localiza en $\left(\frac{3}{8}a, \frac{3}{8}a, \frac{3}{8}a\right)$

Ejemplo#2

Encuentre el volumen y el centroide del sólido T limitado por el paraboloide E = b $(x^2 + y^2)$, siendo b > 0, y el plano z = h, para h > 0 .



Solución

El radio de la tapa circular se obtiene al igualar $z = b(x^2 + y^2) = br^2$ con $z = h$. Esto da: $\sqrt{\frac{h}{b}}$ como radio del circulo bajo el cual yace el sólido.
Por lo tanto, la fórmula (4), con $f(x,y,z) = 1$ da el volumen

$$V = \iiint_T dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{br^2}^{h} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(hr - br^3\right)dr\,d\theta$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}ha^2 - \frac{1}{4}ba^4\right) = \frac{\pi h^2}{2b} = \frac{1}{2}\pi a^2 h$$ por que $a^2 = h / b$. Por simetría el centroide

de T se encuentra sobre el eje de las Z, por lo que todo lo que resta es el cálculo de $\bar{z}$.

$$\bar{z} = \frac{1}{v}\iiint_T z\,dV = \frac{2}{\pi a^2 h}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_{br^2}^{h} rz\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi a^2 h}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(\frac{1}{4}h^2a^2 - \frac{1}{12}b^2a^2\right) = \frac{2}{3}h$$ usando otra vez $a^2 = h/b$ las dimensiones de la respuestas son correctas z debe de darse en unidades de longitud.

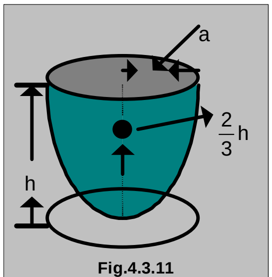


Fig.4.3.11

El volumen de un paraboloide circular recto es igual a la mitad del cilindro circunscrito y su centroide se encuentra sobre el eje de simetría a las dos terceras partes de la distancia entre el vértice (0,0,0) y la base (tapa).

4.3.5 Integrales Triples en coordenadas esféricas

Cuando las superficies frontera de la región T de integración son esferas, conos u otras superficies cuya descripción en coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ), como se muestra en la figura 4.3.5. Recuérdese que la relación entre dichas coordenadas esféricas y las rectangulares (x,y,z),según se vió es:

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \ , \ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \ z = \rho \cos\phi .$$

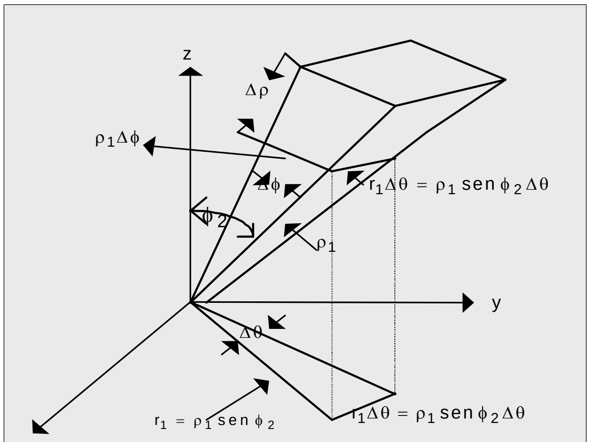


Fig.4.3.12

Por ejemplo supóngase que T es el bloque esférico determinado por las desigualdades:

$\rho_1 \le \rho \le \rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho$, $\phi_1 \le \phi \le \phi_2 = \phi_1 + \Delta\phi$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2 = \theta_1 + \Delta\theta$ como lo indican las dimensiones marcadas en la figura este bloque tiene un valor aproximado ($\Delta\rho, \Delta\phi, \Delta\theta$ son pequeños) de un bloque rectangular de dimensiones $\Delta\rho, \rho_1\Delta\phi$ y $\rho_1 \operatorname{sen}\phi_2\Delta\theta$. En consecuencia, el valor aproximado de su volumen es $\rho_1^2 \operatorname{sen}\phi_2 \,\Delta\rho\, \Delta\phi\, \Delta\theta$. Se puede demostrar que el volumen exacto del bloque esférico descrito en la ecuación es: $\Delta V = \hat{\rho}^2 \operatorname{sen}\hat{\phi}\ \Delta\rho\ \Delta\phi\ \Delta\theta$.
para números adecuados $\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ tales que $\rho_1 \langle \hat{\rho} \langle \rho_2$ y $\phi_1 \langle \hat{\phi} \langle \phi_2$.

Supóngase ahora que se hace una partición de cada uno de los intervalos $[\rho_1, \rho_2]$, $[\phi_1,\phi_2]$, $[\theta_1,\theta_2]$ en n subintervalos iguales de longitudes:

$$\Delta_{\rho i} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{n} \ , \ \Delta_{\phi i} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{n} \ \text{y} \ \Delta_{\theta i} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{n}$$

respectivamente. Esto produce una partición esférica P del bloque esférico T en K = n^3 bloques esféricos menores T_1 , T_2 , T_3 ... T_k. Por la fórmula (8) existe un punto ($\hat{\rho}_i, \hat{\phi}_i, \hat{\theta}_i$) del bloque esférico T_i tal que su volumen es $\Delta V_i = \rho_i^2 \operatorname{sen}\hat{\theta}_i\, \Delta\rho_i\, \Delta\phi_i\, \Delta\theta_i$ la norma

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \lim_{|P|\to 0} \sum_{t=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*, z_i^*)\Delta V_i \quad = \quad \lim_{|P|\to 0} \sum_{t=1}^{k} F(\hat{\rho}_i, \hat{\phi}_i, \hat{\theta}_i)\hat{\rho}_i^2 \operatorname{sen}\hat{\phi}_i, \Delta\rho_i, \Delta\phi_i, \Delta\theta_i \quad (9)$$

donde $F(\rho,\phi,\theta) = f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)$ (10) pero la suma del límite (9) no es más que la suma Riemanniana de la integral triple $\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} F(\rho,\phi,\theta)\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi\, d\theta$ de donde

$\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} F(\rho,\phi,\theta)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$ (11) por lo tanto, la integral $\iiint\limits_T f(x,y,z)dV$ se transforma a coordenadas esféricas al reemplazar las variables de coordenadas rectangulares x,y,z por las expresiones dadas en la fórmula (6) en términos de las variables de coordenadas esféricas ρ , ϕ , θ y escribir formalmente $dV\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$ como elemento del volumen en coordenadas esféricas.

Generalmente, se puede transformar la integral triple $\iiint\limits_T f(x,y,z)dV$ en coordenadas esféricas siempre y cuando la región T sea centralmente simple; es decir, siempre que la descripción de sus coordenadas esféricas sea de la forma $G_1(\phi,\theta) \le \rho \le G_2(\phi,\theta)$, $\phi_1 \le \phi \le \phi_2 \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2$

Si es así entonces $\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{G_1(\phi,\theta)}^{G_2(\phi,\theta)} F(\rho,\phi,\theta)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$, (ver la figura 4.3.13). Los límites de ρ, (en términos de ϕ,θ)de los extremos de un segmento radial representativo que una las partes “interior” y “exterior” de la frontera T.

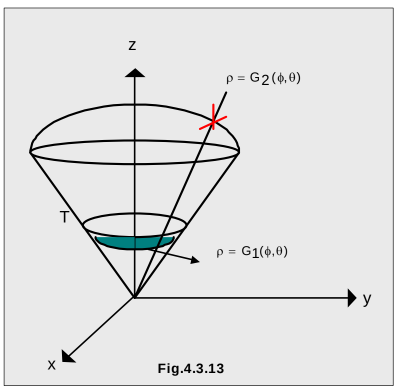


Fig.4.3.13

En consecuencia, la fórmula general para la integración triple en coordenadas esféricas es: $\iiint\limits_T f(x,y,z)dV = \iiint f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$ con límites en ρ,ϕ,θ apropiados para describir la región Ten coordenadas esféricas.

Ejemplo#1

Una pelota sólida T con densidad constante δ está limitada por la esfera $\rho = a$. Use coordenadas esféricas para calcular su volumen y su momento de inercia I_z. Con respecto al eje de las Z.

Solución

Las puntas de la pelota de describen mediante las desigualdades $0 \le \rho \le a \quad 0 \le \theta \le \pi \quad o\le \theta \le 2\pi$ .Tomemos f = F = 1

$$\iiint_T f(x,y,z)dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} d\phi\, d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}[-\cos\phi]_0^{\pi}\, d\theta = \frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3$$

La distancia desde el punto representativo (ρ,ϕ,θ) al eje de las Z es $r = \operatorname{sen}\phi$ así que el momento de inercia de la esfera con respecto a ese eje es:

$$\iiint_T r^2\delta dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\delta\rho^4 \operatorname{sen}^3\phi d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{\delta a^5}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\delta\rho^4 \operatorname{sen}^3\phi d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{2\pi\delta a^5}{5}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi d\phi$$

$\frac{2\pi\delta a^5}{5} = \frac{2}{5}Ma^2$ donde $M = \frac{4}{3}\pi a^3\delta$ es la masa de la pelota.

Ejemplo#2

Encuentre el volumen y el centroide de cono de helado (barquillo) limitado por el cono $\phi = \frac{\pi}{6}$ y la esfera $\rho = 2a\cos\phi$ de radio a y tangente al plano xy en el origen.

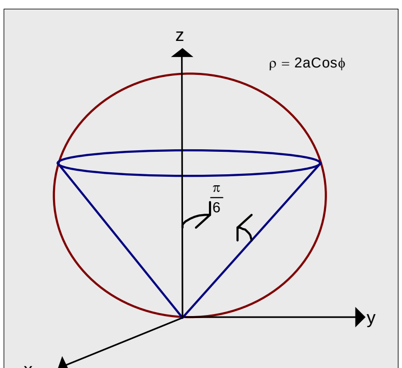


Fig.4.3.14

Solución

El cono de helado se describe mediante las desigualdades $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \frac{\pi}{6}$, $0 \le \rho \le 2a\cos\phi$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2a\cos\theta}\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{16}{3}\pi a^3\int_0^{2\pi}\frac{-1}{4}\left[\cos^4\phi\right]_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = \frac{7\pi a^3}{12}$$

Ejemplo#3

Encontrar una ecuación en coordenadas cartesianas de las siguientes superficies cuyas ecuaciones están dadas en coordenadas cilíndricas e identificar la superficie.

a) $r = 6\operatorname{sen}\theta$

b) $r(3\cos\theta + 2\mathrm{sen}\theta) + 6z = 0$

Solución a

Multiplicando ambos lados de la ecuación por **r** $r^2 = \underline{r\mathrm{sen}\theta}$ como $r^2 = x^2 + y^2$ y $y = r\mathrm{sen}\theta$ tenemos $x^2 + y^2 = 6y$ esta ecuación se puede escribir en la forma $x^2 + (y-3)^2 = 9$ lo cual muestra que su grafica es un cilindro circular recto cuya sección transversal en el plano xy es el circulo con su centro en (0,3) y radio 3 .
Solución b

Reemplazando **rcos**θ por **x** y **rsen**θ por **y** obtenemos $3x + 2y + 6z = 0$. Por lo tanto, la gráfica en el plano a través del origen y tiene $< 3,2,6 >$ como vector normal.

4.3.6 Areas de superficie

Una superficie paramétrica S es la imagen de una función o transformación r definida en una región R del plano **uv** y con valores en el espacio xyz. La imagen bajo r de cada punto (uv) en R es el punto del espacio xyz cuyo vector de posición es: **r(u,v) = < x(uv), y(u,v), z(u,v) >**

Supondremos que las funciones componentes de r tienen derivadas parciales continuas con respecto a u y a v, y también que los vectores

$r_u = \frac{\partial r}{\partial u} = \langle x_u, y_u, z_u \rangle = \frac{\partial x}{\partial u} i + \frac{\partial y}{\partial u} j + \frac{\partial z}{\partial u} k$; $r_v = \frac{\partial r}{\partial v} = \langle x_v, y_v, z_v \rangle = \frac{\partial x}{\partial v} i + \frac{\partial y}{\partial v} j + \frac{\partial z}{\partial v} k$ son diferentes de cero y no paralelos en cada punto interior de R.

Las variables u y v se llamarán parámetros de superficie S (análogos al parámetro simple t de una curva paramétrica). La gráfica $z = f(x,y)$ de una función puede ser considerada como una superficie paramétrica con parámetros x y y . En este caso, la transformación r del plano xy al espacio xyz tiene las funciones componentes $x = x$, $y = y$, $z = f(x,y)$

En forma análoga, una superficie dada en coordenadas cilíndricas como gráfica de $z = g(r, \theta)$ puede ser considerada como una superficie paramétrica con parámetros r y θ; la transformación r del plano $r\,\theta$ al espacio xyz está dada por

$$x = r\cos\theta,\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,\ z = g(r,\theta)$$

Una superficie dada en coordenadas esféricas por $\rho = h(\phi,\theta)$ se puede considerar como una superficie paramétrica con parámetros ϕ y θ y la correspondiente transformación del plano $\phi\,\theta$ al espacio xyz estará dado por

$$x = h(\phi,\theta)\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta,\quad y = h(\phi,\theta)\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta,\quad z = h(\phi,\theta)\cos\phi$$

El concepto de superficie paramétrica nos permite tratar todos los casos con las mismas técnicas.

Definición del área de la superficie paramétrica general:

Una partición en el interior de la región R (dominio de r en el plano uv) en rectángulos R_1 , R_2 , R_3 , ... R_n , cada uno con dimensiones Δ_u y Δ_v. Sea (u_i , v_i) la esquina inferior izquierda de R_i . Ver figura 4.3.15

La imagen S_i de R_i bajo r, por lo general no será un rectángulo en el espacio xyz; parecerá más bien una figura curvilíneas sobre la superficie imagen S, con $r(u_i\ ,\ v_i\ )$ como un "vértice". Ver figura 4.3.16

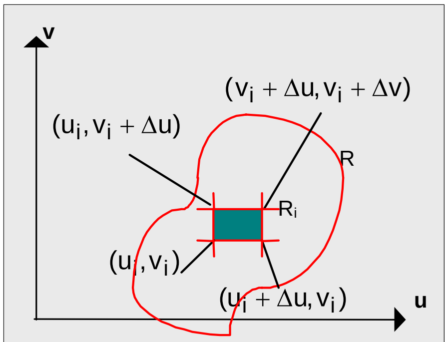


Fig 4.3.15

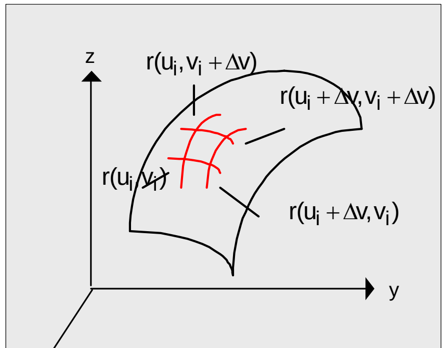


Fig.4.3.16

Sea ΔS_i de esta superficie curvilínea S_i . Las curvas paramétricas $r(u,\ v_i\ )$ y $r(u_i\ ,\ v)$ cuyos parámetros respectivos son u y v, sobre la superficie S, se cortan en el punto $r(u_i\ ,\ v_i\ )$. En este punto de intersección, las dos curvas tienen los vectores $r_u\ (u_i\ ,\ v_i\ )$ y $r_v\ (u_i\ ,\ v_i\ )$, ver figura4.3.17. Por lo tanto, el producto cruz

$N(u_i\ ,\ v_i\ ) = r_u\ (u_i\ ,\ v_i\ )\ \ x\ r_v\ (u_i\ ,\ v_i\ )$ es un vector normal a S en el punto $r(u_i\ ,\ v_i\ )$.

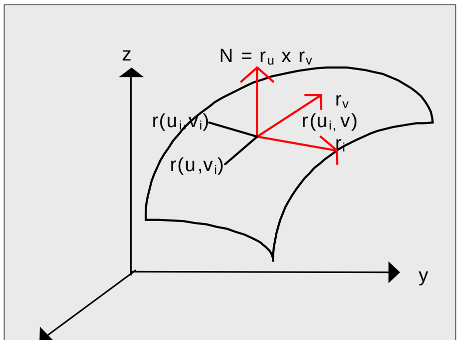


Fig.4.3.17

Supóngase ahora que Δu y Δv son ambos pequeños. Entonces, el área Δs, de la figura curvilínea S_i , será aproximadamente igual al área ΔP_i del paralelogramo cuyos lados adyacentes son $r_u\ (u_i\ ,\ v_i\ )\ \Delta u$ y $r_v\ (u_i\ ,\ v_i\ )\ \Delta v$.

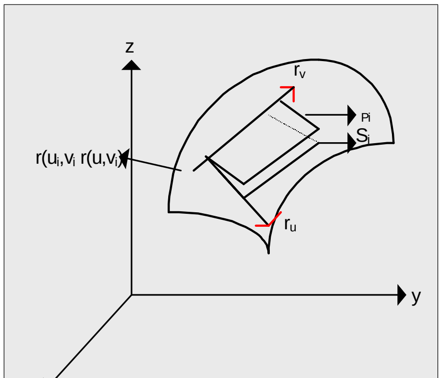


Fig.4.3.18

Pero el área de este paralelogramo es $\Delta P_i = |r_u(u_i, v_i)\Delta u \; x \; r_u(u_i, v_i)\Delta v| = |N(u_i, v_i)\Delta u \Delta v|$

Esto significa que el área aproximada de la superficie S está dada por

Area (s) $\approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta P_i$, así que Área (s) $\approx \sum_{i=1}^{n} |N(u_i, v_i)|\Delta u \Delta v$. Pero ésta última es una suma riemanniana para la integral doble $\iint_R |N(u,v)| dudv$. En consecuencia tenemos, motivo; para definir área de la superficie paramétrica S mediante.

$$A = \text{Area}(s) = \iint_R |N(u,v)| dudv = \iint_R \left| \frac{\partial r}{\partial u} x \frac{\partial r}{\partial v} \right| dudv \quad \text{Ec.(1)}$$

En el caso de la superficie z = f (x,y, para (x,y) de la región R del plano xy, las funciones componentes de r están definidas por las ecuaciones **x = x , y = y , z = f (x,y)** con parámetros x y y (en lugar de u y v). Entonces,

$$N = \frac{\partial r}{\partial u} x \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} i - \frac{\partial f}{\partial y} j + k$$

así que Ec (1) viene a ser $A = \text{Area}(s) = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy = \iint_R \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy$

Ejemplo#1

Encuentre el área de la elipse cortada en el plano z=2x+2y+1 por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución

Aquí, R es el círculo unitario en el plano xy con área $\iint\limits_R 1dxdy = \pi$ por lo que la fórmula da :

$$A = \iint\limits_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy \qquad = \iint\limits_R \sqrt{1+2^2+2^2}dxdy = \iint\limits_R 3dxdy = 3\pi$$

Considérese ahora una superficie en coordenadas cilíndricas z = g(r, θ) parametrizada por medio de las ecuaciones: x = rcosθ , y = rsenθ , z = g(r, θ) para (r, θ) en una región del plano r, θ. Entonces el vector normal es:

$$N = \frac{\partial r}{\partial r} x \frac{\partial r}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \frac{\partial z}{\partial r} \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\operatorname{sen}\theta - r\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta\right) - j\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\cos\theta + r\frac{\partial z}{\partial r}\operatorname{sen}\theta\right) + k$$

$$|N| = \sqrt{r^2+r^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} \quad ; \quad A = \iint\limits_R \sqrt{r^2+r^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2}drd\theta$$ para el área en coordenadas cilíndricas

Ejemplo#2

Encuentre el área de la superficie del paraboloide z = r^2, cortado por el cilindro r = 1.

Solución

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2+r^2+(2r)^2}drd\theta = 2\pi\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\,dr$$

$$2\pi\left[\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right)\left(1+4r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) \approx 5.3304$$

<u>4.3.7 Aplicaciones de las integrales triples en coordenadas Cartesaianas</u>

<u>Masa y centro de masa</u> ***(A***plicaciones clásicas de la integral triple).

1) Si F(x,y,z)=1, entonces $V = \iiint_D dV$ es el volumen del sólido D.

2) Si ρ (x,y,z) es densidad, entonces $m = \iiint_D \rho(x,y,z)dV$ es la masa del sólido D.

3) Las integrales $M_{xy} = \iiint\limits_D z\rho(x,y,z)dV$, $M_{xz} = \iiint\limits_D y\rho(x,y,z)dV$, $M_{yz} = \iiint\limits_D x\rho(x,y,z)dV$

son los momentos de primer orden, o momentos simplemente, del sólido con respecto a los planos coordenados indicados por los subíndices. Las coordenadas del centro de masa de D están dados por:

$$\bar{x} = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

Si ρ (x,y,z) = constante, el centro de masa se llama centroide del sólido.

4) Las integrales

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dV \quad ; \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dV \quad ; \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dV$$

Son los momentos de segundo orden, o momentos de inercia de D con respecto a los ejes de coordenadas indicados por los subíndices.

5) Si I es un momento de inercia del sólido con respecto a un eje dado, entonces el radio de giro es: $R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}$

Ejemplo#1

Encuentre la masa y centro de masa del sólido S del ejemplo 2 suponiendo que su densidad es proporcional a la distancia a su base del plano xy.

Solución

Por hipótesis, $\rho(x,y,z) = kz$ donde k es una constante. Por lo tanto

$$m = \iiint_S kzdV = \int_0^2\int_0^x\int_0^{2-\frac{x^2}{2}} kzdzdydx = k\int_0^2\int_0^x \frac{1}{2}\left[2 - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 dydx$$

$$= k\int_0^2\int_0^x \frac{1}{2}\left[2 - x^2 + \frac{1}{8}x^4\right]dydx = k\int_0^2 (2x - x^3 + \frac{1}{8}x^5)dx = k\left[x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{48}\right]_0^2 = \frac{4}{3k}$$

$$M_{xy} = \iiint_S kz^2 dV$$

$$= \int_0^2\int_0^x\int_0^{2-x^2/2} kz^2dzdydx = \frac{k}{3}\int_0^2\int_0^x \left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^3 dydx = \frac{k}{3}\int_0^2\int_0^x \left(8 - 6x^2 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^6\right)dydx =$$

$$\frac{k}{3}\int_0^2 \left(8x - 6x^3 + \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{8}x^7\right)dx = \frac{k}{3}\left[4x^2 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{4}x^6 - \frac{1}{64}x^8\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$M_{xz} = \iiint_S kyzdV$$

$$k\int_0^2\int_0^x\int_0^{2-x^2/2} kyzdzdydx = k\int_0^2\int_0^x \frac{1}{2}y\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dydx = k\int_0^2\int_0^x \frac{1}{4}x^2\left(2 - \frac{x^2}{2}\right)^2 dx$$

$$= k\int_0^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{16}x^6\right)dx = \frac{64}{105}k$$

$$M_{yz} = \iiint_S kxzdV \quad = \quad \int_0^2\int_0^x\int_0^{2-x^2/2} kxzdzdydx = \frac{128}{105}k$$

$$\bar{Z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{4k}{3}}{\frac{4k}{3}} = 1, \qquad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\frac{64k}{105}}{\frac{4k}{3}} = \frac{16}{35}, \qquad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\frac{128k}{105}}{\frac{4k}{3}} = \frac{32}{35}$$

Ejemplo#2

Obtener el volumen del sólido del primer octante limitado por las gráficas de $z = 1 - y^2$, $y = 2xy$, $x = 3$.

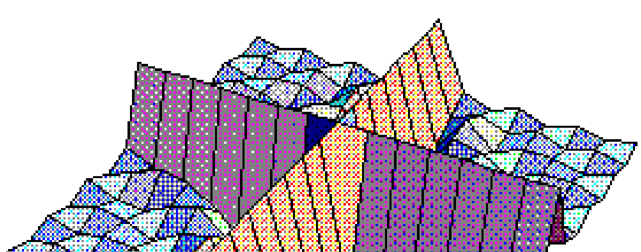
Solución

como se indica en la figura. La integral con respecto a 2 sería de 0 a $1-y^2$, con respecto a x es $\frac{y}{2}$ a 3, la última integración con respecto a y es de 0 a 1. De manera que:

$$\int_0^1\int_{\frac{y}{2}}^3\int_0^{1-y^2} dzdxdy \; = \; \int_0^1\int_{\frac{y}{2}}^3 (1-y^2)dxdy \; = \; \int_0^1\left[x - xy^2\right]_{\frac{y}{2}}^3 dy \; = \int_0^1 (3 - 3y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3)dy$$

$$\left[3y - y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4\right]_0^1 = \frac{15}{8}u^3 \; .$$

Cuarta Unidad



Integrales

Múltiples

Problemas y Ejercicios

Problemas y Ejercicios de las sección 4.2.1

♦ 4.2.1 Integrales dobles sobre rectángulos

1) Suponga que $R = \{(x,y): 0 \le x \le 2 \ , \ 0 \le y \le 2\}$,

$R_1 = \{(x,y): 0 \le x \le 2 \ , \ 0 \le y \le 1\}$,

$R_2 = \{(x,y): 0 \le x \le 2 \ , \ 1 \le y \le 2\}$.

Suponga también que $\iint_R f(x,y)dA = 3$, $\iint_{R1} g(x,y)dA = 2$

Use las propiedades de la integrales para evaluar cada una de los siguientes ejercicios, una vez que los haya resuelto implemente una función que resuelva ejercicios donde se apliquen las propiedades de las integrales y compruebe sus ejercicios.

a) $\iint_R (3f(x,y)-g(x,y))dA$; b) $\iint_{R_1} (2f(x,y)+5g(x,y))dA$; c) $\iint_{R_2} (2g(x,y)+5)dA$

2) En los siguientes problemas utilice el programa sobre las sumas riemannianas para comprobar los ejercicios de este tipo.

Siendo $R = \{(x,y): 0 \le x \le 6\ ,\ 0 \le y \le 4\}$ y P es la partición de " ***R*** " en seis cuadrados iguales mediante las rectas x = 2, x = 4 y y = 2. Calcule el valor aproximado de $\iint_R f(x,y)dA$ calculando la suma riemanniana correspondiente $\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}, \bar{y})\Delta A_k$, suponiendo que $(\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ son los centros de los seis cuadrados (ver ejemplo 1 para la solución de estos ejercicios).

a) $f(x,y) = 10 - y^2$; b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$

c) $f(x,y) = \frac{1}{6}(48 - 4x - 3y)$; d) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$

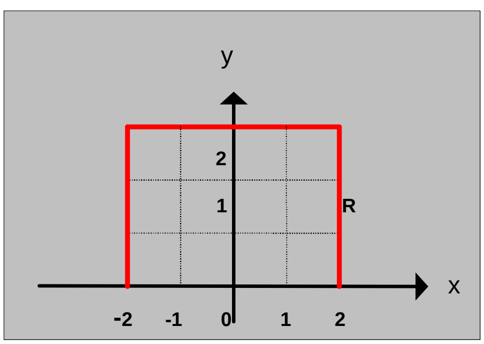
e) $f(x,y) = e^{xy}$

3) Estas integrales representan el volumen de cierto sólido. Dibújelo by calcule el volumen
a partir de los principios elementales.

a) calcule $\iint_R (6-y)dA$, donde $R = \{(x,y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$.

b) calcule $\iint_R (1+x)dA$, donde $R = \{(x,y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1\}$

2) Sea R el rectángulo mostrado en la figura 1, para la partición indicada en 12 cuadrados
iguales, calcule la mayor y la menor suma riemanniana para $\iint_R (x^2 + y^2)dA$, y con eso
obtenga los números C y c tales que $C \le \iint_R (x^2 + y^2)dA \le C$.



Problemas y Ejercicios de las sección 4.2.2
♦ 4.2.2 Integrales dobles iteradas

1) Evalúe las integrales dobles iteradas, compruebe sus resultados utilizando los comandos del software Mathematica.

a) $\int_0^2\int_0^4 (3x + 4y)\, dx\, dy$; b) $\int_0^3\int_0^2 (x^2 y)\, dx\, dy$

c) $\int_{-1}^{2}\int_{1}^{3}\left(2x-7y\right)dy\,dx$; d) $\int_{0}^{3}\int_{0}^{3}\left(xy+7x\right)dx\,dy$

e) $\int_{-1}^{2}\int_{-1}^{2}\left(2xy^2-3x^2y\right)dy\,dx$; f) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{sen}x*\cos y\right)dx\,dy$

g) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\left(xe^{y}\right)dy\,dx$; h) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\left(e^{x}*\operatorname{sen}y\right)dy\,dx$

i) $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(xy+\operatorname{sen}x\right)dx\,dy$

2) Verifique que los valores de $\iint_R f(x,y)dA$ dados por las integrales iteradas son iguales.
Además desarrolle un programa para comprobar la igualdad de estas integrales iteradas.

a) $f(x,y)=2xy-3y^2 \Rightarrow R=[-1,1]\times[-2,2]$

b) $f(x,y)=\sqrt{x+y} \Rightarrow R=[0,1]\times[0,2]$; c) $f(x,y)=12xy^2-8x^3 \Rightarrow R=[1,2]\times[-1,2]$

Problemas y Ejercicios de las sección 4.2.3
♦ 4.2.3 Integrales dobles sobre regiones no rectangulares

1) Evalúe la integral doble dada cambiándola por la integral iterada.

a) $\iint_R (xy)dA$ S es la región limitada por $y = x^2$ y $y = 1$.

b) $\iint_R (xy)dA$ S es el triángulo cuyos vértices son $(0,0),(0,4),(1,4)$.

2) Dibuje el sólido indicado . Encuentre luego su volumen mediante una integración iterada. El
tetraedro acotado por los planos coordenados y el plano, z = 6 - 2x - 3y

3) En los siguientes problemas invierta el orden de integración y evalúe la integral resultante,
dibuje cada región de integración, compruebe los ejercicios con los comandos del software Mathematica.

a) $\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{x^2}\left(x^2y\right)dy\,dx$; b) $\int_{-1}^{3}\int_{x^2}^{2x+3}x\,dy\,dx$; c) $\int_{0}^{2}\int_{2x}^{4x-x^2}1\,dy\,dx$

Problemas y Ejercicios de las sección 4.2.4
♦ 4.2.4 Sistema de Coordenadas Polares

1) Dibuje la gráfica de la ecuación polar dada, utilice los comandos de software Mathematica
para su comprobación.

a) $\theta^2 - 1 = 0$; b) $r\,\text{sen}\,\theta + 1 = 0$
d) $r = 2 - 4\cos\theta \rightarrow$ caracol ; e) $r^2 = 9\,\text{sen}\,2\theta \rightarrow$ (lemniscata)
f) $r = 5\cos 3\theta \rightarrow$ (rosas de 3 pétalos)

2) Exprese la ecuación cartesiana dada en coordenadas polares

a) $x = 4$; b) $x = 3y$; c) $xy = 1$;
d) $y = x^2$; e) $y = 6$; f) $x + y = 4$

3) Exprese en coordenadas cartesianas la ecuación polar dada.

a) $r = 3$; b) $r = 5\cos\theta$
c) $r = 1 - \cos 2\theta$; d) $r = \text{sen}2\theta$

4) Utilice los comandos del Software Matemática, dibuje las gráficas de las ecuaciones polares e indique cualquier simetría con respecto a ambos ejes de origen.

a) $r = 2\cos 2\theta$; b) $2 + 4\cos\theta$ frijol
c) $r = 2\text{sen}2\theta$ rosa de 4 pétalos

5) Escriba la ecuación dada en cada uno de los siguientes problemas tanto en coordenadas polares como cartesianas. Desarrolle una función donde implemente la transformación de las ecuaciones de polares a cartesianas y viceversa.

a) La recta vertical que pasa por (2,0).
b) La recta que pasa por (2,-1) con pendiente (- 1).
c) La recta que pasa por los puntos(1,3) y (3, 5).

6) Grafique los puntos con las siguientes coordenadas polares y encuentre después las coordenadas rectangulares de cada uno.

a) $(1, \pi/4)$; b) $(-2, 2\pi/3)$
c) $(3, 3\pi/2)$; d) $(2, 9\pi/4)$

7) Encuentre todos los puntos de intersección de las curvas dadas y utilice los comandos de Mathematica para graficar las curvas en coordenadas polares.

a) $r = 2$, $r = \cos\theta$; b) $r = \text{sen}\theta$, $r = \cos 2\theta$
c) $r = 1-\cos\theta$, $r^2 = 4\cos\theta$

Problemas y Ejercicios de las sección 4.2.5

♦ 4.2.5 Integrales dobles en coordenadas polares

1) Evalúe las integrales dobles iteradas y dibuje la región de integración.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}\left(r^2\,\text{sen}\,\theta\right)dr\,d\theta$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\text{sen}\,\theta} r\,dr\,d\theta$

2) Encuentre el área de la región S dada, calculando $\iint_S r dr d\theta$, haga primero la gráfica.

a) S es la región in interior al círculo r = 4cosθ y exterior al círculo r = 2.
b) S es un pétalo de la rosa de cuatro hojas r = a sen2θ.
c) S es la región interior del rizo mayor del frijol r = 2 - 4senθ.

3) Evalúe usando coordenadas polares. Dibuje el área de integración.

$$a)\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\left(4-x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{2}}dydx \quad ; \quad b)\int_0^1\int_x^1 x^2 dydx$$

4) Encuentre el volumen usando coordenadas polares.

a) El sólido del primer octante bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
b) El sólido cuya cota superior es $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 18$ y la cota inferior z = 0 y con cotas laterales
$x^2 + y^2 = 4$.

Integrales dobles en coordenadas polares sobre regiones mas generales

1) Encuentre el área indicada mediante doble integración en coordenadas polares.

a) El área limitada por el círculo r = 1.
b) El área limitada por la cardioide r = 1+ cos θ
c) El área situada dentro del círculo r = 1 como del círculo r = 2 senθ

2) Encuentre mediante doble integración en coordenadas polares, el volumen del sólido que se encuentra bajo la superficie dada y sobre la región plana R limitada por la curva que se indica.

a) $z = x^2 + y^2$, r = 3 ; b) z = 10 + 2x + 3y , r = senθ
c) $z = x^2 + y^2$, r = 2cosθ ; d) $z = a^2 - x^2 - y^2$, r = a

3) Evalúe las integrales dadas cambiando primero a coordenadas polares.

$$a)\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\frac{dxdy}{1+x^2+y^2} \;;\; b)\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\operatorname{sen}(x^2+y^2)dxdy \;;\; c)\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\left(x^2+y^2\right)\frac{3}{2}dxdy$$

Problemas y Ejercicios de las sección 4.2.6

♦ 4.2.6 Area de superficie

1) Encuentre al área de la superficie que se indica y hacer el esquema de cada caso.

a) La parte del plano $3x + 4y + 6z = 12$ que está arriba del rectángulo del plano xy cuyos
vértices son $(0,0),(2,0),(2,1),(0,1)$.

b) La parte de la superficie $z = \sqrt{4 - y^2}$ que está directamente sobre el cuadrado del plano xy
con vértices $(1,0),(2,0),(2,1),(1,1)$.

c) La parte del cilindro $x^2 - y^2 = 9$ que está directamente sobre el rectángulo del plano xy con
vértices $(0,0),(2,0),(2,3),(0,3)$.

d) La parte de la superficie cónica $x^2 + y^2$ que está directamente sobre el triángulo del plano
xy cuyos vértices $(0,0),(4,0),(0,4)$.

e) La parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ del primer octante que es interior al cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

f) La parte del plano $3x - 2y + 6z = 12$ que está limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$ y $3x + 2y = 12$

g) La parte del paraboloide $x^2 + y^2 = z$ que se obtiene al cortarlo por el plano $z = 1$.

h) La parte de la gráfica $z = y + \frac{1}{2}x^2$ que se encuentra sobre la región cuadrada del plano xy
con vértices $(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0)$.

2) Use la integral doble para encontrar el área de cada región del plano xy que está limitada por
las curvas.

a) $y = x$, $y^2 = x$; b) $y = x^2$, $y = 2x + 3$

c) $y = x^2, y = 0$, $x + y = 2$; d) $y = x^2 + 1$, $y = 2x^2 - 3$

Problemas y Ejercicios de las sección 4.2.7

♦ 4.2.7 Aplicaciones de las integrales dobles

1) Encuentre la masa y el centroide de una lámina plana de las formas y densidad indicada.

a) La región triangular limitada por $x = 0$, $y = 0$, $(x + y) = 1$.
b) La región limitada por $y = 0$, $y = 4 - x^2$, con $\rho(x,y) = y$.
c) La región limitada por las parábolas $y = x^2$, $x = y^2$, con $\rho(x,y) = xy$.
d) La región limitada por $y = 0$, $y = \operatorname{sen} x$, para $0 \le x \le \pi$, con $\rho(x,y) = x$.
e) La región limitada por $y = x^2$, $y = 4$, con $\rho(x,y) = y$.

2) En los siguientes ejercicios encuentre el momento polar de inercia I_0 de la lámina indicada.

a) La región limitada por el círculo $r = a$, con $\rho = r^n$, donde n es un número entero fijo.
b) El disco limitado por $r = 2\cos\theta$; con $\rho = k$ (constante).
c) La lámina de la región interior al círculo $r = 2\operatorname{sen}\theta$, y exterior al círculo $r = 1$, con $\rho = y$.

3) En los siguientes problemas encuentre los radios de giro $\hat{x}, \hat{y}$ de la lamina indicada.

a) La lámina de la región limitada por $y = x^2$, $y = 4$, con $\rho = y$.
b) La lámina de la región semicircular $x^2 + y \le a^2$, $y \ge 0$, con $\rho = r$.

Problemas y Ejercicios de las sección 4.3.1

♦ 4.3.1 Integrales triples en coordenadas cartesianas

1) Evalúe las integrales triples, utilice comandos del software Mathematica.

a) $\int_{-3}^{7}\int_{0}^{2x}\int_{y}^{x-1} dzdydx$; b) $\int_{0}^{2}\int_{-1}^{4}\int_{0}^{3y+x} dzdydx$; c) $\int_{1}^{4}\int_{z-1}^{2Z}\int_{0}^{y+2z} dxdydz$

d) $\int_{0}^{5}\int_{-2}^{4}\int_{1}^{2} 6xy^2z^3 dxdydz$; e) $\int_{0}^{2}\int_{-1}^{Z}\int_{1}^{2} 6xy^2z^3 dxdydz$; f) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{Z}\int_{0}^{Y} \text{sen}(x+y+z) dxdydz$

2) En los problemas siguientes dibuje el sólido utilizando los comandos del software Mathematica. Escriba después una integral iterada para: $\iiint_S f(x,y,z)dV$

a) $\left\{(x,y,z): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3, 0 \le z \le \frac{1}{6}(12-3x-2y)\right\}$

b) $\left\{(x,y,z): 0 \le x \le \sqrt{4-y^2}, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3\right\}$

b) $\left\{(x,y,z): 0 \le x \le \frac{1}{2}y, 0 \le y \le 4, 0 \le z \le 2\right\}$

c) $\left\{(x,y,z): 0 \le x \le \sqrt{x}, 0 \le y \le 4, 0 \le z \le \frac{3}{2}\right\}$

d) S es el tetraedro con vértice (0,0,0), (3,2,0), (0,3,0) y (0,0,2).

e) S es la región del primer octante limitada por la superficie s = z = 9 – x^2 – y^2 y los planos coordenados.

f) S es la región del primer octante limitada por el cilindro $y^2 + z^2 = 1$ y los planos x = 1 y x = 4.

Problemas y Ejercicios de las sección 4.3.2, 4.3.3,

♦ 4.3.2 Coordenadas Cilíndricas

♦ 4.3.2 Coordenadas Esféricas

1) Cambie las coordenadas cilíndricas a coordenadas Rectangulares

a) (5, π/2,3) ; b) (6, π/3, -5)

2) Cambie las coordenadas Rectangulares a esféricas

a) $\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$; b) $\left(1, \sqrt{3}, 0\right)$

3) Convierta las coordenadas cilíndricas a esféricas

a) $\left(\sqrt{2}, \pi/4, 1\right)$; b) $(3, \pi/3, 1)$

4) Encuentre una ecuación en coordenadas cilíndricas y una en coordenadas esféricas para la gráfica de la ecuación dada.

a) a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; b) $3x + y - 4z = 12$
b) $6x = x^2 + y^2$; d) $x^2 + y^2 = 1$

5) Represente una región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y use integrales múltiples para calcular el volumen

a) $z + x^2 = 4$, $y + z = 4$, $y = 0$, $z = 0$
b) $y = 2 - z^2$, $y = z^2$, $x + z = 4$, $x = 0$
c) $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $y = -1$, $y = 2$

Problemas y Ejercicios de las sección 4.3.4
♦ 4.3.4 Integrales triples en coordenadas cilíndricas

1) En los problemas siguientes use integrales cilíndricas para encontrar las cantidades indicadas

a) El volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 4$.

b) El volumen del sólido cuya cota superior es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, la inferior es el plano

$z = 0$ y la lateral es el cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

c) El volumen del sólido cuya frontera es arriba la esfera $r^2 + z^2 = 5$ y abajo el paraboloide
$r^2 = 4z$.

d) Calcular el volumen y el centroide del sólido acotado por las gráficas de $z = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 = 4$ y $z = 0$.

2) Evalúe la integral cambiando a coordenadas cilíndricas

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dz\,dx\,dy$$

Problemas y Ejercicios de las sección 4.3.5
♦ 4.3.5 Integrales triples en coordenadas esféricas

En los problemas siguientes use integrales esféricas para encontrar las cantidades indicadas

a) La masa de un sólido interior a una esfera de radio **2a** y exterior al cilindro circular de radio **a**
cuyo eje es un diámetro de una esfera, si al densidad es proporcional al cuadrado de la
distancia al centro de la esfera.

b) El centro de masa de un hemisferio sólido de radio **a**, si la densidad es proporcional a la distancia al eje de simetría.

c) El volumen del sólido interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ exterior al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,
arriba del plano xy.

d) Calcular el volumen del sólido que se encuentra arriba del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Problemas y Ejercicios de las sección 4.3.6
♦ 4.3.6 Aplicaciones de la Integrales triples

1) Calcule la masa y el centro de masa de la lamina que tiene la forma de la región acotada por
las gráficas de la ecuación y la densidad indicada. Determine Ix, Iy, Io.

a) $y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$, $\delta(x,y) = x + y$

Proyectos de la cuarta unidad

Proyecto# 7

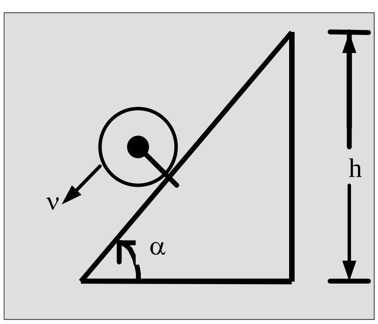
a) Desarrolle una función para transformar coordenadas cilíndricas a rectangulares y viceversa,
además de coordenadas esféricas a cilíndricas y viceversa

b) Modifique el programa de área de superficie para que resuelva ejercicios haciendo cambio de
coordenadas(cartesianas a polares y viceversa).

Proyecto# 8

Una lámina homogénea en forma de rondana esta limitada por los círculos r =a y r =b con b >a.

a) Calcule su momento de inercia polar , desarrolle una función para resolver el ejercicio.



5

Primera Unidad

Campos Vectoriales e Integrales de línea

Contenido

♦ 5.1 Campos vectoriales en física

En unidades anteriores estudiamos funciones vectoriales de una variable real, ahora nos interesan las funciones vectoriales de varias variables reales. Consideremos una función F que se asocia a cada punto p del n-espacio un vector F(p). Por ejemplo:

F(p) = F(x,y) = $-\frac{1}{2}yi + \frac{1}{2}xj$; nos referiremos a la función como un campo vectorial.

Imagine que a cada punto P del espacio se asocia un vector F(p) que sale de p, entonces el conjunto de los vectores se llama campo vectorial. No podremos dibujar todos estos vectores, pero una muestra representativa nos puede dar una buena idea intuitiva de un campo. Un flujo de agua o una corriente de aire pueden determinar campos de velocidades, la figura 5.1.1 muestra un campo de velocidades de una rueda que gira a una razón constante de ½ radian por unidad de tiempo y la figura 5.1.2 representa el campo de velocidades del agua dentro de un tubo curvo.

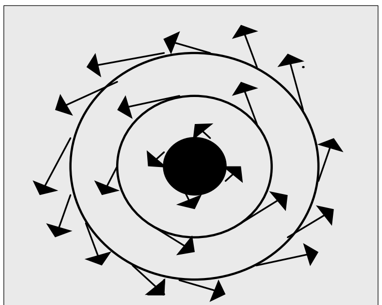


Fig.5.1.1

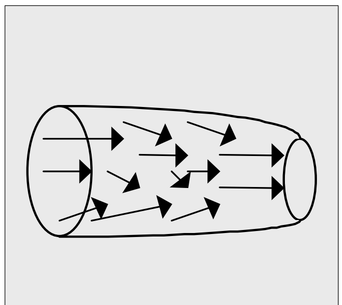


Fig.5.1.2

Otros campos vectoriales que surgen de manera natural en la ciencia son los campos gravitacionales, magnético y de fuerzas(utilizados en el estudio de mecánica y electricidad).

Las figuras mostradas están limitadas al caso en el que esos campos son independientes del tiempo llamados ***campos vectoriales estacionarios***. En contraste con un campo vectorial, una función F que asocia un número a cada punto del espacio se llama **campo escalar.** La función que indica la temperatura de cada punto es un buen ejemplo del campo escalar.

Toda ecuación de la forma F(x) = M(x,y)i + N(x,y)j puede considerarse como un campo vectorial.

Si las funciones escalares M, N y P se definen por medio de expresiones simples, entonces el campo vectorial puede describirse trazando vectores correspondientes a F(x,y,z) o F(x,y).

Ejemplo#1

Realice la descripción del campo vectorial F dado por F(x,y) = -yi + xj.

Solución

La tabla 5.1 muestra los vectores F(x,y) asociados a varios puntos (x,y), ver figura 5.1.4.

Tabla 5.1			
(x,y)	**F(x,y)**	**(x,y)**	**F(x,y)**
(1,1)	-i + j	(1,3)	-3i + j
(-1,1)	-i - j	(-3,1)	-i – 3j
(-1,-1)	i - j	(-1,-3)	3i - j
(1,-1)	i + j	(3,-1)	i + 3j

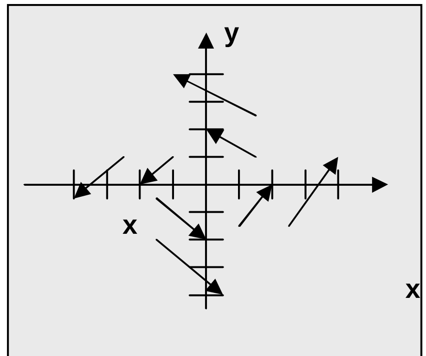


Fig 5.1.3

Para llegar a una descripción de un campo vectorial F, considérese un punto arbitrario P(x,y) y defínase el vector de posición r = xi + yj de P(x,y), ver figura 5.1.4. Podemos ver que F es ortogonal a r y por lo tanto, es tangente a la circunferencia de radio ||r|| con centro en el origen. Demostremos este hecho probando que

$$\begin{aligned} r \bullet F(x,y) &= 0, \\ r \bullet F(x,y) &= (xi + yj) \bullet (-yi + xj) \\ &= -xy + yx = 0 \end{aligned}$$

además $\left\| F(,xy) = \sqrt{x^2 + y^2} \right\| = \|r\|$, los vectores son semejantes a los de le figura 5.1.1. Por

lo tanto la magnitud de F(x,y) es igual al radio de la circunferencia. Esto implica que cuando el punto P(x,y) se aleja del origen, la magnitud de F(x,y) aumenta como ocurre en el caso de la figura 5.1.1.

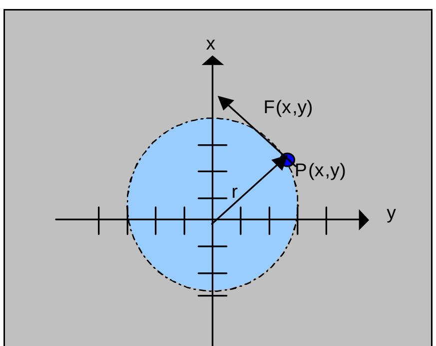


Fig 5.1.4

La siguiente definición da la idea de uno de los campos vectoriales más importantes en Física.

Definición:

Sea r = xi + yj + zk el vector de posición de un punto P(x,y,z). Se dice que un campo vectorial F es un *"campo de variación inversa al cuadrado de la distancia"* si $F(x,y,z) = \frac{C}{\|r\|^2}u$, donde c es un escalar y u es un vector unitario que tiene la misma dirección que r y está dado por $u = \frac{1}{\|r\|}r$.

La fuerza de gravedad determina un campo de tipo de variación inversa al cuadrado según la “*Ley de de la gravitacion universal de Newton*” , si una partícula de masa M se coloca en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, entonces la fuerza que ejerce sobre una partícula de masa m localizada en P(x,y,z) es : $F(x,y,z) = -G\frac{Mm}{|r|^2}u$, donde G es la constante de gravitación universal, r es el vector de posición del punto P y $u = \frac{1}{|r|}r$. La figura 5.1.5 muestra un ejemplo de campo de fuerzas inversamente proporcional al cuadrado de la distancia; la magnitud de la fuerza de atracción es grande cerca de la partícula y la figura 5.1.6 muestra un ejemplo de líneas de fuerzas alrededor de dos cargas eléctricas positivas iguales.

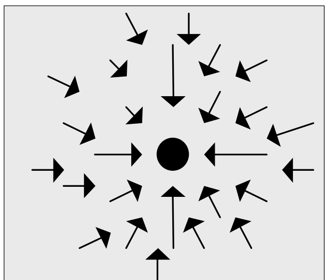


Fig 5.1.5

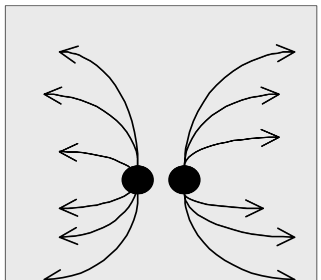


Fig 5.1.6

Se dice que un campo vectorial F es un campo vectorial conservativo, si **es** el **gradiente** de una función escalar, es decir si F(x,y,z) = ∇f)x,y,z) para una función f.

”Todo campo vectorial de tipo inversamente proporcional al cuadrado es conservativo.”

Ejemplo#2

Describir el campo F(x,y,z) que cumple la definición anterior para c < 0.

Solución

Como $U = \frac{1}{|r|}r$ y r = xi + yj + zk entonces $F(x,y,z) = \frac{C}{|r|^3}r = \frac{C}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}(xi+yj+zk)$. La figura 5.1.6 muestra algunos de los vectores típicos de un campo F del tipo variación inversa al cuadrado.

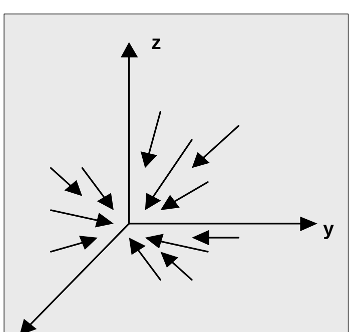


Fig 5.1.7

♦ 5.2 Campos gradientes

5.2.1 Gradiente de un campo escalar

Sea f(x,y,z) un campo escalar y suponga que f es diferenciable. Entonces, el gradiente de f, denotado por ∇f , es el campo vectorial dado por F(x,y,z) = $\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$, es decir si ∇ actúa sobre una función escalar **f**, da como resultado el gradiente de f.

Sabemos que $\nabla f(x,y,z)$ apunta en la dirección de mayor crecimiento de f(x,y,z). Un campo vectorial F que es el gradiente de un campo escalar **f** se llama ***campo vectorial conservativo*** y f es su función potencial . Estos campos y sus funciones potenciales son importantes en física. En particular, los campos que obedecen, la ley del inverso cuadrado (por ejemplo, los campos eléctricos y los campos gravitacionales) son conservativos.

Ejemplo# 1

Un objeto de masa m, que gira en una órbita circular con velocidad angular constante ω ,es sujeto a la fuerza centrífuga dada por:

$$F(x,y,z) = mw^2 r = mw^2 (xi+yj+zk)$$

Demuestre que $f(x,y,z) = ½ mw^2 (x^2+y^2+z^2)$ es la función potencial de F.

Solución usando los comandos del software Mathematica

```
xd = D[1/2mw^2(x^2+y^2+z^2),x];
yd = D[1/2mw^2(x^2+y^2+z^2),y];
zd = D[1/2mw^2(x^2+y^2+z^2),z];
Grad = xd + yd + zd;
Print[StringForm["Gradiente de la ecuación: ``",Grad]]
```

Solución : Gradiente de la ecuación $mw^2 x + mw^2 y + mw^2 z$

5.2.2 Divergencia y rotacional de un campo vectorial

A un campo vectorial están asociados dos campos:

El divergente de f que es un ***campo escalar***.

Rotacional (rot) de F que es ***un campo vectorial***.

Hemos visto que si un campo vectorial de fuerzas F es conservativo, se puede expresar como el gradiente de una función potencial ϕ.

$$F = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k$$

El operador gradiente $F = \nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ empleado en el gradiente se puede combinar con un campo vectorial F(x,y,z) = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j +R(x,y,z)k de dos maneras adicionales. Supondremos a continuación que P,Q y R tienen derivadas parciales continuas.

Definición de rotacional:

El rotacional de un campo vectorial F = Pi + Qj + Rk es el vector

$$\text{rot}\, F = \nabla x F = \left(\frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)k$$

En la práctica se puede calcular rot F a partir del producto vectorial del operador gradiente y el vector F de la siguiente forma:

Rotacional de F como un determinante:

$$\text{rot}F = \nabla x F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} + & \frac{\partial}{\partial y} + & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

El operador ∇ se usa también para obtener una importante función escalar a partir de un campo vectorial F de la siguiente manera:

Definición de divergencia:

Supóngase que F = Pi + Qj + Rk tal que P, Q, R tienen derivadas parciales en alguna región. La divergencia de un campo vectorial F es la función escalar denotada por div F o ∇ • F dada por $\text{div}F = \nabla \bullet F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

Se usa ∇ • F para la divergencia por que la fórmula puede establecerse tomando el producto escalar ∇ y F a como sigue

$$\nabla \bullet F = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y} + j\frac{\partial}{\partial z}k\right) \bullet (Pi + Qj + Rk)$$

$$\nabla \bullet F = \frac{\partial}{\partial x}P(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x,y,z) + \frac{\partial}{\partial z}R(x,y,z)$$

Ejemplo#2

Sea F(x,y,z) = $(x^2yz)i + (3xyz^3)j + (x^2 - z^2)k$, encuentre el divergente de F y el rotacional de F.

Solución

div$F = \nabla \bullet F = 2xyz + 3xz^3 - 2z$;

$$\text{rot}F = \nabla x F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} + & \frac{\partial}{\partial y} + & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2yz & 3xyz^3 & x^2 - y^2 \end{vmatrix}$$

rotF = i(-9xyx^2) – j(2x –x^{2}y) + k(3yz^3-x^{2}z)

Solución usando los comandos del software matemática

Encontrando el divergente

```
xd = D[(x^2)*y*z,x];
yd =D[3*x*y*z^3,y];
zd = D[x^2 - z^2,z];

Div = xd+yd+zd;

Print["Divergente:"Div]
```

Divergente: (-2 z + 2 x y z^3 + 3 x z)

Encontrando el rotacional

```
x1 = D[((x^2)-(z^2)),y];
x2 = D[3*x*y*z^3,z];
var = x1 - x2;
y1 = D[x^2 - z^2,x];
y2 = D[(x^2)*y*z,z];
yVar = y1 - y2;
z1 = D[3*x*y*z^3,x];
z2 = D[(x^2)*y*z,y];
Varz = z1 - z2;

Print[StringForm["Rot(``)i-(``)j+(``)k",var,yVar,Varz]]
```

Rot(-9 x y z^2)i-(2 x - x^2 y)j+(-(x^2 z) + 3 y z^3)k

♦ 5.3 Integrales de línea

• 5.3.1 Terminología

La noción de integración de una función definida en un intervalo se puede generalizar a la integración de una función definida a lo largo de una línea recta (recta o curva).

Para la terminología necesitamos recordar la terminología referente a línea o curvas.

En la primera unidad abordamos todo lo referente a curvas, en este tema se hace mención de las curvas, para recordar ver la **unidad uno página 1-10**.

5.3.2 Integrales de línea en el plano

El término integral de línea se refiere a una integral sobre una línea curva que puede ser en algunos casos una línea recta.

Pasos que conducen a las definiciones de tres integrales de línea en el plano:

Z = G(x,y)

1) Sea G definida en alguna región que contiene a la curva alisada C definida por
$x = f(t)$, $y = g(t)$ $a \le t \le b$.
2) Divídase C en n subarcos de longitudes Δs_k según la partición $a = t_0 < t_1 < ...\ t_n = b$ de [a,b]. Sean Δx_k y Δy_k las longitudes de las proyecciones de cada subarco sobre los ejes x y y, respectivamente.
3) Sea $\|P\|$ la norma de la subdivisión, o sea la longitud del subarco más largo.
4) Elija un punto x_k, y_k en cada subarco.
4) Forme las sumas $\sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k)\Delta x_k$; $\sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k)\Delta y_k$; $\sum_{k=1}^{n} G(x_k, y_k)\Delta s_k$ ver figura 5.3.1.

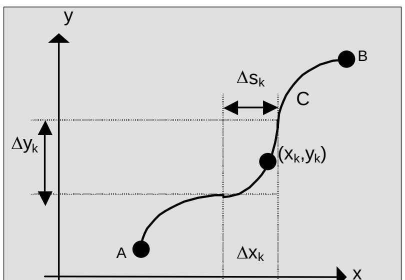


Fig 5.3.1

Definición (Integrales de líneas en dos dimensiones):

Sea G una función de dos variables x e y definidas en una región del plano que contiene a una curva alisada C. Entonces las integrales de línea de G a lo largo de C de A a B respecto a x, y y a la longitud de arco.

$$i) \int_c g(x,y)dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k)\Delta x_k \quad ;$$

$$ii) \int_c g(x,y)dy = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k)\Delta y_k \quad ;$$

$$iii) \int_c g(x,y)ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k)\Delta s_k$$

Teorema de evaluación de integrales de línea:

Si C es una curva cerrada suave parametrizada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, entonces

$$\int_c G(x,y)ds = \int_a^b G(f(t),g(t))\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt \quad ; \qquad \int_c G(x,y)dx = \int_a^b G(f(t),g(t))f'(t)dt \quad ;$$

$$\int_c G(x,y)dy = \int_a^b G(f(t),g(t))g'(t)\, dt \quad ; \qquad ds = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt \, ;$$

$$dx = f\,'(t)dt \quad ; \qquad dy = g'(t)dt$$

Alternativamente, si la curva C es definida mediante una función explicita y = f(x) para a $\le$ t $\le$ b, puede utilizarse x como un parámetro. Empleando dy = f ´(x)dx y $ds = \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ las integrales de línea precedentes se convierten en :

$$\int_c G(x,y)dx = \int_a^b G(x,f(x))dx$$

$$\int_c G(x,y)dy = \int_a^b G(x,f(x))f\,´(x)\,dx$$

$$\int_c G(x,y)ds = \int_a^b G(x,f(x))\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Una integral de línea a lo largo de una curva alisada parte por parte C. Se define como la suma de las integrales en cada una de las curvas alisadas cuya unión es C, por ejemplo si C está compuesta por las curvas alisadas C_1 y C_2 entonces

$$\int_c G(x,y)ds = \int_{c1} G(x,y)ds + \int_{c2} G(x,y)ds$$

Ejemplo#1

Evaluar $\int_c xy^2dx$ en el cuarto cuadrante de una circunferencia definido por x = 4cost, y = 4sent $0 \le t \le \pi/2$, ver figura 5.3.2.

Solución

$$\int_c xy^2dx = \int_0^{\pi/2}(4\cos t)(16\text{sen}^2 t)(-4\text{sent}dt)$$

$$= -256\int_0^{\pi/2}\text{sen}^3 t\cos t dt = -256\left[\frac{1}{4}\text{sen}^4 t\right]_0^{\pi/2} = -64$$

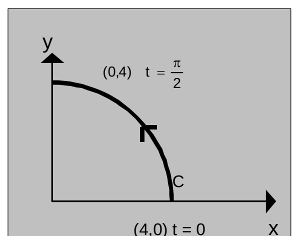


Fig 5.3.2

♦ 5.4 Independencia de la trayectoria

A una curva regular parte por parte con extremos A y B se le llama a veces trayectoria de A a B. A continuación mostraremos condiciones bajo la cual una integral de línea es independiente de la trayectoria.

Interprétese r(t) como x(t)i + y(t)j si el contexto es bi-dimensional y como x(t)i + y(t)j + z(t)k si es tridimensional. En concordancia , f(r) significa f(x,y) en el primer caso y f(x,y,z) en el segundo caso.

Teorema A (Teorema fundamental de las integrales de líneas)

Sea C una curva suave por partes cuyas ecuaciones paramétricas son r(t), $a \le t \le b$, que empieza en a = r(a) y termina en b = r(b). Si f es continuamente diferenciable de un intervalo abierto que contenga a c , si F(x,y) = ∇f(x,y) entonces $\int_c \nabla f(r)\bullet dr = f(b) - f(a)$.

5.4.1 Criterios para la independencia de la trayectoria

Un conjunto D es **conexo** si dos cualesquiera de los puntos de D se pueden unir por medio de una curva suave regular parte por parte que pertenece a D en su totalidad como se muestra en las figuras 5.4.1a y 5.4.1b. Entonces, decimos que $\int_c F(r) \bullet .dr$ es independiente del recorrido en D si para dos puntos A y B cualesquiera de D la integral de línea tiene el mismo valor para cualquier trayectoria C en D, que esté orientada positivamente desde A hasta B.

Regiones abiertas, es decir, para todo punto A de una región D existe un círculo con centro A completamente contenida en D.

Un campo vectorial F que es gradiente de un campo escalar f se llama campo vectorial conservativo y f es su función potencial.

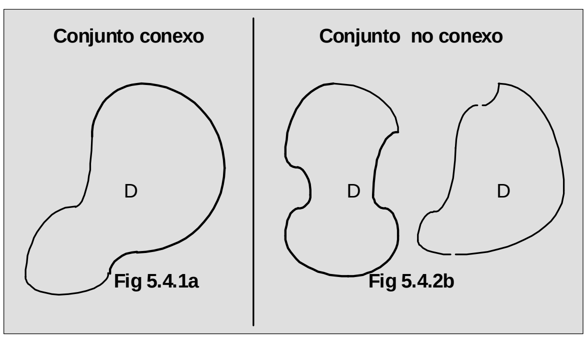


Fig 5.4.1a

Fig 5.4.2b

El teorema siguiente dice que si un campo F es continuo entonces la integral de línea $\int_c F \bullet dr$ es independiente de la trayectoria si y sólo si F es conservativo

Teorema B:

Sea F(r) una función continua sobre un conjunto abierto conexo D. Entonces, la integral
De línea $\int_c F(r) \bullet dr$ es independiente del recorrido **si y solo si** $F(r) = \nabla f(r)$ para alguna

Para que la condición $\int_c F(r) \bullet dr$ sea independiente del recorrido implica que si C es cualquier curva orientada y cerrada en D, entonces $\int_c F(r) \bullet dr = 0,$ Para ver esto considérese a C compuesta por dos curvas orientadas C_1 y C_2 , ver figura 5.4.2.

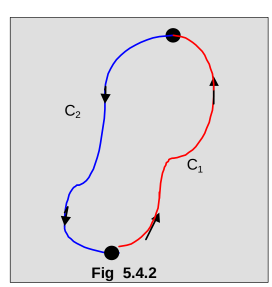


Fig 5.4.2

Sea la curva $-C_2$ la curva C_2 con orientación opuesta, puesto que C_1 y $-C_2$ tienen los mismos puntos inicial y final, la independencia del recorrido garantiza que:

$$\begin{aligned}\int_c F(r)\bullet dr &= \int_{c_1} F(r)\bullet dr + \int_{c_2} F(r)\bullet dr\\ &= \int_{c_1} F(r)\bullet dr - \int_{-c_2} F(r)\bullet dr\\ &= \int_{c_1} F(r)\bullet dr - \int_{c_2} F(r)\bullet dr = 0\end{aligned}$$

La argumentación anterior es reversible razón por la cual existen tres condiciones equivalentes

1) $F = \nabla f$ para alguna función f (F es conservativa).
2) $\int_c F(r)\bullet dr$ es independiente del recorrido.
3) $\int_c F(r)\bullet dr = 0$ para toda trayectoria cerrada.

Interpretación física de la condición tres

El trabajo realizado por un campo de fuerzas conservativo al mover una partícula a lo largo de una trayectoria cerrada es cero. En particular, esto es cierto tanto en campos gravitacionales como eléctricos, dado que son conservativos. Mientras las condiciones **dos** y **tres** impliquen que **F** es el gradiente de una función escalar f, no tendrá una utilidad particular en esta conexión. Sin embargo, debemos poner una condición adicional en D, si D es ***simplemente conexa.*** En el espacio de dos dimensiones esto significa que D no tenga agujeros y en el espacio de tres dimensiones que no tengan túneles que atraviesen a D.

Teorema C:

Sea F = Mi + Nj + Pk, donde M, N y P son continuas, así como sus derivadas parciales de primer orden en un conjunto conexo abierto D que no tiene hoyos. Entonces, F es conservativo ($F = \nabla f$) si y sólo si rotF = 0; es decir, si y sólo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$; $\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}$; $\frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$. En particular en el caso de dos variables donde F = Mi + Nj , F es conservativo si y sólo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Ejemplo#1

Determine si F = ($4x^3 + 9x^2y^2$)i + ($6x^3y + 6y^5$) es conservativo, de ser así, encuentre la función f de la cual es el gradiente.

Solución

$M(x,y) = 4x^3 + 9x^2y^2$ y $N(x,y) = 6x^3y + 6y^5$. En este caso de dos dimensiones, las condiciones del teorema C se reducen a demostrar que :

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$; $\frac{\partial M}{\partial y} = 18x^2 y$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 18x^2 y$

Satisface la condición y f debe de existir. Para encontrar f, observe primero que el gradiente $\nabla f = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j$ = Mi + Nj por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 9x^2y^2$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + 6y^5$ Ec1

Antiderivando $\partial f/\partial x$

$$f(x,y) = \frac{4}{4}x^4 + \frac{9}{3}x^3y^2 = x^4 + 3x^3y^2 + c_1(y) \quad Ec_2 \quad ;$$

En la que la constante de integración C_1 es una función que depende sólo de y. La derivada parcial de f(x,y) con respecto a y de la ec_2 $\partial f/\partial y = 6x_3y + c'_1(y)$ se debe comparar con $\partial f/\partial y = 6x^3y + 6y^5$ de la Ec1, Obtenemos $\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^3y + C_1'(y) = 6x^3y + 6y^5$.

Concluimos que $C'_1(y) = 6y^5$. Una nueva antiderivada es $c_1(y) = y^6 + c$, donde C es una constante (independiente tanto de x como de y). La sustitución de este resultado en la ec_2 produce $f(x,y) = x^4 + 3x^3y^2 + y^6 + C$.

Ejemplo#2

Sea $F(r) = F(x,y) = (4x^3 + 9x^2y^2)i + (6x^3y + 6y^5)j$. Calcule $\int_c f(r)\bullet dr = \int_c (4x^3 + 9x^2y^2)dx + (6x^3y + 6y^5)dy$ donde c es cualquier trayectoria de (0,0) a (1,2).

Solución

El ejemplo 1 demuestra que $F = \nabla f$, donde $f(x,y) = x^4 + 3x^3y^2 + y^6 + C$ y por lo tanto la integral de línea dada es independiente del recorrido. En efecto, por el teorema A,

$$\int_c F(r)\bullet dr = \frac{4}{4}x^4 + \frac{9}{3}x^3y^2 + \frac{6}{2}x^3y^2 + \frac{6}{6}y^6 = \left[x^4 + 6x^3y^2 + y^6\right]_{(0,0)}^{(1,2)} = 89$$

Ejemplo#3

Demuestre que $F = (e^x \,Cosy + yz)i + (xz - e^x Seny)j + (xy)k$ es conservativo y encuentre f tal que
$F = \nabla f$.

Solución

$M = e^x Cosy + yz$, $N = xz - e^x Seny$, $P = xy$ Ec_1 y por lo tanto

$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^x Seny + z = \frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}$; $\frac{\partial N}{\partial z} = x = \frac{\partial P}{\partial y}$ Ec_2 condiciones del teorema C

Derivando $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x Cosy + yz$; $\frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x Seny$; $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$ Ec_3

La antiderivada de $\partial f/\partial x$ con respecto a x: $F(x,y,z) = e^x Cosy + xyz + C_1(y, z)$ Ec_4

Derivando la Ec_4 respecto a y e igualando el resultado $\partial f/\partial y$ de la Ec_3.

$-e^x Seny + xz + \frac{\partial C_1}{\partial y} = xz - e^x Seny$ o sea $\frac{\partial C_1(y,z)}{\partial y} = 0$

La antiderivada de esta expresión con respecto a x es C_1 (y,z) = C_2 (z), sustituir $C_2(z)$ en Ec_4.
f(x,y,z) = e^x Cosy + xyz + $C_2(z)$ Ec_5.

Cuando derivamos la Ec_5 con respecto a z e igualamos el resultado a $\partial f/\partial z$ de la Ec_3 obtenemos

$\frac{\partial f}{\partial z} = xy + C'_2(z)$; $xy + C'_2(z) = xy$ o sea $C'_2(Z) = 0$ y $C'_2(Z) = C$.

Concluimos que f(x,y,z) = e^xCosy + xyz + C

♦ 5.5 Trabajo a lo largo de una curva

Supóngase que F = Pi + Qj + Rk es un campo de fuerzas definido en una región que contiene a la curva C de A a B. Supóngase también que la parametrización x = x (t), y = y (t), z = z (t), t en [a,b] de C tiene un vector velocidad diferente de cero.

$$\upsilon = i\frac{dx}{dt} + j\frac{dy}{dt} + k\frac{dz}{dt}$$

La rapidez asociada a éste vector velocidad es: $\upsilon = |v| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$.

El vector unitario tangente a la curva C es: $T = \frac{v}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon}\left(\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k\right)$.

Queremos obtener el trabajo aproximado W realizado por el campo de fuerza F al mover una partícula a lo largo de una curva C de A a B. Subdividamos C, como se observa en la siguiente figura 5.5.1.

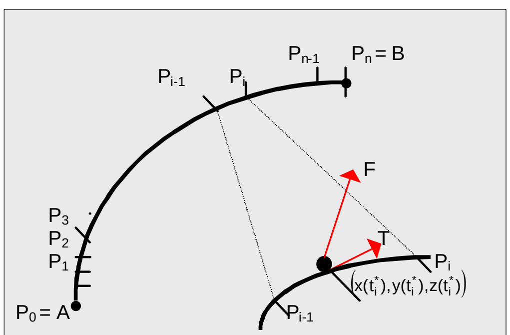


Fig. 5.5.1

Imagine a F moviendo la partícula de P_{i-1} a P_i , dos puntos de subdivisión consecutivos de C. El trabajo de ΔW_i realizado es aproximadamente el producto de la distancia Δs_i de P_{i-1} a P_i (medida a lo largo de C) y la componente tangencial F•T de la fuerza F a un punto característico $(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*))$ entre P_{i-1} a P_i . Entonces,

$$\Delta W_i \approx F(x(t_i^*), y(t_i^*), z(t_i^*)) \bullet T(t_i^*)\Delta s_i$$

Definición de trabajo:

Sean C una curva regular en el espacio , **T** es un vector unitario tangente a C en (x,y,z) y
F la fuerza que actúa en (x,y,z). **El trabajo W realizado por F a lo largo de C es**:

$Tds = \left(\frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j + \frac{dz}{ds}k\right)ds = dr$ con esta notación, la Ec_1 toma la forma $\int_c F \bullet Tdr$. Para evaluar la integral de línea $\int_c F \bullet Tds$, se expresa el integrando en términos del parámetro t, como de costumbre. Entonces

$$w = \int_c F \bullet Tds = \int_a^b (Pi + Qj + Rk) \bullet \frac{1}{\upsilon}\left(\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k\right)\upsilon\, dt$$

$$= \int_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right)dt \qquad \text{y así} \qquad W = \int_c Pdx + Qdy + Rdz$$

Teorema de las integrales de línea equivalente:

Supóngase que el campo vectorial F = Pi + Qj + Rk tiene funciones componentes continuas y que T es la tangente unitaria a la curva suave C. Entonces $\int_c F \bullet T\,ds = \int_c Pdx + Qdy + Rdz$

Ejemplo#1

Determina el trabajo realizado por :

a) F = xi + yj;

b) $F = \frac{3}{4}i + \frac{1}{2}j$ a lo largo de la curva C descrita por r(t) = cost i + sent j, desde t = 0 hasta $t = \pi$.

Solución a

La función vectorial r(t) da las ecuaciones paramétricas x = cost, y = sent, $0 \le t \le \pi$, a los cuales se les reconoce como semicircunferencia. El campo de fuerza F es ortogonal a C en todo punto, ver la figura 5.5.2 como las componentes tangenciales de F son cero, el trabajo realizado a lo largo de C es nulo.

$$w = \int_c F \bullet dr = \int_c (xi + yj)dr = \int_0^\pi (\cos t\, i + \operatorname{sen} t\, j)(-\operatorname{sen} t\, i + \cos t\, j)dt$$

$$= \int_0^\pi (-\cos t \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \cos t)dt = 0$$

Solución b

En la figura 5.5.3 los vectores en negro son las proyecciones de F sobre los vectores tangentes unitarios. El trabajo realizado por **F** es:

$$W = \int_c F \bullet dr = \int_c ((3/4)i + (1/2)j)dr = \int_0^\pi ((3/4)i + (1/2)j) \bullet (-\operatorname{Sen} t\, i + \operatorname{Cos} t\, j)\,dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left((-3/4)\text{sent} + (1/2)\cos t \right) dt = \left[(3/4)\cos t + (1/2)\text{sent} \right]_0^{\pi} = -3/2$$

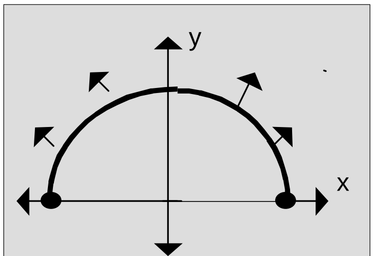


Fig.5.5.2

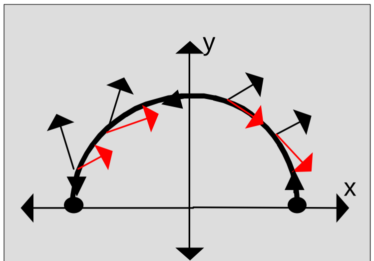


Fig.5.5.3

♦ 5.5 Teorema de Green en el plano

Sabemos que $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ significa que la integral de una función sobre un conjunto S = [a,b] es igual a una función relacionada, (a la antiderivada) evaluada de cierta manera sobre la frontera de S, que en este caso consta sólo de dos puntos a y b. Una de las aplicaciones de este teorema es en física, en particular el estudio de calor, electricidad, magnetismo y flujo de fluidos.

Suponga que C es una "curva cerrada simple" que forma la frontera de una región S. Sea C orientada de modo que al cruzarla en su dirección positiva, S se conserva a la izquierda (orientación contraria al sentido del reloj). La integral de línea correspondiente a F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j alrededor de C se designa mediante la expresión:

$$\oint_c M dx + N dy$$

Teorema de Green:

Sea C una curva cerrada simple, suave parte por parte, que forma la frontera de una región S del plano xy. Si M(x,y) y N(x,y) son funciones continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas sobre S y su frontera C, entonces

$$\iint_s \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \oint_c M dx + N dy$$

El teorema de Green se cumple en un conjunto que sea x-simple y y-simple, ver figura 5.6.1. El resultado se generaliza con facilidad para una región S que se descomponga en una unión de regiones $S_1, S_2, \ldots S_n$ que sean x-simple y y-simple ver figura 5.6.2. Basta con aplicar el teorema anterior y sumar luego los resultados . Nótese que las aportaciones de las integrales de línea se cancelan en las fronteras que comparten regiones adyacentes, puesto que éstas fronteras son recorridas dos veces, pero en direcciones opuestas.

El Teorema de Green se cumple aún para regiones S que tengan uno ó más agujeros (figura 5.6.3), siempre que cada parte de la frontera esté orientada de modo que S quede siempre a la izquierda cuando se sigue la curva en dirección positiva. Basta con descomponerla en regiones ordinarias, como en la figura 5.6.4.

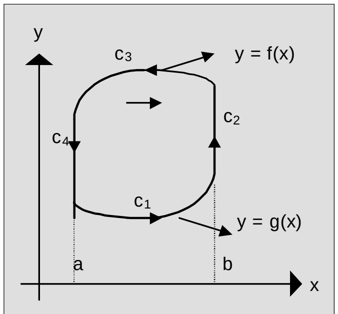


Fig. 5.6.1

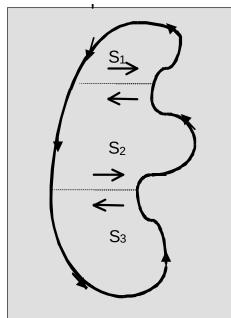


Fig. 5.6.2

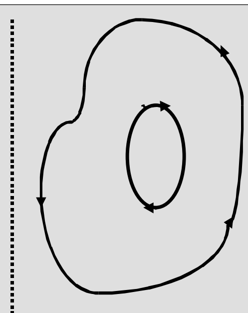


Fig.5.6.3

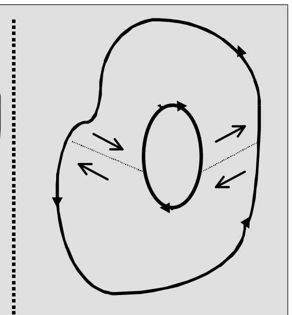


Fig.5.6.4

Ejemplo#1

Sea C la frontera del triángulo de vértices (0,0), (1,2) y (0,2) mostrado en la figura 5.6.5.

Calcule $\int_c 4x^2ydx + 2ydy$;

a) Por el método directo
b) Usando el teorema de Green.

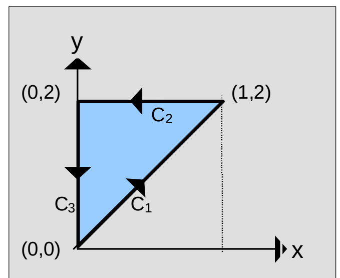


Fig.5.6.5

Solución a - Método directo

Sobre C_1, $y = 2x$ y $dy = 2dx$, así que

$$\int_{c_1} 4x^2ydx + 2ydy = \int_0^1 8x^3dx + 8xdx = \left[2x^4 + 4x^2\right]_0^1 = 6$$

Sobre C_2

$$\int_{c_2} 4x^2ydx + 2ydy = \int_1^0 8x^2dx = \left[\frac{8x^3}{3}\right]_1^0 = -\frac{8}{3}$$

Sobre C_3

$$\int_{c_3} 4x^2ydx + 2ydy = \int_2^0 2ydy = \left[y^2\right]_2^0 = -4$$

En consecuencia $\oint 4x^2ydx + 2ydy = 6 - \frac{8}{3} - 4 = -\frac{2}{3}$

Solución b - Teorema de Green

$$\int_c 4x^2ydx + 2ydy = \int_0^1\int_{2x}^2 (0-4x^2)dydx = \int_0^1\left[-4x^2y\right]_{2x}^2 dx = \int_0^1(-8x^2+8x^3)dx$$

$$= \left[\frac{-8x^3}{3} + 2x^4 \right]_0^1 = -\frac{2}{3}$$

<u>Solución usando los comandos del software Matemática del teorema de Green</u>

```
Green[A_, B_, Lix_, Lsx_, Liy_,Lsy_]:=Module[{M,Cn},
M=D[A,y];
Cn=D[B,x];
cInt=Integrate[cN-M,{x,Lix,Lsx},{y,Liy,Lsy}];
Print[StringForm["Solución: ``",cInt]];]
Green[4(x^2)*y,2y,0,1,2x,2]
```

<u>Salida del programa</u> $= -\frac{2}{3}$

Ejemplo#2

Demuestre que si una región S del plano tiene como frontera a C, siendo esta una curva simple suave por partes y cerrada, entonces el área de S esta dada por : $A(s) = \frac{1}{2}\oint_c xdy - ydx$

Solución

Sea $M(x,y) = -\frac{y}{2}$ y $M(x,y) = \frac{x}{2}$ aplicando el teorema de Green

$$\oint_c -\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy = \iint_s \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dA = A(s)$$

Ejemplo#3

Usa el resultado del ejemplo 2 para encontrar el área encerrada por la elipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$.

Solución

La elipse dada tiene como ecuaciones paramétricas x = acost, y = bsent, $0 \le t \le 2\pi$, por tanto

$$A(s) = \frac{1}{2}\oint_c xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2x} (a\cos t)(b\cos tdt) - (bsent)(-asentdt)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2x} (ab\cos^2 tdt) + (absen^2 tdt) = \frac{1}{2}\int_0^{2x} (ab)(\cos^2 t + sen^2 t)dt = \frac{ab}{2}t\Big|_0^{2\pi} = \frac{ab}{2}(2\pi - 0) = \pi ab$$

Ejemplo#4

Use el teorema de Green para evaluar la integral de línea $\oint_c (x^3 + 2y)dx + (4x - 3y^2)dy$ donde C es la elipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

Solución

sea M(x,y) = x^3 + 2y, N(x,y) = 4x - $3y^2$ de modo que $\frac{\partial M}{\partial y} = 2$; $\frac{\partial N}{\partial x} = 4$

por el teorema de Green y el ejm.3 $\int_c (x^3 + 2y)dx + (4x - 3y^2)dy = \iint_s (4-2)dA = 2A(s) = 2\pi ab$

5.6.1 Formas vectoriales del Teorema de Green

Reformularemos el teorema de Green para el plano, en su forma vectorial, de dos maneras distintas. Estas dos formas serán generalizadas después como dos teoremas importantes del espacio tridimensional.

Supóngase que C es una curva cerrada simple, suave del plano xy, y se le ha dado una orientación contraria a las manecillas del reloj por medio de la parametrización de la longitud del arco x = x(s) y y = y(s). Entonces $T = \frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}j$ será un vector tangente unitario y $n = \frac{dy}{ds}i - \frac{dx}{ds}j$ será un vector normal unitario que apuntará hacia afuera de la región S limitada por C, ver figura 5.6.6

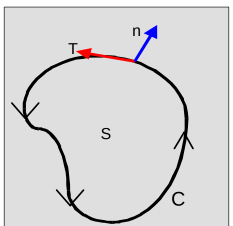


Fig.5.6.6

Observe que T.n = 0. Si F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j es un campo vectorial, entonces $\oint F \bullet n ds = \oint (Mi+Nj).\left(\frac{dy}{ds}i - \frac{dx}{ds}j\right)ds = \oint_c -Ndx + Mdy = \iint_s \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)dA$,

sabemos que div F = $\nabla \bullet F = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}$ Concluimos que:

$$\oint_c F \bullet n ds = \iint_s divF dA = \iint_s \nabla \bullet F dA$$

A este resultado a veces le llamamos Teorema de la divergencia de Gauss en el plano.

Interpretación física del teorema de la divergencia de Gauss

Imagine una placa de fluido uniforme de densidad constante que se mueva en el plano xy, la placa es tan delgada que puede considerarse como bidimensional. Queremos calcular la razón con la que el fluido cruza en una región S su curva frontera C, figura 5.6.7

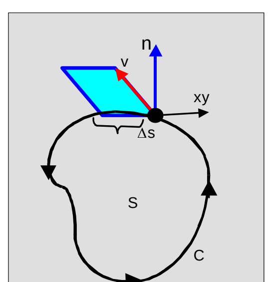


Fig. 5.6.7

Sea F(x,y) = v(x,y) el vector velocidad del fluido en (x,y) y sea **Δs** la longitud de un pequeño segmento de curva cuyo punto inicial es (x,y). La cantidad de fluido que cruza el segmento por unidad de tiempo es el área aproximada del paralelogramo de la figura 5.6.7 o sea **v.nΔs**. La cantidad neta de fluido que sale de S llamada flujo del campo vectorial F a través de la curva C en dirección hacia afuera es, por lo tanto:

<u>Flujo de F a través de C</u> **=** $\oint_c F \bullet n\,ds$

Considérese ahora un punto fijo (x_0 , y_0) en S y un pequeño círculo C, de radio r en torno a él. Sobre S_r la región circular con frontera C_r **divF** será aproximadamente igual a su valor $F(x_0 , y_0)$ en el centro (suponiendo que **divF** es continua); por lo tanto, por el teorema de Green:

Flujo de F a través de $C_r = \oint_{c_r} F \bullet n\,ds = \iint_{s_r} \operatorname{div} F\, dA \approx \operatorname{div} F(x_0, y_0)(\pi r^2)$

Concluimos que **divF** (x_0 , y_0) mide la razón a la cual el fluido diverge desde (x_0 , y_0). Si **divF**$(x_0 , y_0) > 0$, hay una fuente de fluido en (x_0 , y_0). Si div $F(x_0 , y_0) < 0$ entonces hay un sumidero de fluido en (x_0 , y_0). Si el flujo que cruza la frontera de una región a otra es cero, entonces la fuente y sumideros de la región deben equilibrarse entre sí. Por otra parte, si no hay fuentes ni sumideros en una región S, entonces div F = 0, y por el teorema de Green, habrá un flujo neto cero a través de la frontera S.

Teorema de Green en tres dimensiones(ver figura 5.6.8)

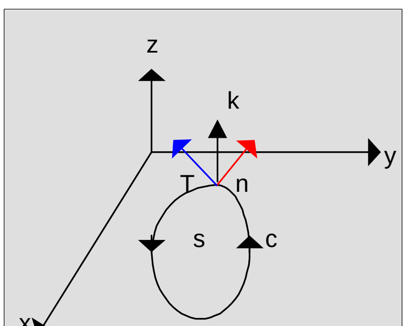


Fig5.6.8

Forma vectorial del teorema de Green

Si F = Mi + Nj + Ok Ec_1

Entonces, el teorema de Green dice $\oint F \bullet T ds = \int_C M dx + N dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$ Ec_2

sabemos que $\operatorname{rot} F = \nabla x F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & O \end{vmatrix} = 0i + 0j + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)k$. Por lo tanto (rot F) • k = $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$

A este resultado a veces se le llama Teorema de Stokes. El coeficiente k tiene la forma del integrando de la integral doble en el teorema de Green. Sea **S** la longitud de arco a lo largo de

C y **T** el vector unitario tangente. Usando esta notación el teorema de Green se expresa de la siguiente forma:

El teorema de Green toma la siguiente forma vectorial : $\oint_c F \bullet T ds = \iint_s (\text{rot}F) \bullet k\, ds$

Como $(\nabla \times F) \bullet k$ es la componente del **rotF** en la dirección del eje **z,** se le llama componente normal a S de **rotF.** En otras palabras el teorema anterior dice:" La integral de línea de la componente tangencial de **F** a lo largo de C recorrida una vez en la dirección positiva es igual a la integral doble sobre S de la componente normal de **rotF.**

El **rotF** mide la tendencia del fluido a girar alrededor de (x_0 , y_0). Si rot F = 0 en una región S, el flujo del fluido correspondiente se dice que es irrotacional.

Ejemplo#1

El campo vectorial F(x,y) = -½ yi + ½ xj = Mi + Nj es el campo de velocidades de la rotación estacionaria, en sentido contrario a las manecillas del reloj de una rueda sobre el eje de las z. Calcule $\oint_c F \bullet n ds$ y $\oint_c F \bullet T ds$ para cualquier curva cerrada C del plano xy.

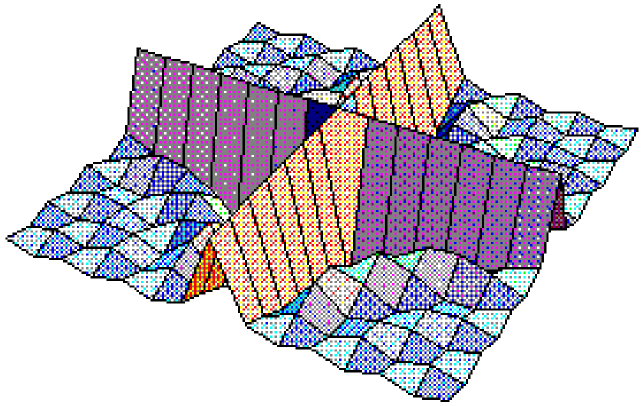
Solución

Si S es la región encerrada por C $\oint_c F \bullet T ds = \iint_s \text{div}F dA = \iint_c \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA = 0$

$$= \iint_s (\text{rot}F) \bullet k dA = \iint_c \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint_s \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dA = \text{area}S$$

Quinta Unidad

Campos vectoriales e integrales de línea



Problemas y Ejercicios

Problemas y Ejercicios de las sección 5.1

- **5.1 Campos Vectoriales en Física**

Dibuje los campos vectoriales representativos del campo vectorial dado F.

a) F(x,y) = xi + yj
b) F(x,y) = xi - yj
c) F(x,y) = -xi + 2yj
d) F(x,y) = xi + 0j + k
e) F(x,y,z) = -zk
f) F(x,y) = 3xi + yj

Problemas y Ejercicios de las sección 5.2

- **5.2 Campos gradientes**

Encuentre el gradiente

a) $f(x,y,z) = x^2 - 3xy + 2z$
b) $f(x,y,z) = \ln|x\ y\ z|$
c) $f(x,y,z) = x\ e^y \cos z$
d) $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(x,y,z)$
e) $f(x,y,z) = y^2 e^{-2z}$

Problemas y Ejercicios de las sección 5.2.2

- **5.2.2 Divergencia y rotacional de campos vectoriales**

Encuentre el divF y el rotF. Desarrolle una función utilice el software Matemática para verificar los ejercicios .

a) $F(x,y,z) = x^2\, i - 2xyj + yz^2\, k$
b) $F(x,y,z) = e^x \cos y\, i + e^x \operatorname{sen} y\, j + z\, k$
c) $F(x,y,z) = yz\, i + xz\, j + xy\, k$
d) $F(x,y,z) = x^2 i + y^2 j + z^2 k$
e) $F(x,y,z) = \cos x i + \operatorname{sen} y\, j + 3k$

Problemas y Ejercicios de las sección 5.3
- **5.3 Integrales de línea en el plano**

En los siguientes problemas evalúe las integrales de línea a lo largo de la curva c dada.

a) $\int_c ydx + x^2dy$; donde C es la curva x = 2t, y = t^2-1 de $0 \le t \le$

b) $\int_c (x+2y)dx + (x-2y)dy$; donde c es el segmento de recta que va de (1,1) a (3,1).

c) $\int_c y^3dx + x^3dy$; donde c es la curva x = 2t, y = t^2-3 de $-2 \le t \le 1$.

d) $\int_c (x+y+z)dx + (x-2y+3z)dy + (2x+y-z)dz$; donde c es la trayectoria rectilínea que va de (0,0,0), (2,0,0), (2,3,0), (2,3,4).

e) $\int_c (x+y+z)dx + xdy - yzd$; donde c es el segmento de recta que va de (1,2,1) a (2,1,0).

f) $\int_c (2x+9z)ds$; donde c es la curva x = t, y = t^2, z = t^3 de $0 \le t \le 1$.

Problemas y Ejercicios de las sección 5.4
- **5.4 Independencia de la trayectoria**

Demuestre que la integral de línea es independiente de la trayectoria (use el teorema c), desarrolle un programa para dar solución a este tipo de ejercicio.

a) $\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy$

b) $\int_{(0,0)}^{(1,\pi/2)} e^x \operatorname{sen} ydx + e^x \cos ydy$

c) $\int_{(0,0)}^{(2,2)} x^2dx + y^2dy$

d) $\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xydx + x^2dy$

e) $\int_c ydx + xdy$

Problemas y Ejercicios de las sección 5.5
- **5.5 Trabajo a lo largo de una curva**

Evalúe, compruebe con los comandos del software Mathematica la veracidad de estos resultados.

a) $F(x,y) = y^3i - x^2yi$; $r(t) = e^{-2t}i + e^tj$; $0 \le t \le \ln 2$.
b) Calcule el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y) = yi + xj$ que actúa a lo largo de $y = \ln x$ de (1,0) a (e,1).
c) Determine el trabajo realizado por la fuerza $F(x,y) = (x + 2y)\, i + (6y - 2x)j$ que actúa en sentido opuesto al de las manecillas del reloj una vez, alrededor del triángulo con vértices (1,1), (3,1) y (3,2).
d) Calcule el trabajo realizado por una fuerza constante $F(x,y) = ai + bj$ que actúa en sentido opuesto a las manecillas del reloj una vez alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 9$.

Problemas y Ejercicios de las sección 5.6
- **5.6 Teorema de Green en el plano**

1) Utilizando el software Mathematica desarrolle un programa que resuelva tres tipos de ejercicios modelos a través del teorema de Green para evaluar las integrales de líneas.

a) $\oint_c 2xydx + y^2dy$, donde C es la curva cerrada formada por $x = x/2$ y $y = \sqrt{x}$ entre (0,0) y (4,2).

b) $\oint_c (2x + y^2)dx + (x^2 + 2y)dy$, donde C es la curva cerrada formada por $y = 0$, $x = 2$, $y = x^3/4$.

c) $\oint_c xydx + (x + y)dy$, donde C es triángulo de vértices(0,0),(2,0) y (0,1)

d) $\oint_c (x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 3y)dy$, donde C es la elipse formada por $9x^2 + 16y^2 = 144$.

e) $\oint_c (e^{3x} + 2y)dx + (x^2 + \operatorname{sen} y)dy$, donde C es el rectángulo con vértices (2,1),(6,4) y

2) En los problemas siguientes use el teorema de Green para calcular $\int_c F \bullet Tds$

a) $F = y^2i + x^2j$ C es la frontera del cuadrado unitario con vértices (0,0), (1,0), (1,1) y (0,1).
b) $F = y^3i + x^3j$; C es el círculo unitario.
c) $F = xi + yj$; C es un círculo unitario.
d) $\oint_c 2ydx + 5xdy$ C es la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 3)^3 = 25$.

Proyectos de la Quinta Unidad

Proyecto#9

Sea f un campo escalar y F un campo vectorial. Indique cuales de los siguientes campos son escalares, vectoriales o sin significado. Elabore un programa donde se comprueben ejercicios de este tipo.

a) divf;	b) rot(gradf);	c) grad(gradf));
d) gradf	e) grad(divf));	f) div(rot(gradf));
g) gradF;	h) rot(rotF)	i) rot(div(gradf));
j) div(gradf);	k) div(divF)	

Proyecto#10

En los siguientes problemas determine si el campo F es conservativo. De ser así encuentre f tal que F = ∇f si no, establezca que F no es conservativo (ver ejemplos del tema independencia de la trayectoria). Implemente un programa que verifique la veracidad de estos ejercicios.

1) F(x,y) = 10x - 7y)i - (7x - 2y)j
2) F(x,y) = $(45x^4y^2 - 6y^6+3)i + (10x^5y - 12xy^5+7)j$
3) $F(x,y) = \left(\frac{6x^2}{5y^2}\right) i + \left(\frac{4x^3}{5y^3}\right) j$

4) $F(x,y) = (2e^{y} - ye^{x})i + (2xe^{y} - e^{x})j$
5) $F(x,y) = 3x^{2}i + 6y^{2}j + 9z^{2}k$